# Mecánica Hamiltoniana y Teoría de Perturbaciones*

Àngel Jorba
Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi
Universitat de Barcelona
Gran Via 585, 08007 Barcelona
E-mail: angel@maia.ub.es

17 de Julio de 1997

## 1 Presentación

El propósito de este curso es introducir algunos conceptos básicos sobre mecánica hamiltoniana, así como presentar algunas de las cuestiones abiertas más importantes del área.

Es muy difícil (por no decir imposible) dar, en un curso tan corto, una visión lo bastante profunda del tema como para poder comprender en su totalidad las técnicas, resultados y problemas abiertos que se mencionan. Ello me ha llevado a incluir una gran cantidad de bibliografía, con el propósito de facilitar la búsqueda de más detalles o la ampliación de lo aquí expuesto.

## 2 Introducción

Reciben el nombre de *sistemas hamiltonianos* los sistemas dinámicos descritos por una ecuación diferencial ordinaria de la forma:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \tag{1}$$

La variable $p \in \mathbb{R}^\ell$ se denomina *momento* y la variable $q \in \mathbb{R}^\ell$, *posición*. La función $H \equiv H(p,q,t)$ se conoce como *función de Hamilton* o *hamiltoniano* asociada al sistema (1), y $\ell$ es el número de grados de libertad del sistema. Las ecuaciones (1) se suelen llamar *ecuaciones de Hamilton*. Cuando la función de Hamilton no depende del tiempo de manera explícita se dice que el sistema es autónomo.

Todos los hamiltonianos que aparecerán en lo sucesivo tendrán $\ell$ grados de libertad y serán considerados analíticos y autónomos, a menos que explícitamente se diga lo contrario.

Otra manera de escribir las ecuaciones de Hamilton es la siguiente: definamos la matriz $J$ como

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

donde $I$ denota la matriz identidad $\ell \times \ell$. Ahora podemos escribir las ecuaciones (1) de manera compacta como

$$\dot{z} = J \nabla H(z), \qquad z = (q,p). \tag{2}$$

*Curso de Verano "Iniciación a los sistemas dinámicos", organizado por la Universidad Complutense de Madrid en El Escorial, del 7 al 11 de julio de 1997. Para más información puede consultarse la dirección de Internet http://www-ma1.upc.es/escorial

La matriz $J$ es antisimétrica ($J^\top = -J$) y no singular ($\det J = 1$). Podemos, por tanto, utilizarla para definir una *forma simpléctica*[1] $\omega^0$ sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}^{2\ell}$:

$$\omega^0(u, v) = u^\top J v, \quad u, v \in \mathbb{R}^{2\ell}.$$

Diremos que una matriz $M$ es *simpléctica* si verifica

$$M^\top J M = J.$$

Diremos que una función

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^\ell & \to & \mathbb{R} \\ (p, q) & \mapsto & f(p, q) \end{array}$$

es una *integral primera* del hamiltoniano $H$ si es constante sobre las soluciones de (1), es decir, si las superfícies de nivel $f(p, q) = c$ son invariantes por (1). Es inmediato comprobar que la función $H$ es siempre una integral primera del hamiltoniano $H$.

Definiremos el *paréntesis de Poisson* de dos funciones $f(p, q)$ y $g(p, q)$ como

$$\{f, g\} = \nabla f^\top J \nabla g = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}.$$

Diremos que dos funciones $f(p, q)$ y $g(p, q)$ están en *involución* si su paréntesis de Poisson es cero,

$$\{f, g\} = 0.$$

Diremos que las funciones $\{f_j\}_{1\leq j\leq n}$ son *independientes* si los vectores $\{\nabla f_j\}_{1\leq j\leq n}$ son linealmente independientes.

Un resultado clásico debido a Liouville y Arnol'd ([5]) es que, si un sistema hamiltoniano con $\ell$ grados de libertad posee $\ell$ integrales primeras independientes en involución, $\{f_j\}_{1\leq j\leq \ell}$, el sistema es integrable. Precisemos brevemente esta aseveración. Sea $\mathcal{M}_0$ un conjunto de nivel de las funciones $f_j$,

$$\mathcal{M}_0 = \{(p, q) : f_j(p, q) = f_j^{(0)},\ j = 1, \ldots, \ell\},$$

entonces tenemos que:

1. La variedad $\mathcal{M}_0$ es invariante, es decir, cualquier condicion inicial sobre esta variedad da lugar a una solución contenida en la variedad.

2. Si $\mathcal{M}_0$ es una variedad compacta y conexa,[2] entonces es difeomorfa al toro de dimensión $\ell$,

$$\mathbb{T}^\ell = \{(\phi_1, \ldots, \phi_\ell) \bmod 2\pi\}.$$

En este último caso pueden introducirse, mediante un cambio de variable $(p, q) = F(I, \phi)$ ($I \in \mathbb{R}^\ell$ es el nuevo momento y $\phi \in \mathbb{T}^\ell$ la nueva posición), las llamadas *variables acción-ángulo*, denotando por $I$ las acciones y por $\phi$ los ángulos. En estas variables, el hamiltoniano toma la forma $H = H(I)$ (es decir, es independiente de las variables $\phi$) y las correspondientes ecuaciones de Hamilton son:

$$\dot{I} = 0, \qquad \dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial I} \equiv \omega(I).$$

Estas ecuaciones pueden integrarse de manera trivial, obteniéndose soluciones de la forma:

$$I(t) = I_0, \qquad \phi(t) = \omega(I_0)t + \phi_0.$$

[1] Una forma simpléctica es una forma bilineal alternada no degenerada.

[2] Naturalmente, hay otras posibilidades que no vamos a discutir aquí, puesto que no van a ser necesarias en lo sucesivo.

Nótese que, si los valores $\omega(I_0) \equiv \omega_0$ son *inconmensurables*, es decir, linealmente independientes sobre los racionales, cada solución es una trayectoria cuasiperiódica densa sobre un toro de dimensión $\ell$.

De manera natural podemos utilizar el valor de las frecuencias $\omega$ para identificar los toros del sistema. En los casos en los que la aplicación

$$I \mapsto \frac{\partial H}{\partial I}(I) \equiv \omega(I)$$

es un difeomorfismo (entre dominios adecuados), se puede identificar también a los toros por el valor que toma la variable de acción $I$.

Si $\langle k, \omega_0 \rangle = 0$ para algún $k \in \mathbb{Z}^\ell$, entonces sobre este toro las soluciones no son densas: si tenemos $\ell_i$ frecuencias independientes, entonces el toro $I = I_0$ contiene una familia $(\ell - \ell_i)$-paramétrica de toros $\ell_i$ dimensionales. Cada uno de estos toros está recorrido densamente por cualquier solución que pase por él. Estos toros invariantes de dimensión $\ell_i$ son conocidos como *toros de dimensión baja*, en contraposición a los toros de dimensión $\ell$, que se conocen como *toros de dimensión máxima* o *toros maximales*.

Los hamiltonianos integrables constituyen los problemas más simples de la dinámica, porque pueden ser resueltos analíticamente. Son, por tanto, sistemas perfectamente predecibles: si se conoce el estado del sistema en un momento dado, su evolución posterior puede ser descrita mediante expresiones explícitas (posiblemente muy complicadas). Ejemplos bien conocidos son el oscilador armónico, el péndulo simple o el problema de los dos cuerpos. Podríamos citar más ejemplos de sistemas integrables, pero todos ellos deben ser considerados como "exóticos", en el sentido que la gran mayoría de los sistemas que aparecen en las aplicaciones no son integrables. Ahora bien, dentro de la gran variedad de sistemas mecánicos que se encuentran en la naturaleza, existen muchos sistemas que pueden ser considerados una perturbación pequeña de un sistema integrable. Su hamiltoniano puede, por tanto, escribirse de la forma siguiente:

$$H(I, \phi, \varepsilon) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \phi, \varepsilon), \tag{3}$$

siendo $\varepsilon$ un parámetro pequeño. Sus ecuaciones asociadas son

$$\dot{I} = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \phi}, \qquad \dot{\phi} = \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I},$$

donde $\omega(I) = \partial_I H_0$. Estos sistemas suelen conocerse con el nombre de *sistemas casi integrables*.

Quizás el ejemplo más famoso de sistemas casi integrables es el sistema solar. El movimiento de los diferentes cuerpos dentro del sistema solar es uno de los fenómenos que más ha preocupado e interesado al hombre desde sus orígenes. La aparente regularidad del movimiento de la Luna, el Sol y los planetas en el firmamento han llevado a la humanidad a buscar modelos para explicar y predecir su dinámica.

El sistema clásico (newtoniano) para modelizar el sistema solar recibe el nombre de *problema de los $N$ cuerpos*: se trata de describir el movimiento de $N$ masas puntuales en $\mathbb{R}^3$, sometidas exclusivamente[3] a su atracción gravitatoria mutua. Este problema admite una formulación hamiltoniana. Si particularizamos este problema para el caso de nuestro sistema solar, observaremos que, de manera natural, puede obtenerse una versión simplificada del mismo, despreciando la atracción gravitatoria que los planetas ejercen entre sí. En este caso, el sistema queda como $N$ problemas de 2 cuerpos desacoplados (cada problema se compone del Sol y un planeta, o bien de un planeta y un satélite, o bien del Sol y un asteroide, etc.) que puede, por tanto, ser integrado de manera explícita. En este modelo el movimiento de los planetas es

[3] Se pueden considerar extensiones a esta definición de problema de $N$ cuerpos incluyendo otros efectos, como por ejemplo, efectos relativistas.

perfectamente regular y estable, siguiendo órbitas elípticas alrededor del Sol. El hamiltoniano de este problema reducido puede escribirse en variables acción-ángulo (utilizando, por ejemplo, las *variables de Delaunay*), tomando la forma $H = H(I)$. Ahora podemos introducir la interacción entre los diversos problemas de dos cuerpos, para obtener un hamiltoniano del tipo (3), donde $\varepsilon$ es el parámetro que mide la interacción entre los diversos problemas de dos cuerpos.

El estudio de sistemas como el (3) se inscribe dentro de la teoría de las perturbaciones, y Henri Poincaré no dudó en calificarlo como "el problema fundamental de la mecánica". Existen muchos resultados sobre este problema, entre los que destacamos el Teorema KAM ([2]) y el Teorema de Nekhoroshev ([45]). Para un resumen de éstos y otros resultados relacionados se recomienda la consulta de [5]. Otros textos donde puede encontrarse material relacionado son [1], [4] y [22].

## 3 Transformaciones canónicas

Una de las herramientas fundamentales para trabajar con sistemas hamiltonianos son los cambios de variables, con el objetivo de reducir el problema a una forma más simple que nos permita obtener fácilmente el resultado buscado. Como es mucho más fácil trabajar con la función de Hamilton del sistema (una sola función) que con las ecuaciones de movimiento ($2\ell$ ecuaciones), estaremos interesados en cambios de variable que preserven la forma hamiltoniana.

Por ello, llamaremos *transformación canónica* a un cambio de variable $(q,p) = \Psi(x,y)$ tal que el Hamiltoniano transformado $\hat{H}(x,y) \equiv H(\Psi(x,y))$ tiene por ecuaciones de movimiento las que resultan de aplicar el cambio de variable $\Psi$ a las ecuaciones de movimiento del hamiltoniano inicial $H$. No es difícil comprobar que una condición necesaria y suficiente para que una transformación sea canónica es que su diferencial sea una matriz simpléctica.

Si estamos interesados en construir transformaciones canónicas, la caracterización anterior no es muy útil, puesto que no da un criterio práctico para calcularlas. Afortunadamente, existen otras caracterizaciones que permiten el cálculo efectivo de transformaciones canónicas. La que vamos a utilizar aquí se basa en las siguientes propiedades de los flujos hamiltonianos:

1. El flujo a tiempo $t$ de un sistema hamiltoniano es una transformación simpléctica.

2. Sea $G(q,p)$ un sistema hamiltoniano con $\ell$ grados de libertad, y sea $(q_0(t), p_0(t))$ una solución de dicho hamiltoniano. Entonces,

$$\frac{d}{dt} f(q_0(t), p_0(t)) = \{f, G\} (q_0(t), p_0(t)), \tag{4}$$

   para cualquier función $f$.

Ahora es fácil ver que, si queremos transformar un hamiltoniano $H$ mediante el flujo a tiempo unidad de otro hamiltoniano $G$, podemos aplicar la fórmula

$$\hat{H} \equiv H + \{H, G\} + \frac{1}{2!} \{\{H, G\}, G\} + \frac{1}{3!} \{\{\{H, G\}, G\}, G\} + \cdots, \tag{5}$$

donde $\hat{H}$ denota el hamiltoniano transformado. Esta expresión resulta de aplicar la fórmula de Taylor para la transformación, utilizando (4) para las derivadas. El hamiltoniano $G$ se acostumbra a llamar *función generatriz* del cambio de variables.

La expresión (5) es muy adecuada para realizar cálculos efectivos, puesto que es de fácil implementación en un computador (nótese que no es necesario disponer de ninguna expresión explícita para el flujo de $G$). El hecho de que la transformación venga definida por una serie infinita no es un problema grave, puesto que es habitual trabajar con series truncadas a un cierto orden. Si lo que pretendemos no es calcular el hamiltoniano transformado de manera explícita sino solamente obtener algunas estimaciones, la fórmula (5) no es la más adecuada para ello. La razón es que es muy difícil producir acotaciones precisas de los paréntesis de Poisson involucrados. En este caso se acostumbran a emplear acotaciones basadas directamente en la expresión del flujo a tiempo unidad del hamiltoniano $G$.

# 4 Formas normales

Consideremos un hamiltoniano casi integrable como (3). Podemos preguntarnos sobre la posibilidad de efectuar cambios de variable con el propósito de eliminar la dependencia del ángulo $\phi$. Si ello fuese posible, obtendriamos un hamiltoniano dependiendo solamente de las variables $I$, que por tanto seria integrable.

Hay diversos algoritmos que producen una serie de transformaciones formales que van eliminando la dependencia del ángulo hasta órdenes tan elevados como se desee. Como ejemplo, podemos ilustrar el proceso de paso a forma normal a traves de un ejemplo concreto.

## 4.1 Forma normal alrededor de un punto elíptico

Consideremos un hamiltoniano autónomo, analítico, con un punto de equilibrio estable que por simplicidad supondremos que es el origen. Expandamos el hamiltoniano en serie de potencias alrededor del origen,

$$H(q,p) = H_2(q,p) + H_3(q,p) + H_4(q,p) + \cdots, \tag{6}$$

donde $H_j(q,p)$ denota un polinomio homogéneo de grado $\ell$ en las variables $(q,p)$. Sea $A$ la matriz correspondiente a la linealización de las ecuaciones de movimiento alrededor del punto elíptico (en otras palabras, $A = J\nabla H_2$ si utilizamos la notación de la ecuación (2)).

Notemos que (6) puede verse, cerca del origen, como un hamiltoniano casi integrable: la parte "dominante" es $H_2$ (que es un hamiltoniano integrable, puesto que corresponde a un sistema diferencial lineal y autónomo) mientras que el resto de los términos (que forman la parte no integrable) pueden ser vistos como una perturbación de $H_2$. Por ello, vamos a intentar efectuar cambios de variable con el propósito de eliminar estos "pequeños términos" para obtener un sistema integrable.

En primer lugar, es muy conveniente efectuar una transformación previa, para facilitar los pasos posteriores. Como $A$ es una matriz elíptica, podemos diagonalizarla (mediante un cambio de base con coeficientes complejos) de modo que en su diagonal aparecerán unos valores $(\sqrt{-1}\omega_1, \ldots, \sqrt{-1}\omega_\ell, -\sqrt{-1}\omega_1, \ldots, -\sqrt{-1}\omega_\ell)$. No es difícil comprobar que este cambio de variable puede tomarse canónico. Si denominamos $(x,y)$ a estas nuevas variables ($x$ denotará las nuevas posiciones e $y$ los nuevos momentos), el hamiltoniano toma la forma

$$H(x,y) = \sum_{j=1}^{\ell} \sqrt{-1}\omega_j x_j y_j + \sum_{n\geq 3} H_n(x,y), \tag{7}$$

donde, para no complicar la notación, hemos mantenido el mismo nombre $H$ para el hamiltoniano transformado.

A continuación utilizaremos el esquema (5). Para ello, necesitamos una propiedad básica del paréntesis de Poisson: si $P$ y $Q$ son polinomios homogéneos de grados $r$ y $s$ respectivamente, entonces $\{P,Q\}$ es un polinomio homogéneo de grado $r+s-2$. En primer lugar, intentemos eliminar el término $H_3$ de (7). Para ello, busquemos un polinomio homogéneo de grado 3, $G_3$, de modo que el hamiltoniano transformado de (7) mediante el esquema (5) no tenga monomios de tercer grado. Veamos quienes son los términos de $\hat{H}$:

grado 2: $\hat{H}_2 = H_2$,

grado 3: $\hat{H}_3 = H_3 + \{H_2, G_3\}$,

grado 4: $\hat{H}_4 = H_4 + \{H_3, G_3\} + \frac{1}{2!}\{\{H_2, G_3\}, G_3\}$,

$\vdots$

Si $k$ es un multiíndice, $k \in \mathbb{N}^\ell$, definimos su módulo mediante $|k| = \sum_j |k_j|$. Si $x = (x_1, \ldots, x_\ell)$ y $k$ es un multiíndice de $\ell$ componentes, entonces notaremos por $x^k$ al monomio $\prod_{j=1}^\ell x_j^{k_j}$. Con esta notacion, podemos escribir $H_3$ como

$$H_3(x,y) = \sum_{|k_x|+|k_y|=3} h_{k_x,k_y} x^{k_x} y^{k_y},$$

donde $k_x$ y $k_y$ denotan los exponentes de $x$ e $y$, respectivamente. Escribamos la $G_3$ que estamos buscando como

$$G_3(x,y) = \sum_{|k_x|+|k_y|=3} g_{k_x,k_y} x^{k_x} y^{k_y}.$$

Nótese que, debido a la forma "diagonal" de $H_2$,

$$\{H_2, G_3\} = \sum_{|k_x|+|k_y|=3} \sqrt{-1}\,\langle k_y - k_x, \omega\rangle\, g_{k_x,k_y} x^{k_x} y^{k_y},$$

donde $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_\ell)$. Se sigue de manera inmediata que, para eliminar los términos de tercer orden, $\hat{H}_3$, tenemos que tomar $G_3$ como

$$G_3(x,y) = \sum_{|k_x|+|k_y|=3} \frac{-h_{k_x,k_y}}{\sqrt{-1}\,\langle k_y - k_x, \omega\rangle} x^{k_x} y^{k_y}.$$

Para asegurar que $G_3$ está bien definido, nos hace falta alguna condición que garantice que los denominadores no se anulen. La condición $|k_x| + |k_y| = 3$ fuerza que $k_y - k_x$ sea siempre distinto de cero. La hipótesis que vamos a añadir es que *las componentes del vector de frecuencias $\omega$ sean linealmente independientes sobre los racionales.* Esta es una condición necesaria y suficiente para garantizar que el producto $\langle k, \omega\rangle$ es no nulo para cualquier $k$ no nulo.

Una vez realizada la transformación anterior, renombramos al nuevo hamiltoniano $H$, que ahora es de la forma

$$H(x,y) = H_2(x,y) + H_4(x,y) + H_5(x,y) + \cdots.$$

Ahora podemos repetir el proceso anterior para obtener un polinomio homogéneo de grado 4, $G_4$, que elimine los términos de grado 4 del hamiltoniano transformado:

$$G_4(x,y) = \sum_{|k_x|+|k_y|=4} \frac{-h_{k_x,k_y}}{\sqrt{-1}\,\langle k_y - k_x, \omega\rangle} x^{k_x} y^{k_y}. \tag{8}$$

Nótese que ahora tenemos un inconveniente, debido a que hay parejas $(k_x, k_y)$ que hacen que $k_y - k_x$ sea cero. Estos valores deben ser excluidos del sumatorio (8). Ello provoca que algunos de los monomios de $H_4$ no sean eliminados, con lo que el nuevo hamiltoniano (que, por simplicidad, volvemos a llamar $H$) toma la forma

$$H(x,y) = H_2(x,y) + \bar{H}_4(x,y) + H_5(x,y) + \cdots, \tag{9}$$

donde $\bar{H}_4$ es de la forma

$$\bar{H}_4 = \sum_{|k|=2} \bar{h}_k x^k y^k.$$

Sin embargo, estos monomios no son un obstáculo para la integrabilidad del hamiltoniano: tomemos el hamiltoniano (9) truncado a orden 4 (esta es la *forma normal hasta orden 4* del Hamiltoniano inicial (6)), y efectuemos la transformación canónica

$$x_j = I_j^{1/2} \exp(\sqrt{-1}\phi_j), \quad y_j = -\sqrt{-1} I_j^{1/2} \exp(-\sqrt{-1}\phi_j), \quad j = 1, \dots, \ell.$$

El hamiltoniano toma ahora la forma

$$H = H(I) = \langle \omega, I \rangle + H_2(I), \quad H_2(I) = \sum_{|k|=2} \bar{h}_k I^k, \quad I = (I_1, \dots, I_\ell).$$

Notese que este es un hamiltoniano integrable, que aproxima la dinámica alrededor del punto de equilibrio hasta orden 4 en las variables iniciales $(q, p)$.

Este proceso puede continuar, bajo las hipótesis anteriores, hasta orden tan alto como se desee. Despreciando el resto (no integrable), se obtiene un hamiltoniano del tipo

$$H = H(I) = \langle \omega, I \rangle + \sum_{n=2}^{N} H_n(I). \tag{10}$$

Cabe preguntarse por la *convergencia* de este proceso. El principal problema viene de los factores $\langle \omega, k_y - k_x \rangle$ en el denominador de las funciones generatrices $G_r$. A pesar de que estos factores nunca pueden anularse (esta ha sido, de hecho, una de nuestras hipótesis), sí pueden aproximarse arbitrariamente a cero,[4] dando lugar a los llamados *pequeños divisores*. En general, estos pequeños divisores impiden la convergencia de las formas normales que hemos descrito aquí, por lo que las expresiones como (10) sólo son series asintóticas que no definen ninguna función analítica.

Su utilidad, en general, no reside en la convergencia sino en las aproximaciones de orden elevado de la dinámica que producen. Por ello, son una herramienta básica para la teoría y aplicaciones de los sistemas dinámicos, como el estudio local de bifurcaciones o el cálculo efectivo de objetos invariantes. También son una herramienta básica en la demostración del Teorema KAM y en las estimaciones sobre velocidad de difusión (ver secciones 5 y 6), entre otros.

Por último, queremos mencionar que hay muchos tipos de formas normales. Las diferencias entre unas y otras vienen, esencialmente, de la forma concreta del Hamiltoniano y de los términos de éste que se quieren eliminar. Como referencias sobre estos temas podemos citar [20], [8], [51], [26], [22], [48], [32], [33] y [34].

## 4.2 Estimaciones del resto

Para simplificar la discusión, continuemos con el ejemplo de la sección anterior, y supongamos que tenemos el hamiltoniano en forma normal hasta grado $2N$,

$$H(x, y) = H_2(x, y) + \sum_{j=0}^{2N} \bar{H}_j(x, y) + R_{2N}(x, y).$$

Para conseguir acotaciones sobre el tamaño del resto $R_{2N}$, necesitamos alguna condición que garantice que los divisores $\langle k, \omega \rangle$ que obtuvimos al construir las funciones generatrices no sean

[4] De hecho, el conjunto de los $\langle k, \omega \rangle$ con $k \in \mathbb{Z}^\ell$ $(\ell > 1)$ y los $\omega$ linealmente independientes sobre los racionales es denso sobre la recta real.

demasiado pequeños (si permitimos divisores tan pequeños como queramos, el resto puede ser tan grande como queramos). La condición que se suele pedir es

$$|\langle k, \omega \rangle| \geq \frac{c}{|k|^{\gamma}}, \quad \gamma > \ell - 1. \tag{11}$$

Esta condición se suele llamar *condición diofántica* sobre el vector de frecuencias $\omega$. Dejamos como ejercicio para el lector el verificar que el conjunto de vectores $\omega$ que satisfacen esta condición tiene medida de Lebesgue positiva (de hecho, la medida de los valores $\omega$ para los que no se satisface (11) tiene medida $O(c)$).

La condición (11) permite derivar acotaciones para las funciones generatrices de los cambios de variables que a su vez permiten obtener estimaciones sobre las sucesivas transformaciones del hamiltoniano. Nótese que, al acotar la norma de una de las funciones $G_r$, obtendremos (entre otros términos) el factor $r^{\gamma}$ que proviene de (11). Al acumular estas transformaciones el resto $R_{2N}$ contendrá el factor $((2N)!)^{\gamma}$, que va a impedir la convergencia del proceso.

Si nos restringimos a una bola de radio $R$ centrada en el origen, es posible demostrar que, para todo $R$ lo bastante pequeño existe un valor $N_R$ de modo que los valores del resto $R_{N_R}$ sobre la bola de radio $R$ pueden acotarse por una cantidad exponencialmente pequeña en $R$, del tipo $c_1 \exp(-c_2(1/R)^{2/(\gamma+1)})$ ($c_1 > 0$, $c_2 > 0$). Esta acotación va a ser esencial en las secciones siguientes.

# 5 Estimaciones de Nekhoroshev

Para facilitar la discusión, vamos a continuar con el estudio de la dinámica alrededor de un punto de equilibrio elíptico, que supondremos situado en el origen.

Estamos interesados en la estabilidad (no lineal) de los puntos elípticos, es decir, queremos saber si existen condiciones iniciales arbitrariamente cercanas al origen que dan lugar a soluciones que se alejan hasta distancias grandes (típicamente, $O(1)$).

Un resultado clásico sobre la estabilidad de puntos de equilibrio elípticos de sistemas hamiltonianos es el conocido teorema de Dirichlet, que afirma que si la matriz hessiana del hamiltoniano en el punto de equilibrio es definida positiva, entonces dicho punto es estable.[5] La estabilidad de puntos de equilibrio elípticos cuando la matriz hessiana no es definida positiva es todavia un problema abierto. Por otro lado, existen algunas respuestas parciales a este problema que vamos a comentar en las secciones siguientes.

En primer lugar, notemos que si el hamiltoniano esta escrito en la forma $H = H_0(I) + H_1(I, \phi)$ (esta es la forma en la que queda el hamiltoniano después de algunos pasos de forma normal), la inestabilidad del punto sólo puede provenir del término $H_1$ (el término $H_0$ produce una dinámica "estable", en el sentido de que todas las soluciones estan moviendose sobre toros y por tanto no escapan de las cercanias del origen). Por tanto, la velocidad de escape alrededor del punto estará acotada en función del tamaño del término $H_1$. Si efectuamos una serie de transformaciones de forma normal hasta grado adecuado, de modo que $H_0$ sea la parte integrable y $H_1$ el resto, podemos utilizar las acotaciones de la sección anterior para $H_1$. En este caso no es difícil ver que el tiempo $T(R)$ necesario para que una solución que empieza dentro de la bola de radio $R$ salga de la bola de radio $2R$ esta acotado por

$$T(R) \geq c_3 \exp\left(c_4 \left(\frac{1}{R}\right)^{\frac{2}{\gamma+1}}\right),$$

siendo $c_3$ y $c_4$ constantes positivas. A este tipo de acotaciones (acotaciones sobre el tiempo de escape o *difusión*) se les conoce habitualmente por *acotaciones de Nekhoroshev* (ver [45]).

[5] La demostración se basa en probar que las superfícies de nivel $H = cte.$ son superfícies compactas y sin borde, con lo que las soluciones no pueden escapar de la vecindad del punto de equilibrio.

# 6 Teorema KAM

Las primeras versiones de dicho teorema proceden de los trabajos de Kolmogorov ([35]), Arnol'd ([2]) y Moser ([41]). Desde estos trabajos, han aparecido numerosos artículos sobre resultados similares (variando algunas hipótesis, relajando otras, extendiendo la validez de los resultados, aplicando estas técnicas a problemas ligeramente distintos, etc.), que constituyen el campo que se conoce por *Teoría KAM*. Aquí solo pretendemos explicar una versión estándar de este teorema, con el propósito de ilustrar las técnicas y el tipo de resultados obtenidos.

Para facilitar la discusión, continuaremos con el ejemplo de las secciones anteriores, esto es, el estudio de la dinámica en las proximidades de un punto de equilibrio elíptico. Supongamos que tenemos el hamiltoniano escrito como

$$H(I,\phi) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I,\phi), \tag{12}$$

donde hemos utilizado un parámetro auxiliar $\varepsilon$ para remarcar la pequeñez del término $H_1$. Escribamos la serie de Fourier con respecto a $\phi$ como

$$H_1(I,\phi) = \sum_k h_1^k(I) \exp(\sqrt{-1}\,\langle k,\phi\rangle).$$

Denotemos por $\bar{H}_1$ el promedio de esta serie (es decir, el término que corresponde a $k=0$), y sea $\widetilde{H}_1 = H_1 - \bar{H}_1$. Redefiniendo $H_0(I)$ como $H_0(I) + \bar{H}_1(I)$ tenemos que (12) puede escribirse como

$$H(I,\phi) = H_0(I) + \varepsilon \widetilde{H}_1(I,\phi), \tag{13}$$

donde $\widetilde{H}_1$ tiene ahora promedio cero. Busquemos una función generatriz del tipo $\varepsilon G(I,\phi)$ para tratar de eliminar el término $\varepsilon\widetilde{H}_1$. El hamiltoniano transformado sera:

$$\hat{H}(I,\phi) = H_0(I) + \varepsilon\widetilde{H}_1(I,\phi) + \varepsilon\,\{H_0(I), G(I,\phi)\} + O(\varepsilon^2).$$

Si imponemos que los términos de orden $\varepsilon$ sean cero, y denotamos

$$\omega(I) = \frac{\partial H_0}{\partial I}(I),$$

obtenemos la ecuación

$$\left\langle \omega(I), \frac{\partial G}{\partial \phi} \right\rangle = -\widetilde{H}_1(I,\phi). \tag{14}$$

Si expandimos $G$ en serie de Fourier, $G = \sum g^k(I)\exp(\sqrt{-1}\,\langle k,\phi\rangle)$, podemos resolver la ecuación (14) igualando los correspondientes términos de las series para obtener

$$g^k(I) = -\frac{h_1^k(I)}{\sqrt{-1}\,\langle \omega(I), k\rangle}, \quad k \neq 0.$$

Nótese que para este paso es esencial que el término promedio ($k=0$) no esté presente en $\widetilde{H}_1$. Para verificar que esta expresión define una función analítica $G$ necesitamos imponer que los divisores $\langle \omega(I), k\rangle$ no sean "demasiado pequeños". Para ello, utilizaremos la condición de no resonancia habitual (11). A diferencia del cálculo de la forma normal (donde $\omega$ era un valor fijado), ahora el valor de la frecuencia depende de las acciones $I$. Por tanto, el conjunto de frecuencias resonantes (que no verifican (11)) corresponde a un cierto conjunto de acciones $I$. Para controlar de manera sencilla esta relación es habitual pedir la siguiente condición de *no degeneración* de la aplicación de frecuencias,

$$\det\left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2}(I)\right) \neq 0,$$

que asegura que $\omega(I)$ es un difeomorfismo del espacio de acciones al espacio de frecuencias. Por tanto, podemos evitar las frecuencias resonantes simplemente excluyendo el correspondiente conjunto de valores de la acción.

Antes de continuar, queremos realizar un breve comentario sobre la estructura del conjunto de frecuencias no resonantes. Nótese que su complementario es un conjunto denso, pero con medida de Lebesgue pequeña,[6] lo que va a permitir obtener resultados sobre "la mayoria" (en el sentido de la medida) de las condiciones iniciales. Más adelante detallaremos esta afirmación.

Una vez eliminado el conjunto de "acciones resonantes", podemos efectuar el cambio de variables definido por la función generatriz $\varepsilon G$, para obtener un hamiltoniano de la forma

$$H = (I, \phi) = H_0(I) + \varepsilon^2 H_1(I, \phi),$$

donde, para simplificar la notación, hemos usado los mismos nombres para los términos del hamiltoniano. El siguiente paso es volver a empezar el esquema iterativo, puesto que hemos obtenido un hamiltoniano del tipo (12). A pesar de que no vamos a entrar en los detalles técnicos de la demostración, queremos efectuar los siguientes comentarios:

1. Este método posee convergencia cuadrática (a veces se le llama tambien *método de Newton*), lo que nos va a permitir compensar el efecto de los factoriales que aparecerán durante la prueba: esencialmente, después de $n$ pasos, la norma de $H_1$ sera del orden de una potencia de $n!$ pero su coeficiente será $\varepsilon^{2^n}$, lo que nos dará convergencia si $\varepsilon$ es lo bastante pequeño.

2. Durante la demostración, se ha de controlar la medida del conjunto de acciones que vamos eliminando. Nótese que este conjunto es distinto a cada paso, puesto que cuando pasamos $\bar{H}_1$ de $H_1$ a $H_0$ alteramos el conjunto de valores de $\omega(I)$. Es necesario verificar que la suma de todas las medidas es convergente a un valor "pequeño".

3. La convergencia del método no se obtiene sobre un conjunto abierto de valores de $I$, sino sobre un conjunto con interior vacio. A este tipo de conjunto se le suele llamar *conjunto de Cantor*.

El resultado final es lo que se conoce por Teorema KAM: la mayoria de condiciones iniciales cercanas al origen dan lugar a movimientos cuasiperiódicos con $\ell$ frecuencias básicas. En coordenadas adecuadas, este movimiento tiene lugar sobre toros de dimensión $\ell$. Además, puede probarse lo siguiente: para valores de $R > 0$ lo bastante pequeños, la medida del conjunto de condiciones iniciales (dentro de la bola de radio $R$) que no dan lugar a movimientos cuasiperiódicos es menor que $c_5 \exp(-c_6(1/R)^{2/(\gamma+1)})$, $c_5 > 0$, $c_6 > 0$.

Hay un caso en el que el teorema KAM permite obtener la estabilidad de los puntos de equilibrio elípticos: cuando el hamiltoniano tiene dos grados de libertad ($\ell = 2$). En este caso el espacio de fases es de diemnsión 4, pero utilizando que el hamiltoniano es una integral primera podemos reducirlo a 3 dimensiones. Ahora, los toros de dimensión 2 obtenidos a partir del teorema KAM separan el espacio en dos componentes conexas y actuan, por tanto, como una barrera para la dinámica: como su densidad es muy alta cerca del origen, las trayectorias con condición inicial cerca del origen estarán confinadas cerca de él. Este razonamiento no es cierto para $\ell > 2$; veamos por ejemplo el caso $\ell = 3$: el espacio de fases tiene dimensión 6, utilizando el hamiltoniano como integral primera podemos reducirlo a dimensión 5. Ahora los toros invariantes tienen dimensión 3 y, por tanto, no separan el espacio en dos componentes conexas. Por ello no podemos concluir la estabilidad de los puntos de equilibrio elípticos en estas circunstancias.[7]

[6] Para tener una mejor idea de la estructura de dicho conjunto, proponemos realizar el siguiente ejercicio: sea $A = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, $B = A \cap \mathbb{Q}$ y $\mu$ la medida de Lebesgue de la recta real. Demostrar que, para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto abierto $C_\varepsilon$ tal que: i) $B \subset C_\varepsilon$, ii) $\mu(C_\varepsilon) \le \varepsilon$.

[7] Queremos observar que tampoco hemos demostrado que dichos puntos sean inestables.

### 6.1 Caso de difeomorfismos del plano

A continuación vamos a realizar la discusión anterior para el caso de un difeomorfismo del plano. Podemos pensar que esta aplicación la hemos obtenido como una sección de Poincaré de un sistema hamiltoniano. Por ejemplo, podemos imaginar esta aplicación como el resultado de fijar el nivel de energía en un sistema Hamiltoniano $H$ ($H(q,p) = h = cte.$) de dos grados de libertad (con lo que pasamos de un espacio de fases cuatridimensional a uno tridimensional), y efectuar luego una sección de Poincaré sobre el flujo (pasamos de tres dimensiones a dos). Nótese que ahora una condición inicial es un punto $(x_0, y_0)$ de $\mathbb{R}^2$, y que la órbita engendrada es el conjunto de puntos $\{T^{(n)}(x_0, y_0)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, obtenidos mediante la aplicación sucesiva de la función $T$. Al igual que en el caso continuo, el objetivo será describir, de la manera más completa posible, todas las trayectorias del sistema.

Evidentemente, la discusión para el caso de un difeomorfismo del plano puede verse como un caso particular del teorema KAM del apartado anterior, pero hemos preferido incluirla aquí para que el lector vea cómo se obtienen los mismos resultados trabajando con una aplicación en lugar de un flujo.

#### 6.1.1 Forma normal de un difeomorfismo

Consideremos un aplicación analítica $T$ definida en un entorno de $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ con valores sobre $\mathbb{R}^2$. Supongamos que $T$ es un aplicación conservativa (que preserva la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$, es decir, que el determinante de la matriz Jacobiana es uno),[8] y que $(0,0)$ es un punto fijo de $T$. En lo sucesivo, nos centraremos en el estudio de la dinámica alrededor de $(0,0)$.

Supongamos que los valores propios de la matriz Jacobiana de $T$ en el origen son una pareja de números complejos conjugados de módulo 1, es decir, que podemos escribirlos como $\exp(\pm\sqrt{-1}\alpha_0)$. Una implicación inmediata es que la dinámica inducida por la parte lineal de $T$ en $(0,0)$ es una rotación de ángulo $\alpha_0$. Nótese que esta es una dinámica "integrable", en el sentido que podemos describir fácilmente todas las órbitas del sistema: cada trayectoria tendrá lugar sobre un círculo centrado en el origen. Si el cociente $\alpha/(2\pi)$ es irracional, las órbitas serán densas sobre cada círculo invariante, mientras que si dicho cociente es racional las trayectorias serán periodicas.

Podemos preguntarnos como afectan los términos no lineales de $T$ a esta dinámica tan simple inducida por la parte lineal. Para ello, podemos intentar una serie de transformaciones de forma normal. No daremos los detalles, pero si una idea general del proceso (puede consultarse, por ejemplo, [50] para una descripción más detallada). En primer lugar, introducimos la notación compleja $z = x + \sqrt{-1}y$, $\lambda = \exp(+\sqrt{-1}\alpha_0)$. Expandiendo en serie obtenemos la siguiente representación para $T$:

$$T(z) = \lambda z + \sum_{k\geq 2}\sum_{j=0}^{k} a_{k-j,j}\, z^{k-j}\,\bar{z}^{j}, \tag{15}$$

donde $\bar{z}$ denota el conjugado de $z$. Ahora procederemos de manera similar a cuando calculábamos la forma normal de un hamiltoniano (ver Sección 4.1). Busquemos un cambio de variable de la forma

$$C_2(z) = \eta + b_{2,0}\eta^2 + b_{1,1}\eta\bar{\eta} + b_{0,2}\bar{\eta}^2.$$

Si imponemos que la aplicación $\hat{T}$ definida como

$$\hat{T}(\eta) = (C_2 \circ T \circ C_2^{-1})(\eta),$$

no tenga términos de segundo orden se obtiene que

$$b_{2,0} = \frac{a_{2,0}}{\lambda(\lambda-1)}, \quad b_{1,1} = \frac{a_{1,1}}{\lambda(\lambda^{-1}-1)}, \quad b_{0,2} = \frac{a_{0,2}}{\lambda(\lambda^{-3}-1)}.$$

[8] En dimensión dos, conservativo es equivalente a simpléctico. Esto no ocurre en dimensiones superiores.

Al igual que en el caso de la forma normal de un hamiltoniano, necesitamos imponer alguna condición que garantice que estos denominadores sean distintos de cero. Para simplificar la discusión, supondremos pues que $\lambda$ no es una raíz de la unidad (lo que equivale a suponer que $\alpha/(2\pi)$ es irracional). Esta condición nos asegura que los denominadores anteriores, así como los que aparecerán en lo sucesivo, son distintos de cero. Para simplificar la notación, renombraremos la aplicación transformada $\hat{T}$ como $T$.

Naturalmente, el proceso de forma normal no necesita pararse a segundo orden, sino que puede continuarse hasta órdenes tan elevados como se quiera. Puede verse que el cambio de variable necesario para eliminar los términos de grado $k$ viene dado por

$$b_{k-j,j} = \frac{a_{k-j,j}}{\lambda(\lambda^{k-1-2j} - 1)}, \qquad j = 0, 1, \ldots, k. \tag{16}$$

Los valores $a_{k-j,j}$ no son los valores que aparecen en la expansión inicial (15), sino los que aparecen en la expansión de $T$ una vez eliminados los términos de grado $k-1$. Es importante notar que hay unos términos con denominadores que son siempre cero: son los que tienen $k$ impar y $j = (k-1)/2$. Estos términos acostumbran a llamarse *resonancias inevitables* y son los análogos a las resonancias que aparecen en la forma normal de un hamiltoniano (corresponden a $k_x = k_y$ en (8)). Naturalmente, estos monomios están excluidos del cambio definido por (16), por lo que los correspondientes términos no serán eliminados de la expansión de $T$. Después de un número finito de cambios de variables, $T$ toma la forma

$$T(z) = \lambda z + a_{2,1} z^2 \bar{z} + a_{3,2} z^3 \bar{z}^2 + a_{4,3} z^4 \bar{z}^3 + \cdots + a_{s+1,s} z^{s+1} \bar{z}^s + O_{2s+2}.$$

Si usamos que $z\bar{z} = r^2$, podemos reescribir la aplicación anterior como

$$T(z) = e^{\sqrt{-1}(\alpha_0 + \alpha_1 r^2 + \alpha_2 r^4 + \cdots + \alpha_s r^{2s})} z + O_{2s+2}.$$

Puede probarse que los valores $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ son reales. Si despreciamos el resto $O_{2s+2}$ y nos quedamos sólo con la forma normal, obtenemos una aplicación con dinámica integrable: si la escribimos en coordenadas polares toma la forma

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \\ \theta + \omega(r) \end{pmatrix}, \tag{17}$$

donde $\omega(r) = \alpha_0 + \alpha_1 r^2 + \alpha_2 r^4 + \cdots + \alpha_s r^{2s}$. Las órbitas se encuentran sobre círculos invariantes, y el ángulo de rotación que define la dinámica sobre cada círculo depende del radio de éste. Las aplicaciones de este tipo son conocidas como *aplicaciones tipo twist*. Las aplicaciones de este tipo son, dentro de los sistemas discretos, el equivalente a los hamiltonianos integrables de los sistemas continuos.

### 6.1.2 Teorema del twist

Al igual que sucede con la forma normal de un hamiltoniano, la forma normal de un difeomorfismo conservativo del plano alrededor de un punto de equilibrio elíptico es generalmente divergente. La razón reside en el factor $\lambda^{k-1-2j} - 1$ que aparece en los denominadores de (16): como la sucesión $\{\lambda^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ llena densamente la circunferencia $|z| = 1$ del plano complejo, los valores $\lambda^{k-1-2j}$ pueden estar arbitrariamente cerca de 1, lo que impide la convergencia.

Enfoquemos ahora el problema desde un punto de vista ligeramente distinto. Consideremos el problema de estudiar la dinámica de una aplicación twist perturbada:

$$T_\varepsilon : \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r + \varepsilon u(r,\theta) \\ \theta + \omega(r) + \varepsilon v(r,\theta) \end{pmatrix}.$$

Naturalmente, asumimos que la aplicación $T_\varepsilon$ es conservativa. Nótese que la aplicación obtenida en la sección anterior (mediante un número finito de cambios de variable de forma normal) es de este tipo, donde las funciones $\varepsilon u$ y $\varepsilon v$ corresponden al resto $O_{2s+2}$. Supongamos además que $T_\varepsilon$ está definida para $r \in [a,b]$, $0 < a < b$, y que $\frac{d\omega}{dr}(r) > 0$ $\forall r \in [a,b]$ (esta última hipótesis acostumbra a llamarse *condición de no degeneración*).

Supongamos por el momento que $\varepsilon$ es cero. Tomemos un valor $\omega$ comprendido entre los valores $\omega(a)$ y $\omega(b)$. La cuestión ahora es saber que le ocurre al círculo invariante que tiene por número de rotación $\omega$ cuando $\varepsilon$ se hace distinto de cero. Si se verifica la *condición diofantina* (a veces también se le llama *condición de no resonancia*)

$$\left|\frac{\omega}{2\pi} - \frac{n}{m}\right| \geq \frac{c}{|m|^\gamma}, \quad \gamma > 2, \tag{18}$$

entonces, el *teorema del twist* afirma que, si $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0(\omega)$, existe una curva invariante de $T_\varepsilon$. Esta curva es difeomorfa a un círculo y puede, por tanto, ser parametrizada como

$$r = F(t,\varepsilon), \quad \theta = t + G(t,\varepsilon), \quad t \in [0,2\pi]. \tag{19}$$

Si a un punto de la curva le corresponde el valor $t_0$ según la parametrización anterior, su imagen por $T_\varepsilon$ puede obtenerse sustituyendo $t$ por $t_0 + \omega$ en (19). El valor $\omega$ se llama también *número de rotación* de la curva invariante.

La estructura del conjunto de curvas invariantes puede "visualizarse" mirando la estructura del conjunto de valores de $\omega$ que satisfacen (18). Llamemos $\Omega_{c,\gamma}$ a dicho conjunto. Puede mostrarse que $\Omega_{c,\gamma}$ es un conjunto de medida positiva, pero con interior vacio. A los conjuntos que poseen estas características se les acostumbra a llamar *conjuntos de Cantor*.

Una consecuencia importante de este teorema es la estabilidad del origen para una aplicación twist perturbada. Bajo las hipótesis anteriores, es facil probar que las curvas invariantes confinan las trayectorias cuya condición inicial está en su interior. Este resultado se extiende de manera natural a los puntos de equilibrio elípticos de sistemas hamiltonianos con dos grados de libertad.

# 7 Difusión

Supongamos que estamos interesados en conocer la dinámica alrededor de un punto de equilibrio elíptico de un hamiltoniano con $\ell > 2$ grados de libertad. En las secciones anteriores ya hemos visto que, alrededor de dicho punto, existe un conjunto de medida positiva (pero con interior vacio) completamente foliado por toros invariantes de dimensión $\ell$. Nos preguntamos ahora por la dinámica en el complementario de dicho conjunto. En particular, queremos saber si existen trayectorias que, partiendo de condiciones iniciales arbitrariamente próximas al punto de equilibrio, escapan a una distancia finita de dicho punto. Éste es el fenómeno conocido por *difusión*.

Las ideas y razonamientos que (por simplicidad) hemos efectuado alrededor de un punto de equilibrio elíptico pueden efectuarse alrededor de otros objetos invariantes, como órbitas periodicas y toros de cualquier dimensión. Tambien es posible acotar la difusión sobre ciertas regiones del espacio de fases.

Para más detalles sobre cómo acotar la velocidad de difusión remitimos al lector a las referencias [45], [20], [46], [40], [15] y [33]. Para resultados numéricos, ver [51], [10], [29], [31] y [34].

# 8 Problemas abiertos

Hay todavia muchas cuestiones por responder relacionadas con los temas anteriormente expuestos. Entre las más importantes podemos destacar las relativas a la difusión. A pesar de que está ampliamente aceptado que la difusión ocurre de manera genérica en sistemas casi integrables (esto fue conjeturado por V.I. Arnol'd en [3], y por ello se suele llamar a esta difusión *difusión de Arnol'd*), es muy difícil de detectar en ejemplos concretos. Seria interesante conocer, en los casos donde haya difusión, la estructura del conjunto de condiciones iniciales que dan lugar a trayectorias que escapan, así como estimaciones de su medida de Lebesgue y del tiempo de escape. Las demostraciones de existencia de difusión de Arnol'd están fuertemente ligadas a otro tema: la *escisión de separatrices*, del que no podemos hablar aquí por falta de tiempo. Para conocer el tema puede consultarse [23], [21], [16], [52], [12], [13] y [49]. En estos textos se encontrarán referencias adicionales.

Entre los problemas abiertos relacionados con la teoría KAM podemos citar los siguientes: en primer lugar, entender los mecanismos de rotura de toros de dimensión máxima en sistemas hamiltonianos con tres grados de libertad. Como se ha visto anteriormente, el teorema KAM garantiza la existencia de toros invariantes cuando la perturbación es lo bastante pequeña. El problema que planteamos aquí es la comprensión del mecanismo por el que se "rompe" el toro invariante cuando el tamaño de la perturbación crece. Otra serie de cuestiones importantes están relacionadas con la existencia de toros de dimensión baja. Uno de los problemas que planteamos aquí es el efecto de las resonancias entre frecuencias intrínsecas y frecuencias normales[9] sobre la existencia de toros de dimensión baja normalmente elípticos. Se trata de averiguar si estas frecuencias obstaculizan la existencia del toro, o bien sólo afectan a su reducibilidad. Si ocurre esto último, nos interesa entender además cómo es la dinámica alrededor del toro.

Finalmente, creo importante resaltar una fuente de problemas abiertos para los sistemas dinámicos: son los problemas motivados por aplicaciones concretas, provenientes de la física o la ingeniería. En el tema concreto que nos ocupa, un problema típico es el estudio del espacio de fases de un cierto sistema mecánico (ver, por ejemplo, el curso sobre Mecánica Celeste). Es habitual que muchos de los parámetros que aparecen en el modelo tengan valores fijados por lo que, a pesar de que el problema pueda ser una perturbación de un sistema integrable, no es un problema típico de teoría de perturbaciones: la perturbación no puede asumirse "lo bastante pequeña", ya que tiene un valor fijado. Ello añade a estos problemas una dificultad adicional que, en muchas ocasiones, obliga a modificar y adaptar la teoría al caso concreto. A pesar de que, debido a la falta de tiempo, no podemos mencionar ejemplos concretos, queremos insistir en la gran variedad de problemas abiertos que aparecen al intentar aplicar la teoría de los sistemas dinámicos en general, y de la mecánica hamiltoniana en particular, a problemas concretos del mundo real.

## Referencias y bibliografía

En esta sección hemos colocado las referencias citadas en el texto, así como otros textos que puedan ser de utilidad para personas interesadas en ampliar conocimientos sobre estos temas.


[1] Abraham R., Marsden J.: Foundations of Mechanics. Addison-Wesley (1978).

[2] Arnol'd V. I.: *Proof of a Theorem of A. N. Kolmogorov on the Persistence of Quasi-Periodic Motions under Small Perturbations of the Hamiltonian*, Russ. Math. Surveys, 18:5 (1963), pp. 9–36.

[3] Arnol'd V. I.: *Instability of Dynamical Systems with Several Degrees of Freedom*, Sov. Math. Dokl. 5:3 (1964), pp. 581–585. Contenido en [39].

[4] Arnol'd V.I.: Mecánica Clásica. Métodos Matemáticos. Paraninfo (1983).


[9]Es decir, suponemos que las únicas resonancias que tenemos se producen entre una combinación de frecuencias intrínsecas (estamos suponiendo que las frecuencias intrínsecas son diofantinas entre sí) y una combinación de frecuencias normales.

[5] Arnol'd V.I., Kozlov V.V., Neishtadt A.I: Dynamical Systems III. Springer-Verlag (1988).

[6] Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.M.: *A proof of Kolmogorov's theorem on invariant tori using canonical transformations defined by the Lie method*, Il Nuovo Cimento **79B:2**, pp. 201–223 (1984).

[7] Broer H. W., Huitema G. B. and Sevryuk M. B.: *Quasi-Periodic Motions in Families of Dynamical Systems: Order amidst Chaos*, Lecture Notes in Math., Vol. 1645, Springer 1996.

[8] Bruno A.: Local Methods in Nonlinear Differential Equations. Springer-Verlag (1989).

[9] Celletti A., Chierchia L.: *Construction of Analytic KAM Surfaces and Effective Stability Bounds*, Commun. Math. Phys. 118 (1988), pp 119–161.

[10] Celletti A., Giorgilli A.: "On the Stability of the Lagrangian Points in the Spatial Restricted Three Body Problem", *Celestial Mechanics*, **50** (1991), pp. 31–58.

[11] Delshams A., Gelfreich V., Jorba A., Seara T. M.: *Splitting of Separatrices for (fast) Quasiperiodic Forcing*, por aparecer en Hamiltonian Systems with Three or More Degrees of Freedom, C. Simó (Ed.), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. Kluwer, Dordrecht.

[12] Delshams A., Gelfreich V., Jorba A., Seara T. M.: *Exponentially Small Splitting of Separatrices under Fast Quasiperiodic Forcing*, por aparecer en Comm. Math. Phys.

[13] Delshams A., Gelfreich V., Jorba A., Seara T. M.: *Lower and Upper Bounds for the Splitting of Separatrices for the Pendulum under a Fast Quasiperiodic Forcing*, Electronic Research Anouncements of the AMS **3** (1997), pp. 1–10.

[14] Delshams A., Gutiérrez P.: *Effective Stability and KAM Theory*, J. Differential Equations, 128 (1996), pp. 415–490.

[15] Delshams A., Gutiérrez P.: *Estimates on Invariant Tori Near an Elliptic Equilibrium Point of a Hamiltonian System*, J. Diff. Eq. **131** (1996), pp. 277–303.

[16] Delshams A., Seara T.M.: *An Asymptotic Expression for the Splitting of Separatrices of the Rapidly Forced Pendulum*, Commun. Math. Phys. **150** (1992), pp. 433–463.

[17] Díez C., Jorba A., Simó: *A Dynamical Equivalent to the Equilateral Libration Points of the Earth-Moon System*, Cel. Mech., 50 (1991), pp. 13–29.

[18] Eliasson L. H.: *Perturbations of Stable Invariant Tori for Hamiltonian Systems*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., Ser. IV, 15:1 (1988), pp. 115–147.

[19] Fassò F.: *Lie series method for vector fields and Hamiltonian perturbation theory*, J. of Appl. Math. and Phys. (ZAMP) **41** (1990), pp. 843–864.

[20] Giorgilli A., Delshams A., Fontich E., Galgani L., Simó C.: *Effective Stability for a Hamiltonian System near an Elliptic Equilibrium Point, with an Application to the Restricted Three Body Problem*, J. Differential Equations, **77** no. 1 (1989), pp. 167–198.

[21] Guckenheimer J., Holmes P.: Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. Springer-Verlag (1983).

[22] Hofer H., Zehnder E.: Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics. Birkhäuser (1994).

[23] Holmes P., Marsden J.: *Melnikov's method and Arnol'd diffusion for perturbations of integrable Hamiltonian systems*, J. Math. Phys. **23** (1982), pp. 669–675. Contenido en [39].

[24] Jorba A.: *Reducibilidad Efectiva de Sistemas Lineales cuasiperiódicos*, Actas XII CEDYA, Universidad de Oviedo (1991), pp. 153–158.

[25] Jorba A., Llave R., Zou M.: *Lindstedt Series for Lower Dimensional Tori*, Hamiltonian Systems with Three or More Degrees of Freedom, C. Simó (Ed.), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. Held in S'Agaró, Spain, June 1995. Kluwer Acad. Publ. Dordrecht, Holland, por aparecer en 1997.

[26] Jorba A., Masdemont J.: *Nonlineal Dynamics in an Extended Neighbourhood of the Translunar Equilibrium Point*, por aparecer en Hamiltonian Systems with Three or More Degrees of Freedom, C. Simó (Ed.), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., Kluwer, Dordrecht, Holland, por aparecer en 1997.

[27] Jorba A., Ramírez-Ros R., Villanueva J.: *Effective Reducibility of Quasiperiodic Linear Equations close to Constant Coefficients*, SIAM Journal on Mathematical Analysis **28:1** (1997), pp. 178–188.

[28] Jorba A., Simó C.: *On the Reducibility of Linear Differential Equations with Quasiperiodic Coefficients*, Journal of Differential Equations, 98:1 (1992), pp. 111–124.

[29] Jorba A., Simó C.: *Effective Stability for Periodically Perturbed Hamiltonian Systems*, Hamiltonian Mechanics, Integrability and Chaotic Behaviour, J. Seimenis (Ed.), Plenum Press, New York (1994), pp. 245–252.

[30] Jorba A., Simó C.: *On Quasi-Periodic Perturbations of Elliptic Equilibrium Points*, SIAM Journal on Mathematical Analysis **27:6** (1996), pp. 1704–1737.

[31] Jorba A. and Villanueva J.: *Effective Stability Around Periodic Orbits of the Spatial RTBP*, Hamiltonian Systems with Three or More Degrees of Freedom, C. Simó (Ed.), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. Kluwer, Dordrecht, Holland (to appear).

[32] Jorba A., Villanueva J.: *On the Persistence of Lower Dimensional Invariant Tori under Quasiperiodic Perturbations.* Journal of Nonlinear Science (por aparecer).

[33] Jorba A., Villanueva J.: *On the Normal Behaviour of Partially Elliptic Lower Dimensional Tori of Hamiltonian Systems*, Nonlinearity (por aparecer).

[34] Jorba A., Villanueva J.: *Numerical Computation of Normal Forms around some Periodic Orbits of the Restricted Three Body Problem*, preprint (1997).

[35] Kolmogorov A.N.: *The General Theory of Dynamical Systems and Classical Mechanics*, Proc. of the 1954 Intern. Congress Math., pp. 315–333 (1957). Se encuentra incluido como apéndice en el libro [1].

[36] Llave R., Rana D.: *Accurate Strategies for Small Denominator problems*, Bull. Amer. Math. Soc. 22 (1990), pp. 85–90.

[37] Llave R., Rana D.: *Accurate Strategies in KAM Problems and their Implementation*, Computer Aided Proofs in Analysis, K. Meyer & D. Schmidt (Ed.), The IMA Volumes in Mathematics 28 (1991), pp. 127–146.

[38] Lochak P., Meunier C.: Multiphase Averaging for Classical Systems. Springer-Verlag (1988).

[39] MacKay R.S., Meiss J.D.: Hamiltonian Dynamical Systems. Adam Hilger (1987).

[40] Morbidelli A., Giorgilli A.: *Superexponential Stability of KAM Tori*, J. Statist. Phys. 78 (1995), pp. 1607–1617.

[41] Moser J.: *On Invariant Curves of Area-Preserving Mappings of an Annulus*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen: Math. Phys. Kl. II, pp. 1–20 (1962).

[42] Moser J.: *Convergent Series Expansions for Quasi-Periodic Motions*, Math. Annalen 169, pp. 136–176 (1967).

[43] Moser J.: *Lectures on Hamiltonian Systems.* Mem. Am. Math. Soc. 81, pp. 1–60 (1968). Contenido en [39].

[44] Moser J.: *Is the Solar System Stable?*, Math. Intelligencer 1, pp. 65–71 (1978). Contenido en [39].

[45] Nekhoroshev N.N.: *An Exponential Estimate of the Time of Stability of Nearly-Integrable Hamiltonian Systems*, Russ. Math. Surveys, 32 (1977), pp. 1–65.

[46] Perry A. D. y Wiggins S.: *KAM Tori are Very Sticky: Rigorous Lower Bounds on the Time to Move Away from an Invariant Lagrangian Torus with Linear Flow*, Physica D 71 (1994), pp. 102–121.

[47] Pöschel J.: *Integrability of Hamiltonian Systems on Cantor Sets*, Comm. Pure Appl. Math., 35 (1982), pp. 653–695.

[48] Rudnev M., Wiggins S.: *KAM Theory Near Multiplicity one Resonant Surfaces in Perturbations of a-Priori Stable Hamiltonian Systems*, preprint (1996).

[49] Rudnev M. and Wiggins S.: *Existence of Exponentially Small Separatrix Splittings and Homoclinic Connections Between Whiskered Tori in Weakly Hyperbolic Near-Integrable Hamiltonian Systems*, preprint (1997).

[50] Siegel C.L., Moser J.: Lectures on Celestial Mechanics. Springer-Verlag (1971).

[51] Simó C.: *Estabilitat de Sistemes Hamiltonians*, Memorias de la Real Academia de ciencias y Artes de Barcelona, 48 (1989), pp. 303–348.

[52] Simó C.: *Averaging under Fast Quasiperiodic Forcing*, J. Seimenis (Ed.), Hamiltonian Mechanics: Integrability and Chaotic Behaviour, Vol 331 of NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys., Plenum, New York (1994), pp. 13–34.

[53] Simó C.: *Effective computations in Hamiltonian Dynamics*, en Mécanique Céleste, Journée Annuelle de la Société Mathématique de France (1996).

[54] Simó C., Gómez G., Jorba A. and Masdemont J.: *The Bicircular Model Near the Triangular Libration Points of the RTBP*, From Newton to Chaos, Edited by A.E. Roy and B.A. Stevens, Plenum Press, New York (1995), pp. 343–370.