Anàlisi Harmònica

(Treball Acadèmicament Dirigit)

Realitzat per: Víctor Ortiz

Dirigit per: Javier Soria

Universitat de Barcelona. Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi

Curs 2005-2006

UNIVERSITAT DE BARCELONA

Índex

Introducció

Aquest treball pretén ser una primera aproximació a l'Anàlisi Harmònica, centrant-se en l'estudi de la teoria de Fourier. Consta de dos capítols, basats en les sèries i en la transformada de Fourier.

El primer capítol està dividit en 8 seccions. Les 5 primeres són de caire introductori: es defineixen els conceptes que es desenvoluparan i es donen les eines que s'aplicaran en el seu estudi. Les tres darreres són, potser, les més il·lustratives: es donen criteris de convergència de sèries de Fourier segons les característiques de les funcions de partida, s'estudia el Fenomen de Gibbs (concepte que es deixa obert en la primera secció), i es presenta el mètode de Separació de Variables per a resolució d'edp's, on s'empra bona part de la teoria explicada en la resta del capítol.

Els coneixements requerits per a aquesta part del treball són suaus. Per a seguir les set primeres seccions només cal estar familiarizat amb l'anàlisi multidimensional (en aquest sentit, [6] i [7] poden ser útils), mentres que per a la darrera part és molt recomanable dominar els conceptes bàsics de la teoria d'equacions diferencials (tot els possibles dubtes pertinents a aquest apartat venen explicats a [5]).

El segon capítol presenta el concepte de Transformada de Fourier i estudia l'aplicació que envia una funció a la seva transformada en els espais $L^1(\mathbb{R}^n)$ i $L^2(\mathbb{R}^n)$, així com en $L^p(\mathbb{R}^n)$, amb $1 < p < 2$, com a extensió natural dels casos anteriors.

Per a l'estudi d'aquest capítol, seran de gran ajuda tots els coneixements relatius a les funcions analítiques (amb especial atenció a la teoria de residus, que pot consultar-se a [8]), i d'integració multidimensional en general. També serà necessari el coneixement dels espais L^p (consultable a [10]), així com recomanable estar familiaritzat amb el treball amb normes.

Capítol 1

Introducció bàsica a les sèries de Fourier.

Aquest capítol està realitzat amb [10] com a guia. En els casos en què es faci referència a espais L^p, es suposarà $p \geq 1$ qualsevol a no ser que s'especifiqui el contrari.

1.1 Sèries de Fourier: Conceptes bàsics.

Definició 1.1.1. *(Polinomi trigonomètric) Un polinomi trigonomètric $p(t)$ és una expressió de la forma*

$$p(t) = \sum_{|j| \leq n} c_j e^{ijt},$$

on $c_n \neq 0$ o $c_{-n} \neq 0$ i, per tot j, $c_j \in \mathbb{C}$. Diem que n és el grau de p.

Òbviament, p és contínua (per ser combinació lineal de funcions contínues) de període 2π:

$$p(0) = \sum_{|j| \leq n} c_j = \sum_{|j| \leq n} c_j e^{(2\pi i)j} = p(2\pi).$$

Proposició 1.1.2. *Donat un polinomi trigonomètric p, les c_j satisfan:*

$$c_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(t) e^{-ijt} dt.$$

Demostració:
Tenint present que

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-j)t} dt = \begin{cases} \left[\dfrac{e^{i(k-j)t}}{i(k-j)} \right]_0^{2\pi} = \dfrac{e^{2\pi i(k-j)} - 1}{i(k-j)} = 0, \text{ si } k \neq j. \\ 2\pi, \text{ si } k = j, \end{cases}$$

és ben simple provar aquest resultat:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(t)e^{-ijt}dt &= \frac{1}{2\pi}\sum_{|k|\le n}\int_{-\pi}^{\pi} c_k e^{ikt}e^{-ijt}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{|k|\le n} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-j)t}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}2\pi c_j = c_j.\end{aligned}$$

□

Definició 1.1.3. *(Sèrie trigonomètrica)*
Anomenem sèrie trigonomètrica a una expressió de forma

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_j e^{ijt}.$$

Definició 1.1.4. *(Sèrie de Fourier) Una sèrie de Fourier és una sèrie trigonomètrica tal que existeix una funció f de període 2π integrable Lebesgue de manera que, per tot j,*

$$c_j = c_j(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(t)e^{-ijt}\,dt.$$

En aquest cas, diem que els c_j són els coeficients de Fourier d'f. Notem $f \approx \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{ijt}$.

Observació 1.1.5. *Veiem que $\forall j$ i per a tota funció f real, $\overline{c_{-j}(f)} = c_j(f)$:*

$$\begin{aligned} c_j(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ijt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos jt\,dt \\ &- \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin jt\,dt = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos jt\,dt} \\ &\overline{+\frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin jt\,dt} = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ijt}\,dt} = \overline{c_{-j}(f)}, \end{aligned}$$

emprant només que el cosinus és funció parell, el sinus senar, i f real.

Definició 1.1.6. *($s_n(f,t)$) Definim la sèrie n-èssima de Fourier d'una funció f com*

$$s_n(f,t) := \sum_{|j|\le n} c_j(f)e^{ijt},$$

on els $c_j(f)$ són els coeficients de Fourier de la funció f.

Observació 1.1.7. *En alguns casos, quan f és real, pot ser útil descomposar $s_n(f,t)$ en forma de sinus i cosinus:*

$$\begin{aligned}
s_n(f,t) = \sum_{|j|\leq n} c_j e^{ijt} &= \sum_{|j|\leq n} c_j(\cos jt + i\sin jt) \\
&= c_0 + \sum_{j=1}^{n}[c_j(\cos jt + i\sin jt) + c_{-j}(\cos jt - i\sin jt)] \\
&= c_0 + \sum_{j=1}^{n}[(c_j + c_{-j})\cos jt + i(c_j - c_{-j})\sin jt] \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n} a_j\cos jt + b_j \sin jt,
\end{aligned}$$

on:
$a_j = c_j + c_{-j} = c_j + \overline{c_j}$, *amb* $c_j \in \mathbb{C} \Rightarrow a = 2\Re(c_j) \in \mathbb{R}$.
$b_j = i(c_j - c_{-j}) = i(c_j - \overline{c_j})$, *amb* $c_j \in \mathbb{C} \Rightarrow b = 2\Im(c_j) \in \mathbb{R}$.

Notem que dividim a_0 per 2 perquè si no comptaríem dos cops la part real de c_0. Amb b_0 no tenim aquest problema, doncs aquest terme s'anul.la degut a que $\sin 0 = 0$.

Observació 1.1.8. *Si f és parell, aleshores, per tot j,*

$$c_j(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos jt\, dt.$$

Veiem-ho:

$$\begin{aligned}
c_j(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ijt}\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos jt\, dt - i\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin jt\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos jt\, dt - i\left(\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\sin jt\, dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(t)\sin jt\, dt\right) \\
&\underbrace{=}_{u=-t \text{ a la darrera}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos jt\, dt - i\left(\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\sin jt\, dt + -\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{0} f(-u)\sin(-ju)\, du\right) \\
&\underbrace{=}_{f \text{ parell, sin senar}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos jt\, dt - i\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\sin jt\, dt + -\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(u)\sin ju\, du\right)}_{=0} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos jt\, dt.
\end{aligned}$$

Anàlogament, si f és senar,

$$c_j(f) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin jt\, dt.$$

Teorema 1.1.9. *(Lebesgue) $\mathcal{P} := \{p \mid p$ polinomi trigonomètric$\}$ és complet en $L^1(\mathbb{T})$. És a dir, donada $g \in L^1(\mathbb{T})$, si per tot $p \in \mathcal{P}$,*

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(t)p(t)\,dt = 0,$$

aleshores $g \equiv 0$.

Demostració:
Per a fer la demostració d'aquest fet ens cal el següent resultat:

Lema 1.1.10. *Donat un interval $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [-\pi, \pi]$, $\exists \{p_j\}_j$ successió de polinomis trigonomètrics de forma que:*
(i) $p_j(t) \geq 0$ $\forall t \in I$.
(ii) $p_j(t) \overset{j\to\infty}{\to} \infty$ uniformement en un $J \subset\subset I$ (i.e. interior de J inclòs en adherència d'I).
(iii) p_j estan uniformement acotats en el complementari d'I.

Demostració:
Si $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, considerem la funció

$$t(x) := 1 + \cos(x - x_0) - \cos\delta,$$

i prenem, per tot n,

$$p_n(x) := (t(x))^n.$$

Veurem que aquesta successió de polinomis trigonomètrics compleix les tres parts del lema. D'entrada, observem que, per ser el cosinus una funció senar, tenim que $t(x_0-\delta) = t(x_0+\delta) = 1$.

(i) Es complirà si i només si $t(x) \geq 0$ per tot $x \in I$. Veiem-ho: per començar,

$$t'(x) = -\sin(x - x_0) = 0, \Leftrightarrow x - x_0 = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \Leftrightarrow x = x_0.$$

Amb això tenim que el punt $x = x_0$ és un màxim de la funció t, que assolirà els seus valors menors en els extrems de l'interval, és a dir, en $x = x_0 \pm \delta$. Però, si $x = x_0 \pm \delta$, $t(x) = 1 > 0$.

(ii) Sabem que $t(x_0) = 2 - \cos\delta \underbrace{>}_{\delta<\pi} 1$, de manera que, per continuitat, tenim un interval $J := [x_0 - \delta', x_0 + \delta'] \subset I$ on $t(x) > 1$ per tot $x \in J$. Això, unit al fet raonat previament que t assolirà el seu valor mínim en J en un dels seus extrems, ens dóna la convergència uniforme dels p_n's a ∞. De ser necessari, pot reduïr-se δ' per a poder garantir $J \subset\subset I$.

(iii) Obviament, en $[-\pi, \pi]$, t està acotada inferiorment per $-\cos\delta$, acotat en norma estrictament per 1. D'altra banda, per tot $x \in [\pi, x_0 - \delta] \cup [x_0 + \delta, \pi]$, $t(x) \leq 1$. Tot plegat ens dóna l'acotació cercada. $\square$

Comencem doncs la demostració del teorema:
Sigui $g \in L^1(\mathbb{T})$ de manera que per tot $p \in \mathcal{P}$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(t)p(t)\,dt = 0.$$

Com per qualsevol n tenim $p = \sum_{|j|\leq n} e^{ijt}$ polinomi trigonomètric, en particular tenim que, per tot j

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-ijt}\,dt = c_j(g) = 0.$$

És a dir, que tots els coeficients de Fourier de g són 0.
D'entrada, suposarem que g és contínua. Sigui $t_0 \in (-\pi,\pi)$ on g no s'anul.la, i siguin ε, $\delta > 0$ tq $|g(t)| > \varepsilon$ si $|t - t_0| < \delta$ (possible gràcies a la hipòtesi de continuitat). Suposarem que en aquest interval g és positiva (no perdem generalitat gràcies a la la simetria dels polinomis trigonomètrics).
Considerem $I := [t_0 - \delta,\ t_0 + \delta]$, i $\{p_j\}_j$ la successió de polinomis que compleixen les propitats del lema en I. Aleshores,

$$\begin{aligned} 0 \underbrace{=}_{\{p_j\}_j \subset \mathcal{P}} \int_{-\pi}^{\pi} g(t)p_j(t)\,dt &= \int_I g(t)p_j(t)\,dt + \underbrace{\int_{(-\pi,\pi)-I} g(t)p_j(t)\,dt}_{=:h_j,\text{ acotat per (iii) i per } g\in L^1(\mathbb{T})} \\ &\geq \varepsilon \min_{x\in J} p_j(t)|J| + h_j =: cm_j + h_j. \end{aligned}$$

La majoració és vàlida per ser $J \subset\subset I$. Així doncs, hem obtingut

$$cm_j + h_j \leq 0,$$

i també sabem que

$$m_j \overset{n\to\infty}{\to} \infty,$$

de manera que $h_j \leq -cm_j$, cosa que ens porta a dir que

$$h_j \to -\infty,$$

que és contradicció amb $\{h_j\}_j$ acotat uniformement en I. Amb això acaba la prova del teorema per a funcions contínues.
Provem ara el teorema per $g \in L^1(\mathbb{T})$ qualsevol:
Sigui

$$F(x) := \int_{-\pi}^{x} g(t)\,dt,$$

F és contínua, i per tot $j \neq 0$,

$$\begin{aligned}
c_j(F) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)e^{-ijt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{t} g(x)\,dx\right)e^{-ijt}\,dt \\
&\underbrace{=}_{\text{Fubini}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\left(\int_{x}^{\pi} e^{-ijt}\,dt\right)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\left[\frac{e^{-ijt}}{-ij}\right]_{x}^{\pi} dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\left(\frac{e^{-ijx}}{ij}+\frac{e^{-ij\pi}}{-ij}\right)dx \\
&= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\frac{e^{-ijx}}{ij}\,dx}_{=\frac{1}{ij}c_j(g)} + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\frac{e^{-ij\pi}}{-ij}\,dx}_{=\frac{e^{-ij\pi}}{-ij}c_0(g)=0} \\
&= \frac{c_j(g)}{ij} = 0.
\end{aligned}$$

Aleshores, si definim $G(t) := F(t) - c_0(F)$, clarament G és contínua, 2π-periòdica i tal que per tot j, $c_j(G) = 0$. Veiem això darrer:
Si $j \neq 0$,

$$c_j(j) \underbrace{=}_{c_j(F)=0} \frac{-c_0(F)}{2\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ijt}\,dt}_{=0} = 0.$$

Si $j = 0$,

$$c_0(G) = c_0(F) - c_0(F)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt = c_0(F) - c_0(F) = 0.$$

Aleshores, $G \in L^1(\mathbb{T})$ contínua amb tots els seus coeficients de Fourier iguals a 0, amb la qual cosa el resultat provat anteriorment ens diu que $G \equiv 0$, o, el que és el mateix:

$$F(t) \equiv c_0(F).$$

Veiem que això implica g(t)=0 g.p.t:

Lema 1.1.11. *$F(t) \equiv c_0(F)$ per tot $t \in [-\pi, \pi]$, aleshores g(t)=0 gairebé per tot t.*

Demostració:
La hipòtesi implica clarament que $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt = 0$ per tot $(a, b) \subset (-\pi, \pi)$, doncs, per qualsevol interval (a, b) donat, tenim:

$$\int_a^b g(t)\,dt = F(b) - F(a) = c_0(F) - c_0(F) = 0.$$

Tenint això present es prova aquest resultat:
Suposem (sense pèrdua de generalitat) que $g(t) > 0$ per tot $t \in I \subset (-\pi, \pi)$, amb $|I| > 0$. Sabem que existeix un $J \subset I$ interval tancat de mesura positiva. Aleshores,

$$\begin{aligned} 0 = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,dt &= \int_J g(t)\,dt + \int_{(-\pi,\pi)-J} g(t)\,dt \\ &= \int_J g(t)\,dt + \int_{\bigcup_j I_j} g(t)\,dt > \int_J g(t)\,dt + \sum_j \int_{I_j} g(t)\,dt = 0 \qquad !!! \end{aligned}$$

per ser tot integrals sobre intervals.
Notem que podem posar $(-\pi, \pi) - J$ com a unió numerable d'intervals oberts no disjunts, i que és el fet que no siguin disjunts el que ens dóna la desigualtat estricte que ens permet arribar a contradicció i provar el resultat. $\square$

Amb aquest fet demostrat, ja hem obtingut que $g(t) = 0$ g.p.t. t, amb la qual cosa el teorema queda vist per funcions $L^1(\mathbb{T})$ qualssevols. $\square$

Observació 1.1.12. *En particular, $\{e^{ik}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ és complet.*

L'anàlisi harmònica estudia les propietats de convergència de la sèrie $\displaystyle\sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_j e^{ijt}$ quan es verifica $f \approx \displaystyle\sum_j c_j e^{ijt}$. Notem que anem a estudiar, en particular, la convergència de les sèries de Fourier d'una funció f a dita funció. Donarem un parell d'exemples numèrics per ajudar-nos a creure en l'interés d'aquest estudi:

Exemple 1.1.13. *Observació de les aproximacions de les sèries de Fourier de la funció característica en $[-a, a]$; és a dir, la funció*

$$f_a(x) := \begin{cases} 1, & si\ x \in [-a, a]. \\ 0, & altrament. \end{cases}$$

Sabem que fixat un n,

$$s_n(f_a, t) = \sum_{|j|\le n} c_j(f_a) e^{ijt},$$

on

$$c_j(f_a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_a(t) e^{-ijt} dt.$$

Calculem doncs els $c_j(f_a)$'s:

- Si $j = 0$,

$$c_0(f_a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_a(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} dt = \frac{1}{2\pi} 2a = \frac{a}{\pi}.$$

- Si $j \neq 0$,

$$\begin{aligned}
c_0(f_a) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_a(t)e^{-ijt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} e^{-ijt}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-ijt}}{-ij}\right]_{-a}^{a} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{iaj}}{ij} - \frac{e^{iaj}}{ij}\right) \\
&= \frac{1}{\pi j}\left(\frac{e^{iaj} - e^{-iaj}}{2i}\right) = \frac{1}{\pi j}\sin aj.
\end{aligned}$$

Amb això ja podem donar el resultat cercat:

$$\begin{aligned}
s_n(f_a,t) &= \frac{a}{\pi} + \sum_{1\leq|j|\leq n} \frac{1}{\pi j}\sin aj\, e^{ijt} = \frac{a}{\pi} + \sum_{1\leq|j|\leq n} \frac{1}{\pi j}\sin aj(\cos jt + i\sin jt) \\
&= \frac{a}{\pi} + \sum_{1\leq|j|\leq n} \frac{1}{\pi j}\sin aj\cos jt + i\sin aj\sin jt \\
&= \frac{a}{\pi} + \sum_{1\leq|j|\leq n} \frac{1}{\pi j}\sin aj\cos jt + \sum_{1\leq|j|\leq n} \frac{i}{\pi j}\sin aj\sin jt \\
&= \frac{a}{\pi} + \sum_{1\leq|j|\leq n} \frac{1}{\pi j}\sin aj\cos jt,
\end{aligned}$$

doncs, per cada j,

$$\frac{1}{\pi j}\sin aj\sin jt = -\frac{1}{\pi(-j)}\sin a(-j)\sin(-j)t,$$

per ser el sinus una funció senar. A més, $\sin 0 = 0$.
Així doncs, concloem:

$$s_n(f_a,t) = \frac{a}{\pi} + \sum_{1\leq|j|\leq n} \frac{1}{\pi j}\sin aj\cos jt.$$

A continuació comparem la funció $f_{\pi/2}$ amb les seves sèries de Fourier n-èssimes per n=1, 5, i 50:

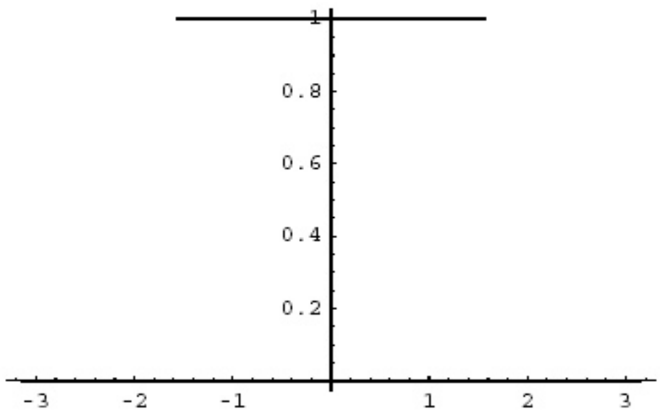

Figura 1.1: $f_{\pi/2}$.

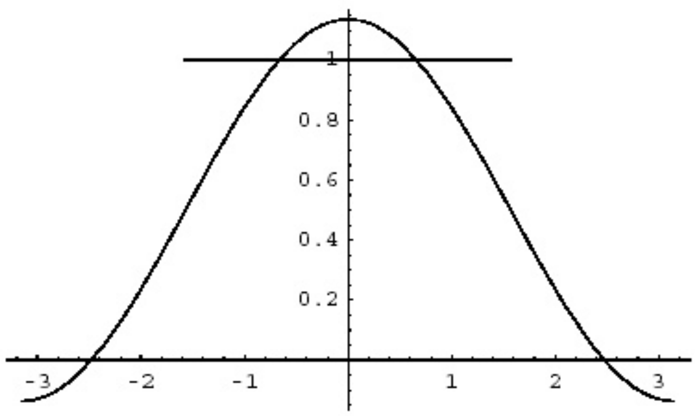

Figura 1.2: Superposició d'$f_{\pi/2}$ amb $s_1(f_{\pi/2}, t)$.

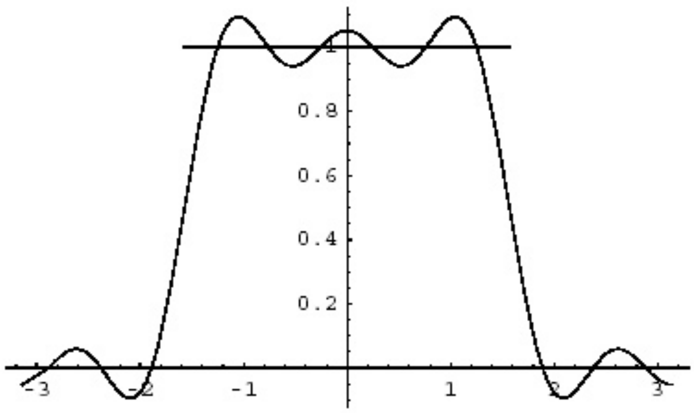

Figura 1.3: Superposició d'$f_{\pi/2}$ amb $s_5(f_{\pi/2}, t)$.

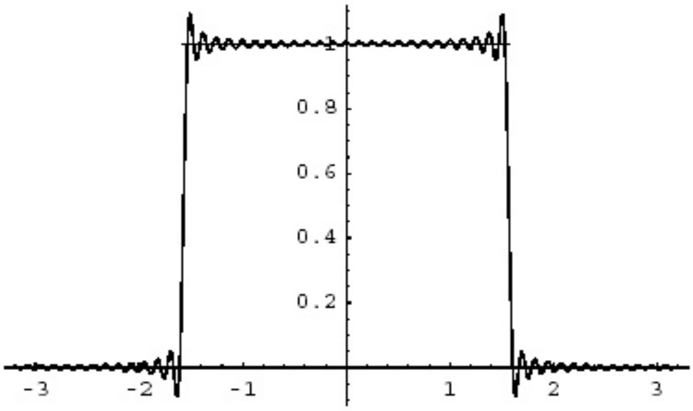

Figura 1.4: Superposició d'$f_{\pi/2}$ amb $s_{50}(f_{\pi/2}, t)$.

Exemple 1.1.14. *Observació de les aproximacions de les sèries de Fourier de la funció*

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi, & si\ x \in [-\pi, 0]. \\ \pi - x, & si\ x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Repetim el procés de l'exemple anterior:

- Si $j = 0$:

$$\begin{aligned}
c_0(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} t + \pi\, dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \pi - t\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\underbrace{\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-\pi}^{0}}_{-\pi^2/2} + \underbrace{[\pi t]_{-\pi}^{0}}_{\pi^2} + \underbrace{[\pi t]_{0}^{\pi}}_{\pi^2} - \underbrace{\left[\frac{t^2}{2}\right]_{0}^{\pi}}_{\pi^2/2}\right) \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

- Si $j \neq 0$:

$$\begin{aligned}
c_j(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ijt}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} te^{-ijt}dt + \underbrace{\int_{-\pi}^{0} \pi e^{-ijt}dt + \int_{0}^{\pi} \pi e^{-ijt}dt}_{=0} - \underbrace{\int_{0}^{\pi} te^{-ijt}dt}_{\text{canvi u=-t}}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} t(e^{-ijt} + e^{ijt})dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} t\cos jt\, dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\underbrace{\left[t\frac{\sin jt}{j}\right]_{-\pi}^{0}}_{=0} - \int_{-\pi}^{0} \frac{\sin jt}{j}dt\right) \\
&= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos jt}{j^2}\right]_{-\pi}^{0} = \begin{cases} 0, \text{ si } j \text{ és parell.} \\ \dfrac{2}{\pi j^2}, \text{ si } j \text{ és senar.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Així doncs,

$$\begin{aligned}
s_n(f,t) &= \frac{\pi}{2} + \sum_{1\leq |j| \leq n,\ j \text{ senar}} \frac{2}{\pi j^2}e^{-ijt} = \frac{\pi}{2} + \sum_{1\leq |j| \leq n,\ j \text{ senar}} \frac{2}{\pi j^2}(\cos jt + i\sin jt) \\
&= \frac{\pi}{2} + \sum_{1\leq |j| \leq n,\ j \text{ senar}} \frac{2}{\pi j^2}\cos jt + \sum_{1\leq |j| \leq n,\ j \text{ senar}} \frac{2i}{\pi j^2}\sin jt \\
&= \frac{\pi}{2} + \sum_{1\leq |j| \leq n,\ j \text{ senar}} \frac{2}{\pi j^2}\cos jt,
\end{aligned}$$

per ser, per tot j,

$$\frac{2i}{\pi j^2}\sin jt = -\frac{2i}{\pi(-j)^2}\sin(-j)t,$$

i $\sin 0 = 0$.

Així doncs,

$$s_n(f,t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{1\leq |j| \leq n,\ j \text{ senar}} \frac{2}{\pi j^2}\cos jt.$$

A continuació comparem la funció f amb les seves sèries de Fourier n-èssimes per n =1, 5, i 50 respectivament:

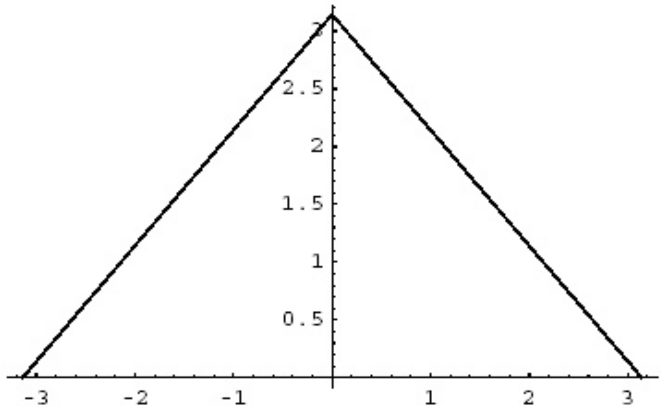

Figura 1.5: f.

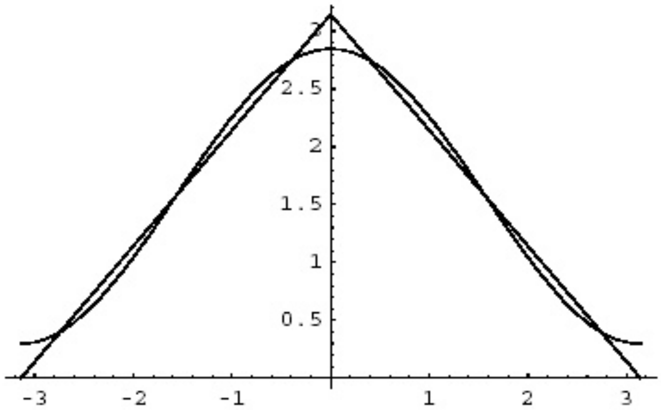

Figura 1.6: Superposició d'f amb $s_1(f,t)$.

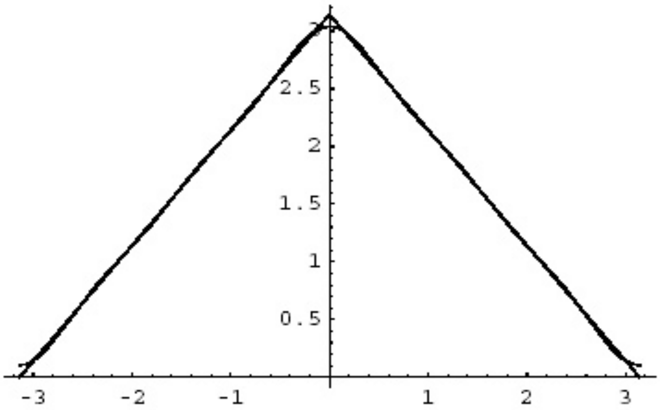

Figura 1.7: Superposició d'f amb $s_5(f,t)$.

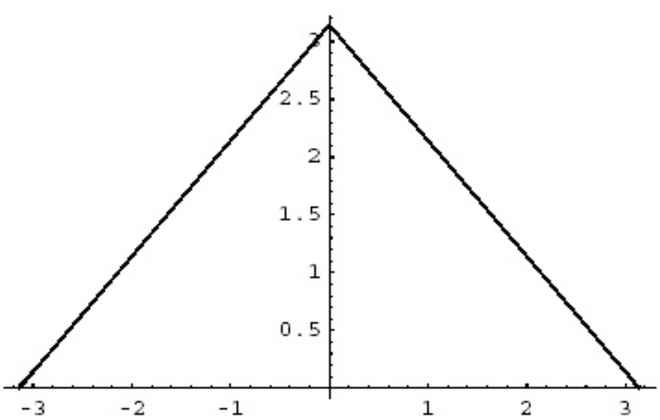

Figura 1.8: Superposició d'f amb $s_{50}(f,t)$.

Observació 1.1.15. *Els exemples fan pensar que l'aproximació d'una funció per les seves sèries de Fourier és molt bona en els intervals de continuitat, mentre que en els punts on la funció no sigui contínua ($\pm\pi/2$ en el primer exemple) fa l'efecte que arrossega un error que no podem evitar. En la secció 1.7 estudiarem aquest fet amb detall.*

Proposició 1.1.16. *Considerem la sèrie trigonomètrica (simètrica) $\sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} c_j e^{ijt}$. Si les seves sumes parcials $s_n(t)$ convergeixen en norma L^1 a $f \in L^1(\mathbb{T})$, aleshores $c_j = c_j(f)$.*

Demostració:
Tindrem present que

$$(f(t) - s_n(f,t))e^{-ijt} \xrightarrow{n} 0 \text{ en } L^1(\mathbb{T}),$$

ja que
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)-s_n(f,t)|\,dt \overset{n\to\infty}{\to} 0,$$
i que
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}s_n(f,t)e^{-ijt}\,dt = c_j \text{ (vist anteriorment).}$$
Així doncs:
$$\begin{aligned}c_j(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-ijt}\,dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(t)-s_n(f,t))e^{-ijt}\,dt \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}s_n(f,t)e^{-ijt}\,dt \overset{n\to\infty}{\to} c_j.\end{aligned}$$

□

Corol·lari 1.1.17. *Si f és contínua i $s_n(f,t)$ convergeix uniformement, aleshores*
$$\lim_{n\to\infty}s_n(f,t) = f(t)$$
per tot t.

Demostració:
Sigui $g_n(t) := s_n(f,t) = \sum_{|j|\leq n} c_j(f)e^{ijt}$. Com tenim convergència uniforme, que implica convergència integral, podem dir que $c_j(g) = c_j(f)$, per tot $j \leq n$, de manera que la funció $G(t) := \lim_{n\to\infty} g_n(t) - f(t)$ és contínua amb tots els coeficients de Fourier iguals a 0, i, pel Teorema de Lebesgue (1.1.9), és 0 en tot t. Això equival a dir que $g \equiv f$. □

Teorema 1.1.18. *(Riemann-Lebesgue) Sigui $f \in L^p(\mathbb{T})$. Aleshores, $c_j(f) \overset{|j|\to\infty}{\to} 0$*

Demostració:
Per a provar aquest teorema, emprarem el següent resultat:

Proposició 1.1.19. *Sigui $\mathcal{P} := \{$Polinomis trigonomètrics$\}$. Aleshores, $\mathcal{P}$ és dens en $L^p(\mathbb{T})$, per un p fixat.*

Demostració:
Aplicarem el Teorema de Stone-Weierstrass per veure $\mathcal{P}$ dens en $C(\mathbb{T})$. Necessitem provar que $\mathcal{P}$ és una subàlgebra que no s'anul.la en cap punt (és a dir, que no hi ha cap $x \in \mathbb{T}$ de forma que $\forall p \in \mathcal{P},\ p(x) = 0$), autoconjugada (que el conjugat de tot element de $\mathcal{P}$ és de $\mathcal{P}$) i que separa punts (que per tot $x, y \in \mathbb{T}$ diferents existeix un $p \in \mathcal{P}$ de forma que $p(x) \neq p(y)$). Comprovem-ho:

- Les propietats de subàlgebra són clares, doncs és obvi que la suma de polinomis trigonomètrics és polinomi trigonomètric, com també ho és el producte d'un polinomi trigonomètric per un escalar. El producte és també tancat en $\mathcal{P}$ gràcies a que el sistema trigonomètric és complet (resultat vist prèviament).

- Sabent que $p \equiv 1$ és polinomi trigonomètric (de coeficients nuls llevat de $c_0 = 1$), és clar que $\mathcal{P}$ no s'anul.la en cap punt.

- Donat
$$p(t) = \sum_{0 \leq |j| \leq n} c_j e^{ijt},$$
tenim
$$\overline{p}(t) = \overline{\sum_{0 \leq |j| \leq n} c_j e^{ijt}} = \sum_{0 \leq |j| \leq n} \overline{c_j} e^{-ijt} = \sum_{0 \leq |j| \leq n} \overline{c_{-j}} e^{ijt}.$$
Com els c_j són constants complexes, els $\overline{c_{-j}}$ també ho són i $\overline{p} \in \mathcal{P}$.

- La separació de punts es veu prenent
$$p_1(t) := \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \in \mathcal{P}, \qquad p_2(t) := \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \in \mathcal{P}.$$
Aleshores, prenent x, $y \in [-\pi, \pi]$, tenim:
$$\begin{cases} p_1(x) = p_1(y) \Leftrightarrow x = -y. \\ p_2(x) = p_2(y) \Leftrightarrow x = \pi - y. \end{cases}$$
Si provem de trobar un parell de punts en $[-\pi, \pi]$ que compleixin les dues condicions alhora, tenim:
$$x = -y = x - \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2},\ y = \frac{-\pi}{2}.$$
Només cal que ara prenguem $p_3(t) := e^{it} \in \mathcal{P}$ per veure que
$$p_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = i \neq -i = p_3\left(\frac{-\pi}{2}\right),$$
i que per tant $\mathcal{P}$ separa punts.

Amb tot plegat, podem aplicar Stone-Weierstrass i concloure que $\mathcal{P}$ dens en $C(\mathbb{T})$.
Feta aquesta prèvia, demostrem el resultat:
Considerem una funció $f \in L^p(\mathbb{T})$, que podem suposar real ($f := \Re(f) + i\Im(f)$ funcions reals) positiva ($f = |f|^+ - |f|^-$, funcions positives). Podem aproximar f per una suma de funcions característiques amb un error tan petit com volguem. Veiem-ho:
Construïm la successió $\{f_n\}_n$ tal que, per tot n
$$f_n := \sum_{0 \leq i < n} \varsigma_{(-\pi + i\frac{2\pi}{n}, -\pi + (i+1)\frac{2\pi}{n})}$$
on
$$\varsigma_{(a,b)} := \min_{t \in [a,b]} f(t)$$

(Si f presenta punts de discontinuïtat, podem adaptar-hi els intervals de definició de les ς, amb la qual cosa això no és cap problema) En particular, les χ's són una constant per una funció característica. És clar que

$$\lim_n f_n = f.$$

Per tant, si podem veure que les funcions característiques $\chi_{(a,b)}$ en un interval (a,b) són aproximables per polinomis trigonomètrics haurem enllestit. Arribats aquí, notem que per tot (a,b), $\chi_(a,b)$ és el límit de la successió $\{g_i\}_i \subset C(T)$, on cadascun dels seus elements es defineix així:

$$g_n(t) := \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq a - \dfrac{1}{n} \text{ o } t \geq b + \dfrac{1}{n}. \\ \\ 1 \text{ si } a + \dfrac{1}{n} \leq t \leq b - \dfrac{1}{n}. \\ \\ \dfrac{2}{n}(t-a) \text{ si } a - \dfrac{1}{n} \leq t \leq a + \dfrac{1}{n}. \\ \\ \dfrac{2}{n}(b-t) \text{ si } b - \dfrac{1}{n} \leq t \leq b + \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

Clarament $\lim_n g_n = \chi_{(a,b)}$, amb g_n contínues en $(a,b) \subset \mathbb{T}$. Finalment, el fet que $\mathcal{P}$ sigui dens en $C(\mathbb{T})$ fa que podem aproximar aquestes g_n's, i per tant qualsevol funció característica, per polinomis trigonomètrics, la qual cosa demostra el resultat cercat. $\square$

Vist això, podem veure el teorema:
Sigui un $\varepsilon > 0$. Veurem que $\exists n_0$ de manera que, $\forall j > n_0$, $|c_j(f)| < \varepsilon$. Sigui P un polinomi trigonomètric tal que $\|f - P\|_1 < \varepsilon$, i n_0 el seu grau. Així, si $|j| > n_0$, tenim, d'una banda,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(t)e^{ijt}dt = c_j(P) = 0, \text{ doncs } j > n_0 = \text{grau de } P,$$

i, de l'altra,

$$\begin{aligned} c_j(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ijt}dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ijt}dt - \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(t)e^{ijt}dt}_{=0} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - P(t))e^{ijt}dt. \end{aligned}$$

Així,

$$\begin{aligned} |c_j(f)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - P(t)|\underbrace{|e^{ijt}|}_{=1}dt \\ &= \|f - P\|_1 \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

amb la qual cosa el teorema queda provat. $\square$

1.2 Nucli de Dirichlet

Considerem

$$\begin{aligned} s_n(f,x) &= \sum_{|j|\le n} c_j e^{ijt} = \sum_{|j|\le n} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ijt}\,dt\,e^{ijx} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\underbrace{\left(\frac{1}{2}\sum_{|j|\le n} e^{ij(x-t)}\right)}_{=:D_n(x-t)}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt. \end{aligned}$$

Definició 1.2.1. *Amb les notacions anteriors, anomenem nucli de Dirichlet a*

$$D_n(t) := \frac{1}{2}\sum_{|j|\le n} e^{ijt}.$$

Veiem algunes propietats de $D_n(t)$:

Proposició 1.2.2. *Es té:*

- $D_n(t) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin(n+1/2)t}{\sin t/2}$.

  Veiem-ho:

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{1}{2}\sum_{|j|\le n} e^{ijt} = \frac{1}{2}e^{-int}\frac{e^{i(2n+1)t}-1}{e^{it}-1} = \frac{1}{2}\frac{e^{i(n+1)t}-e^{-int}}{e^{it/2}\left(e^{it/2}-e^{-it/2}\right)} \\ &\underbrace{=}_{\text{treiem } e^{-it/2} \text{ a tot arreu}} \frac{1}{2}\frac{e^{(n+1/2)t}-e^{-i(n+1/2)t}}{e^{it/2}-e^{-it/2}} = \frac{1}{2}\frac{\sin(n+1/2)t}{\sin t/2}. \end{aligned}$$

- $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = \dfrac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(t)dt = 1.$

  La primera igualtat és clara per simetria:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{0} \frac{\sin(n+1/2)t}{t/2}dt &\underbrace{=}_{x=-t} \int_{\pi}^{0} -\frac{\sin(n+1/2)x}{x/2}dx \\ &= \int_{0}^{\pi} \frac{\sin(n+1/2)x}{x/2}dx. \end{aligned}$$

  Per a la segona, només cal tenir present que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ixt}dt = \begin{cases} 0, & \text{si } x \ne 0. \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- $|D_n(t)| \leq n + 1/2$.

  Comprovació:
$$|D_n(t)| \leq |\frac{1}{2}\sum_{|j|\leq n} e^{ijt}| = \frac{1}{2}\sum_{|j|\leq n} |e^{ijt}|$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{|j|\leq n} 1 = \frac{1}{2}(2n+1) = n + \frac{1}{2}.$$

- $|D_n(t)| \leq \dfrac{\pi}{2|t|}$ per $0 < t < \pi$.

  Directe d'aplicar que $\sin{(n+1/2)t}$ està acotat per 1 i que $\dfrac{1}{2\sin t/2} \leq \dfrac{\pi}{2|t|}$ en l'interval considerat. Veiem això darrer: El resultat serà cert si i només si es compleix $h(t) := \dfrac{t}{\sin t/2} \leq \pi$ en $0 < t < \pi$.
  La derivada d'h és $\dfrac{\sin t/2 - t/2\cos t/2}{(\sin t/2)^2}$. El seu signe serà el del numerador.
  Considerem $f(x) := \sin x - x\cos x$, que s'anul.la en el 0. La seva derivada és $\cos x - \cos x - x\sin x = x\sin x$, que és positiva en $[0,\pi]$. Així doncs, 0 és un mínim d'f en l'interval, i, com $f(0) = 0$, tenim $f > 0$ en $0 < t < \pi$. Tot això ens porta a dir que l'expressió inicial té derivada positiva, i per tant és creixent. Així, $\forall t \in [0,\pi]$, $\dfrac{t}{\sin t/2} \leq \dfrac{\pi}{\sin \pi/2} = \pi$, i el resultat queda provat.

Definició 1.2.3. *(D_n^* :) Per a afavorir la notació, donat n, definim el nuci de Dirichlet modificat, com*
$$D_n^*(t) = \frac{D_n(t) + D_{n-1}(t)}{2}.$$

Proposició 1.2.4. *Es té:*

- $D_n^*(t) = \dfrac{\sin nt}{2\tan t/2}$:
$$\begin{aligned} D_n^*(t) &= \frac{D_n(t) + D_{n-1}(t)}{2} \\ &= \frac{\sin{(n-1/2)t} + \sin{(n+1/2)t}}{4\sin t/2} \\ &= \frac{\sin nt\cos{(-t/2)} - \sin t/2\cos nt + \sin nt\cos t/2 - \sin t/2\cos nt}{4\sin t/2} \\ &= \frac{\sin nt}{2\tan t/2}. \end{aligned}$$

- $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_n^*(t)dt = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} D_n^*(t)dt.$

  És clar a partir de la definició de D_n^* i del resultat homòleg per D_n.

- $|D_n^*(t)| \leq n$.

$$|D_n^*(t)| \leq \frac{|D_n(t)| + |D_{n-1}(t)|}{2} \leq \frac{2n}{2} = n.$$

- $|D_n^*(t)| \leq \dfrac{\pi}{2|t|}$.

  És clar a partir de la definició de D_n^* i del resultat homòleg per D_n.

- $D_n(t) - D_n^*(t) = \dfrac{\cos nt}{2}$:

$$\begin{aligned} D_n(t) - D_n^*(t) &= \frac{D_n(t) - D_{n-1}(t)}{2} \\ &= \frac{1}{4}\Big(\sum_{|j|\leq n} e^{ijt} - \sum_{|j|\leq n-1} e^{ijt}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\frac{e^{int} + e^{-int}}{2} \\ &= \frac{\cos nt}{2}. \end{aligned}$$

  Emprant aquesta darrera propietat, podem dir:

$$s_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt = \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n^*(x-t)dt}_{=:s_n^*(f,x)} + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos n(x-t)dt}_{=:A_n}.$$

Anomenem A_n terme d'error.

Proposició 1.2.5. $A_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

Demostració:
Aplicant la fòrmula del cosinus d'una suma:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos n(x-t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\cos nx \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt + \frac{1}{2\pi}\sin nx \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt. \end{aligned}$$

Les integrals tendeixen a 0 com a aplicació del Teorema de Riemann-Lebesgue, que podem emprar perquè $f \in L^1(\mathbb{T})$ i perquè les funcions per les que es multiplica les integrals (sinus i cosinus) poden majorar-se per 1. Així doncs, $s_n(f,x) = s_n^*(f,x) + o(1)$. □

Proposició 1.2.6. *També és cert que*

$$s_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin n(x-t)}{x-t}dt + o(1).$$

Demostració:
Definim la funció $h(t) := \dfrac{1}{2\tan t/2} - \dfrac{1}{t}$. Clarament $h \in L^\infty(\mathbb{T})$ (pot veure's emprant L'Hôpital en el 0).

Aleshores, substituïnt D_n^* per $\dfrac{\sin n(x-t)}{2\tan\frac{x-t}{2}}$,

$$\begin{aligned}
s_n(f,x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin n(x-t)}{2\tan\frac{x-t}{2}\,dt} + o(1)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(h(x-t) - \frac{1}{x-t}\right)\sin x - t\,dt + o(1)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin n(x-t)}{x-t}dt + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)h(x-t)\sin(x-t)dt}_{=:I_n} + o(1).
\end{aligned}$$

Si considerem $g_x(t) = f(t)h(x-t)$, $g \in L^1(\mathbb{T})$ (per ser-ho f i estar h acotat), i, per Riemann-Lebesgue,

$$I_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_x(t)\sin(x-t)dt \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

□

Proposició 1.2.7. $s_n^*(f,x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}D_n^*(t)dt.$

Demostració:
Sabem que

$$s_n^*(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n^*(x-t)dt.$$

D'altra banda,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}D_n^*(x-t)dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n^*(x-t)dt\\
&+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n^*(x-t)dt,
\end{aligned}$$

però, emprant f periòdica, D_n^* parell:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n^*(t)dt \underbrace{=}_{u\equiv x+t} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)D_n^*(u-x)dt\\
= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)D_n^*(x-u)dt,
\end{aligned}$$

també, emprant f periòdica:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n^*(t)dt \underbrace{=}_{u\equiv x-t} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)D_n^*(x-u)dt.$$

Així doncs,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}D_n^*(x-t)dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)D_n^*(x-u)dt\\ &+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)D_n^*(x-u)dt\\ &=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)D_n^*(x-u)dt.\end{aligned}$$

Finalment, el ser $D_n^*(t)$ parell fa que l'expressió sigui equivalent a

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x+t)+f(x-t))D_n^*(t)dt.$$

$\square$

Definició 1.2.8. *(α_n, β_n) A partir d'ara, notarem, fixat n,*

$$\alpha_n(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^x D_n(t)\,dt,\ \ i\ \beta_n(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^x D_n^*(t)\,dt.$$

Observació 1.2.9. *En particular, hem vist que* $\lim_{n\to\infty}\|\alpha_n-\beta_n\|_\infty=0.$

Amb tots aquests resultats, estem llestos per a començar a estudiar la convergència d'algunes sèries de Fourier.

Teorema 1.2.10. *(Teorema de Dini) Sigui $f\in L^1(\mathbb{T})$ tal que existeix una constant A de forma que per una x de $\mathbb{T}$ es té*

$$\int_0^{\pi}\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-A\right|\frac{dt}{t}<\infty.$$

Aleshores $\lim_{n\to\infty}s_n(f,x)=A.$

Demostració:
Per començar, veiem que $\lim_{t\to 0}\dfrac{t}{2\tan(t/2)}=1/2$:

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{2\tan(t/2)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2\cos^2(t/2)}=1/2.$$

Això ens diu que l'acotació suposada implica que

$$g_x(t):=\left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-A\right)\frac{1}{2\tan t/2},$$

és de $L^1(\mathbb{T})$.
Ja sabem que és equivalent provar el resultat per a $s_n^*(f,x)$. D'altra banda, tenint present que

$D_n^*(t) = \dfrac{\sin nt}{2\tan t/2}$ i que $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi D_n^*(t)\,dt = 1$,

$$\begin{aligned} s_n^*(f,x) - A &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} D_n^*(t)\,dt - A \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - A\right) \frac{\sin nt}{2\tan t/2}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_x(t)\sin nt\,dt. \end{aligned}$$

Però $g_x(t) \in L^1(\mathbb{T})$, de manera que $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g_x(t)\sin nt\,dt$ és un coeficient sinus de Fourier de la funció g_x, i, per Riemann-Lebesgue tendeix a 0 en n. Així doncs, hem obtingut que $\lim_{n\to\infty} s_n^*(x,t) - A = 0$, amb la qual cosa el teorema queda provat. □

Definició 1.2.11. *(L^p-mòdul de continuitat d'una funció f) Donada una funció $f \in L^p(\mathbb{T})$, i un punt x, diem que*

$$w_p(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(t)|^p\,dt$$

és el L^p-mòdul de continuitat d'f.

Teorema 1.2.12. *(Marcinkiewicz) Sigui $f \in L^1(\mathbb{T})$. Aleshores, si*

$$\int_0^\pi w_1(f,t)\frac{dt}{t} < \infty,$$

es té que $\lim_{n\to\infty} s_n(f,x) = f(x)$ gairebé per tot en $\mathbb{T}$.

Demostració:

Considerem

$$I(x) := \int_0^\pi |f(x+t) - f(x)|\,\frac{dt}{t}.$$

Clarament $I(x) \geq 0$. Aleshores,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} I(x)dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^\pi |f(x+t)-f(x)|\,\frac{dt}{t}\right)dx \\ &\underbrace{=}_{Tonelli} \int_0^\pi \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)-f(x)|\,dx\right)\frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\pi w_1(f,t)\frac{dt}{t} < \infty. \end{aligned}$$

Això ens diu que $I(x) < \infty$ g.p.t. en $\mathbb{T}$. Amb un raonament anàleg,

$$J(x) := \int_0^\pi |f(x-t) - f(x)|\,\frac{dt}{t} < \infty \quad \text{q.p.t. en } \mathbb{T}.$$

Finalment,

$$\int_0^\pi |f(x+t)+f(x-t)-2f(x)| \frac{dt}{t} \le \underbrace{\int_0^\pi |f(x+t)-f(x)| \frac{dt}{t}}_{=I(x)<\infty} + \underbrace{\int_0^\pi |f(x-t)-f(x)| \frac{dt}{t}}_{=J(x)<\infty} < \infty,$$

de manera que

$$\int_0^\pi \left| \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - f(x) \right| \frac{dt}{t} < \infty,$$

i podem aplicar el Teorema de Dini amb $A = f(x)$, amb la qual cosa concloem $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(f,x) = f(x)$ i provem el teorema. $\square$

Lema 1.2.13. *Sigui $f \in L^1(\mathbb{T})$, $g \in L^\infty(\mathbb{T})$ i $x \in [-\pi, \pi]$. Definim*

$$h(t) := h_x(t) = f(x+t)g(t).$$

Aleshores,

$$c_j(h_x) \overset{|j|\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

uniformement en x.

Demostració:
Per començar, veiem que $|c_j(h_x)| \le c w_1\left(h, \frac{\pi}{|j|}\right)$:

$$\begin{aligned}
w_1\left(h, \frac{\pi}{|j|}\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| h\left(\frac{\pi}{|j|} + t\right) - h(t) \right| dt \\
&\ge \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \left(h\left(\frac{\pi}{|j|} + t\right) - h(t) \right) e^{-ijt}\, dt \right| \\
&= \left| -c_j(h_x) + \int_{-\pi}^{\pi} h\left(\frac{\pi}{|j|} + t\right) e^{-ijt}\, dt \right| \\
&\underbrace{=}_{u=\frac{\pi}{|j|}+t} \left| -c_j(h_x) + \int_{-\pi}^{\pi} h(u) e^{ij\frac{\pi}{|j|}x} e^{-iju}\, du \right| \\
&= \left| -c_j(h_x) + e^{ij\frac{\pi}{|j|}} c_j(h_x) \right| = \underbrace{\left| 1 - e^{-ij\frac{\pi}{|j|}} \right|}_{=:c} |c_j(h_x)|.
\end{aligned}$$

Vist això, n'hi ha prou amb veure que $w_1(h_x,\delta) \overset{\delta\to 0}{\to}$ uniformement en x. Comprovem-ho:

$$\begin{aligned}
2\pi w_1(h_x,s) &\le \int_{-\pi}^{\pi} |h_x(t+s)-h(t)|\ dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+s)g(t+s)-f(x+t)g(t)|\ dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+s)g(t+s)-f(x+t)g(t+s)+f(x+t)g(t+s)-f(x+t)g(t)|\ dt \\
&\le \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} |(f(x+t+s)-f(x+t))g(t+s)|\,dt}_{=:A} + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)(g(t+s)-g(t))|\,dt}_{=:B}.
\end{aligned}$$

D'una banda, com $g\in L^\infty(\mathbb{T})$, si $|s|<\delta$, podem dir que

$$A \le \|g\|_\infty\, w_1(f,\delta) \overset{\delta\to 0}{\to} 0,$$

degut a que $f\in L^1(\mathbb{T})$, cosa que provoca que $w_1(f,\delta)$ estigui acotada, de manera que

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t+\delta)-f(t)|\,dt \underbrace{=}_{\text{convergència dominada}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\lim_{\delta\to 0}|f(t+\delta)-f(t)|\,dt = 0.$$

D'altra banda, per veure que B també convergeix a 0, fixem un $\varepsilon>0$ qualsevol, i prenem una funció $f_1\in\mathcal{C}(\mathbb{T})$ de manera que

$$\|f-f_1\|_1 \le \frac{\varepsilon}{\|g\|_\infty}.$$

(Sabem que existeix gràcies la densitat de les funcions contínues sobre les funcions $L^1(\mathbb{T})$, estudiada en la secció anterior (1.1.9)). Prenem $f_2 := f-f_1$. Aleshores,

$$\begin{aligned}
B &\le \int_{-\pi}^{\pi}|f_1(x+t)||g(t+s)-g(t)|\,dt + \int_{-\pi}^{\pi}|f_2(x+t)||g(t+s)-g(t)|\,dt \\
&\le \underbrace{\|f_1\|_\infty\, w_1(g,\delta)}_{\overset{\delta\to 0}{\to}0 \text{ com abans}} + \underbrace{2\,\|g\|_\infty\,\|f_2\|_1}_{\le 2\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Així doncs, la integral inicial que majorava $|c_j(h_x)|$ convergeix a 0 amb δ, i per tant el lema queda provat. $\square$

Teorema 1.2.14. *(Pricipi de localització:) Si f s'anul.la en un interval $I\subset[-\pi,\pi]$ aleshores $s_n(f,t)\overset{n}{\to}0$ uniformement en tot subinterval $J\subset\subset I$.*

Demostració:
Sigui $x\in J$. Aleshores, per tot $\delta>|t|$ de manera que $(x-\delta,x+\delta)\subset J$,

$$\phi_x(t) := f(x+t)-f(x-t) = 0,$$

amb la qual cosa podem aplicar el Teorema de Dini amb $A = 0$ i concloure que

$$\lim_n s_n(f, x) = f(x),$$

per tot x. Resta encara veure que la convergència és uniforme, cosa que farem emprant el lema anterior:
Donat δ com abans, definim

$$h(t) := \begin{cases} 0, & si\ |t| < \delta. \\ 1, & si\ \pi \geq |t| \geq \delta. \end{cases}$$

Aleshores, si $x \in J$,

$$\begin{aligned} s_n^*(f, x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n^*(x-t)\, dt \underbrace{=}_{u=x-t} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) D_n^*(u)\, du \\ &\underbrace{=}_{s=-u} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+s) D_n^*(s)\, ds = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+s) \frac{\sin ns}{2\tan s/2}\, ds \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+s)\, \underbrace{\frac{h(s)}{2\tan s/2}}_{:=g(s)} \sin ns\, ds = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+s) g(s) \sin ns\, ds, \end{aligned}$$

que és la part imaginària de

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+s) g(s) e^{ijt}\, ds,$$

que sabem igual a 0 si $g \in L^\infty(\mathbb{T})$. Això, però, és trivial, doncs l'únic 0 de $\tan \pi/2$ en $[-\pi, \pi]$ és en $t = 0$, però en aquest valor de t g és 0 per definició d'h, amb la qual cosa el lema és aplicable i obtenim la convergència uniforme. □

Enllestida la teoria corresponent al nucli de Dirichlet, procedirem a donar-ne exemples gràfics per a diferents valors n.

Exemple 1.2.15. *Representacions gràfiques del nucli de Dirichlet per a diferents n's:*

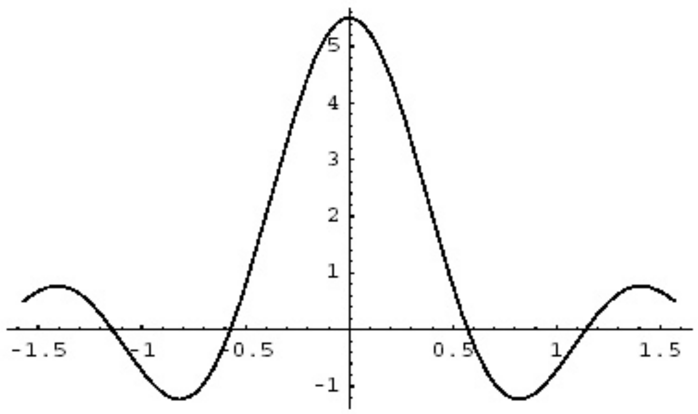

Figura 1.9: $D_5(t)$.

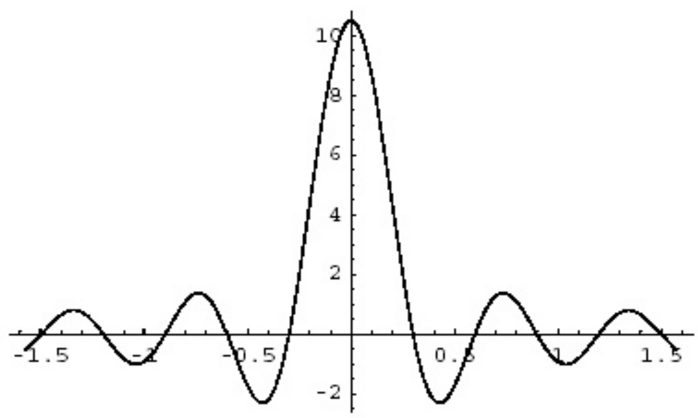

Figura 1.10: $D_{10}(t)$.

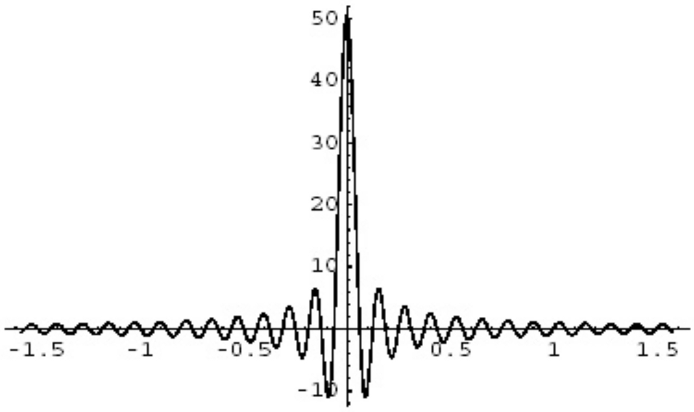

Figura 1.11: $D_{50}(t)$.

1.3 Propietats bàsiques de les sèries de Fourier.

Proposició 1.3.1. *Siguin $f, g \in L^p(\mathbb{T})$, h constant. Aleshores:*

- $c_j(f + h\overline{g}) = c_j f + h\overline{c_{-j}(g)}$:

$$\begin{aligned} c_j(f + h\overline{g}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-pi}^{\pi}(f + h\overline{g})(t)e^{-ijt}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-pi}^{\pi} f(t)e^{-ijt}dt + \frac{h}{2\pi}\int_{-pi}^{\pi}\overline{g(t)}e^{-ijt}dt \\ &= c_j + \frac{h}{2\pi}\overline{\int_{-pi}^{\pi} g(t)e^{ijt}dt} = c_j + h\overline{c_{-j}(g)}. \end{aligned}$$

- Sigui $f_h(t) = f(t + h)$. Aleshores, $c_j(f_h) = c_j(f)e^{ijh}$:

$$\begin{aligned} c_j(f_h) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t + h)e^{-ijt}dt \underbrace{=}_{u=t+h} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-ij(u-h)}du \\ &= \frac{1}{2\pi}e^{hij}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-iju}du = c_j(f)e^{ijh}. \end{aligned}$$

- $f(t)e^{int} \approx \sum_j c_{j-n}(f)e^{ijt}$

$$\begin{aligned} f(t)e^{int} &\approx \sum_j c_j(f)e^{ijt}e^{int} = \sum_j \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{(n-j)it}\,dt\,e^{ijt} \\ &= \sum_j c_{j-n}(f)e^{ijt}. \end{aligned}$$

Aquesta propietat ens ajuda a demostrar la següent:

- Si $f \in L^p(\mathbb{T})$, i $p(t) = \sum_{|k|\leq n} c_k e^{ikt}$ és un polinomi trigonomètric, Aleshores $c_j(fp) = \sum_k c_k c_{j-k}(f) = \sum_k c_k(f) c_{j-k}$:

$$\begin{aligned} c_j(fp) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)p(t)e^{-ijt}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{|k|\leq n} c_k e^{it(k-j)}dt \\ &= \sum_{|k|\leq n} c_k \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{it(k-j)}dt \\ &= \sum_{|k|\leq n} c_k c_{j-k}(f), \end{aligned}$$

i, per la propietat anterior,

$$\sum_{|k|\leq n} c_k c_{j-k}(f) = \sum_k c_{j-k} e^{i(j-2k)t} c_{j-k}(f) = \sum_k c_{j-k} c_k(f).$$

□

Proposició 1.3.2. *Sigui* $f \in L^1(\mathbb{T})$. *Definim*

$$F(t) = c + \int_{-\pi}^{t} f(s)ds, \ t \in [-\pi, \pi].$$

Aleshores,

$$F(t) - c_0(f)t = c_0 + \sum_{j\neq 0} \frac{c_j(f)}{ij} e^{ijt}.$$

Demostració:

Per començar, notem que

$$\begin{aligned} F(2\pi + t) - F(t) &= c + \int_{-\pi}^{2\pi+t} f(s)ds - c - \int_{-\pi}^{t} f(s)ds \\ &= \int_{t}^{2\pi+t} f(s)ds = 2\pi c_0(f), \end{aligned}$$

és a dir, F no és periòdica en general (a no ser que $c_0(f) = 0$). Per a poder calcular coeficients de Fourier, emprarem una funció que ho sigui. Així, definim:

$$H(t) := F(t) - tc_0(f).$$

H és clarament periòdica en t, doncs $H(2\pi + t) - H(t) = F(2\pi + t) - F(t) - 2\pi c_0(f) = 0$. D'altra banda, notem que

$$H'(t) = f(t) - c_0(f).$$

Calculem els coeficients de Fourier d'H (suposem índex no 0, prenem $c_0 := c_0(H)$):

$$\begin{aligned}
c_j(H) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(t)e^{-ijt}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\underbrace{\left[\frac{H(t)e^{-ijt}}{-ij}\right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0 \text{ (H periodica)}} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ijt}}{-ij} f(t)dt - \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{c_0(f)e^{-ijt}}{-ij}dt}_{=0 \ si \ j\neq 0} \right) \\
&= \frac{1}{ij}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ijt}dt = \frac{1}{ij}c_j(f).
\end{aligned}$$

Així doncs, tenim:

$$F(t) - c_0(f)t = H(t) \approx c_0 + \sum_{j\neq 0} \frac{1}{ij}c_j(f)e^{ijt},$$

amb la qual cosa el resultat queda provat. □

Corol·lari 1.3.3. *Sigui $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T})$. Aleshores,*

$$f' \approx \sum_j (ij)c_j(f)e^{ijt},$$

i $c_j(f') = o(|j|)$.

Demostració:

Definim

$$F(t) \equiv f(-\pi) + \int_{-\pi}^{t} f'(s)ds.$$

Pel Teorema fonamental del càlcul, sabem que $f(t) = F(t)$. Aplicant la proposició anterior, tenim:

$$H(t) = F(t) - c_0(f')t \approx c_0 + \sum_{j\neq 0} \frac{c_j(f')}{ij}e^{ijt}.$$

És a dir:

$$\sum_j c_j(f)e^{ijt} \approx f(t) \approx c_0 + c_0(f')t + \sum_{j\neq 0} \frac{c_j(f')}{ij}e^{ijt},$$

i, per tant,

$$0 \approx c_0 + c_0(f')t - c_0(f) + \sum_{j\neq 0} \left(\frac{c_j(f')}{ij} - c_j(f)\right) e^{ijt}. \tag{1.1}$$

D'altra banda, sabem que $c_0 = c_0(H)$. Calculem-la:

$$\begin{aligned}
c_0(H) &= c_0\left(f(-\pi) + \int_{-\pi}^{t} f'(s)\, ds - c_0(f')t \right) \\
&= c_0(f(t) - c_0(f')t) = \frac{1}{2\pi}\int_{pi}^{\pi} f(t) - c_0(f')t\, dt \\
&= c_0(f) - \frac{c_0(f')}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} tdt = c_0(f).
\end{aligned}$$

Finalment, doncs, de (1.1) en resulta l'expressió:

$$c_0(f')t + \sum_{j\neq 0}\left(\frac{c_j(f')}{ij} - c_j(f)\right)e^{ijt} = 0,$$

de la qual en treiem les conclusions:

- $c_0(f')t = 0$ per tot $t \in [-\pi, \pi]$, $\Rightarrow c_0(f') = 0$.
- Per tot j, $\dfrac{c_j(f')}{ij} - c_j(f) = 0$, $\Rightarrow$ per tot j, $c_j(f') = ijc_j(f)$.

Això ja dóna els resultats desitjats:

- $f' \approx \sum_j c_j(f')e^{ijt} = \sum_j (ij)c_j(f)e^{ijt}$.
- $|j|c_j \approx \pm ic_j(f) \underbrace{\overset{j\to\infty}{\to} 0.}_{Riemann-Lebesgue}$

□

Aquest corol.lari, per recurrència, ens dóna el següent resultat:

Corol·lari 1.3.4. *Sigui $f \in \mathcal{C}^k(T)$. Aleshores, si notem $D^k f$ la derivada k-èssima d'f, tenim:*

$$D^k f \approx \sum_j (ij)^k c_j(f)e^{ijt},$$

i a més, $c_j(D^k f) = o(|j|^k)$.

Aplicant aquest resultat, poden veure's dues propietats de regularitat de les sèries de Fourier.

Proposició 1.3.5. *Siguin $f \approx \sum_j c_j(f)e^{ijt}$, i $k \in \mathbb{N}$. Aleshores, si*

$$\sum_j |c_j(f)||j|^k < \infty,$$

$f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{T})$.

Demostració:
Per a provar aquest resultat ens cal el següent:

Teorema 1.3.6. *Siguin $\{f_j\}_j$ funcions en $\mathcal{C}^1(I)$, amb I un interval qualsevol, de manera que*

$$\begin{cases} f_j' \to g, \ \textit{uniformement, amb } g \in \mathcal{C}(I). \\ \exists x_0 \in I, \ \textit{tal que } f_j(x_0) \to c. \end{cases}$$

Aleshores, existeix $f \in \mathcal{C}^1(I)$ tal que $f_j \to f$ uniformement i $f' = g$.

Tenint doncs present aquest resultat, fem inducció:

- $k = 0$:
  Tenim
  $$\sum_j |c_j(f)| < \infty,$$
  és a dir, que la sèrie
  $$\sum_j c_j(f)e^{ijt} \approx f,$$
  és absolutament convergent. Això ens diu que f és contínua.

- Suposem-ho cert per un k. Veiem que es compleix per a $k+1$:
  Aplicant el corol.lari anterior sobre $c_j(f^{(k)})$, tenim:
  $$\begin{cases} \sum_j |c_j(f)||j|^{k+1} \leq \infty. \\ f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{T}). \end{cases}$$
  Que $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{T})$ ens diu que $f^{(k)}$ és contínua, és a dir, que la sèrie
  $$\sum_j c_j(f^{(k)})e^{ijt} = \sum_j (ij)^k c_j(f)e^{ijt},$$
  convergeix puntualment. D'altra banda,
  $$\sum_j |c_j(f)||j|^{k+1} < \infty,$$
  implica que
  $$\sum_j (ij)^{k+1} c_j(f)e^{ijt},$$
  convergeix absolutament, i per tant de manera uniforme. Notem, però, que aquestes són les hipòtesis del teorema enunciat, prenent, per tot j, $f_j := \sum_{n=-j}^{j} (ij)^{k+1} c_j e^{int}$, de manera que concloem que $f^{(k)}$ és derivable i que la seva derivada és
  $$f^{(k+1)} = \sum_j (ij)^{k+1} c_j(f)e^{ijt},$$
  la qual cosa clou la inducció i la demostració del resultat.

$\square$

Proposició 1.3.7. *Sigui $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{T})$, per un $k \in \mathbb{N}$. Aleshores,*
$$\sum_j |c_j(f)||j|^{k-1} < \infty.$$

Demostració:
Per a veure aquest resultat, emprarem el fet que si una funció és d'$L^2(\mathbb{T})$ aleshores la seva sèrie de Fourier és d'ℓ^2. Això es veu detalladament en (1.6.1).
Aplicant el corol.lari, sabem que, per tot k,

$$\sum_j c_j(f^{(k)})e^{ijt} = \sum_j (ij)^k c_j(f)e^{ijt}.$$

D'aquí, obtenim que

$$\sum_{j\neq 0} |j|^k |c_j(f)| = \sum_{j\neq 0} |c_j(f^{(k)})| \Leftrightarrow \sum_{j\neq 0} |j|^{k-1}|c_j(f)| = \sum_{j\neq 0} \frac{1}{|j|}|c_j(f^{(k)})|$$
$$\underbrace{\leq}_{\text{Cauchy-Schwarz}} \left(\sum_{j\neq 0}\frac{1}{|j|^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{j\neq 0} c_j(f^{(k)})^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{j\neq 0}\frac{1}{|j|^2}\right)^{1/2} \left\|c_j(f^{(k)})\right\|_{\ell^2} < \infty,$$

degut a que la successió dels $c_j(f^{(k)})$'s és d'ℓ^2 (doncs $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$) i a que la sèrie

$$\sum_{j\neq 0}\frac{1}{|j|^2}$$

és convergent.
Amb això queda vist que

$$\sum_j |c_j(f)||j|^{k-1} < \infty,$$

i per tant acabada la demostració. □

Aquestes dues proposicions combinades ens donen de manera trivial el següent resultat:

Corol·lari 1.3.8. *Donada una funció f en $\mathbb{T}$,*

$$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}) \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ \sum_j |j|^k |c_j(f)| < \infty.$$

Per acabar aquest apartat, emprarem la convolució de dues aplicacions per a veure més propietats de les sèries de Fourier.

Teorema 1.3.9. *Siguin $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Aleshores, q.p.t. x, $f(x-t)g(t)$ és t-integrable i, si notem*

$$(f * g)(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)dt$$

convolució entre f i g, tenim que $f * g \in L^1(\mathbb{T})$, $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ i $c_j(f * g) = c_j(f)c_j(g)$.

Demostració:
Tot plegat es veu emprant Fubini:

$$\begin{aligned}\|f*g\|_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)dt\right|dx\\ &\underbrace{\leq}_{Fubini} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g(t)|\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)|dx\right)dt\\ &= \|f\|_1\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g(t)|dt = \|f\|_1\|g\|_1 .\end{aligned}$$

D'altra banda,

$$\begin{aligned}c_j(f*g) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s-t)g(t)dt\right)e^{-ijs}ds\\ &\underbrace{=}_{Fubini}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s-t)e^{-ijs}ds\right)dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-ijt}\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s-t)e^{-ij(s-t)}ds\right)}_{=c_j(f)\text{ (canvi u=s-t)}}dt\\ &= c_j(f)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-ijt}dt = c_j(f)c_j(g).\end{aligned}$$

□

Corol·lari 1.3.10. *Siguin $f \in L^p(\mathbb{T})$ i $p(t) = \sum_{|j|\leq n} c_j(p)e^{ijt}$. Aleshores,*

$$(f*p)(x) = \sum_{|j|\leq n} c_j(f)c_j(p)e^{ijx},$$

polinomi de grau $\leq n$.

El resultat és directe a partir del teorema, que podem aplicar perquè p polinomi trigonomètric implica $p \in L^1(\mathbb{T})$.

1.4 Constants de Lebesgue:

Donada $f \in L^p(\mathbb{T})$, tenim que

$$\begin{aligned}s_n(f,0) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(0-t)dt\\ &\underbrace{=}_{D_n\text{ parell}}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t)dt,\end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned}|s_n(f,0)| &\leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,|D_n(t)|\,dt \\ &\leq \|f\|_\infty \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\,dt \\ &= \|f\|_\infty \underbrace{2\,\|D_n\|_1}_{:=L_n} = \|f\|_\infty L_n.\end{aligned}$$

Definició 1.4.1. *(Constants de Lebesgue) Definim la constant de Lebesgue n-èssima com*

$$L_n := 2\,\|D_n\|_1\,,$$

i tenim que $|s_n(f,0)| \leq \|f\|_\infty L_n\ \forall f \in L^p(\mathbb{T})$.

Lema 1.4.2. *Es té:*

- $\displaystyle\sup_{f\in L^\infty(T),\|f\|_\infty\leq 1} |s_n(f,0)| = L_n.$

  L'acotació $|s_n(f,0)| \leq \|f\|_\infty L_n$ trobada abans ens dóna que

  $$\sup_{f\in L^p(\mathbb{T}),\|f\|_\infty\leq 1} |s_n(f,0)| \leq L_n.$$

  Però si definim la funció $f_n := \operatorname{sign}(D_n)$, $\|f\|_\infty = 1$, i per tant el suprem cercat és major o igual a L_n.
  En tenir les dues desigualtats, el resultat queda provat.

- $\displaystyle\sup_{f\in C(\mathbb{T}),\|f\|_\infty\leq 1} |s_n(f,0)| = L_n.$

  Com les f_n definides abans són contínues q.p.t. el resultat és extensible a funcions contínues. □

Aquests resultats fan interessant conèixer el comportament de les L_n per n gran.

Proposició 1.4.3. *Per a n gran,* $L_n \approx \dfrac{4}{\pi^2}\ln n$.

Demostració:
Sabem que D_n és parell i que $\sin t/2 > 0$ per t entre 0 i π. D'altra banda:

$$\begin{aligned}L_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left|\frac{\sin{(n+1/2)t}}{2\sin t/2}\right| dt \\ &= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi |\sin{(n+1/2)t}|\left(\frac{1}{2\sin t/2} - \frac{1}{t}\right) dt}_{=:A_n} \\ &+ \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi |\sin{(n+1/2)t}|\,\frac{1}{t}\,dt}_{=:B_n}.\end{aligned}$$

Veiem que A_n està acotat:

$$
\begin{aligned}
|A_n| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left|\left(\frac{1}{2\sin t/2} - \frac{1}{t}\right)\right| dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \underbrace{\left|\frac{t - 2\sin t/2}{2t\sin t/2}\right|}_{=:g} dt.
\end{aligned}
$$

Com $\lim_{t\to 0} \dfrac{t-\sin t/2}{2t\sin t/2} = 0$ (trivialment aplicant L'Hôpital), g és contínua en $[0,\pi]$ i per tant la integral pot acotar-se per una certa constant k, de manera que $A_n = O(1)$.
Així, $L_n = B_n + O(1)$. D'altra banda,

$$
\begin{aligned}
B_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |\sin{(n+1/2)t}|\,\frac{dt}{t} \\
&\underbrace{=}_{s=(n+1/2)t} \frac{2}{(n+1/2)\pi}\int_0^{(n+1/2)\pi} |\sin s|\,(n+1/2)\frac{ds}{s} \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{(n+1/2)\pi}\frac{|\sin s|}{s}ds = \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|\sin s|}{s}ds}_{\text{acotat}} \\
&+ \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_{n\pi}^{(n+1/2)\pi}\frac{|\sin s|}{s}ds}_{\text{acotat}} + \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_{\pi}^{n\pi}\frac{|\sin s|}{s}ds}_{=:B_n'}.
\end{aligned}
$$

Els dos primers termes estan fitats per ser $\dfrac{|\sin s|}{s}$ contínua en $[0,\pi]$, cosa que ve del fet conegut (comprovable emprant L'Hôpital) de que

$$
\lim_{s\to 0}\frac{\sin s}{s} = 1.
$$

Així doncs, $B_n = B_n' + O(1)$. Veiem, per acabar, que $B_n' = \dfrac{4}{\pi^2}\ln n + O(1)$:

$$
\begin{aligned}
B_n' &= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin s|}{s}ds \\
&\underbrace{=}_{u=s-k\pi} \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^{\pi}\frac{|\sin{(u+k\pi)}|}{u+k\pi}du \\
&\underbrace{=}_{\text{Aquí sin>0}} \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin u\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{u+k\pi}du.
\end{aligned}
$$

$$
\left(\text{Ve de que } |\sin{(u+k\pi)}| = |\sin u\cos k\pi + \underbrace{\sin k\pi}_{=0}\cos u| = |(-1)^k\sin u| = |\sin u| \text{ per tot } k.\right)
$$

Però:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{u+k\pi}\underbrace{\geq}_{u\leq\pi}\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{1+k}=\frac{1}{\pi}\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k}$$
$$=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{\pi}=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+O(1).$$

A més:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{u+k\pi}\underbrace{\leq}_{u>0}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k\pi}\leq\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Si emprem també que $\displaystyle\int_0^\pi \sin u\, du = 2$, podem concloure que

$$\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+O(1)\leq B_n'\leq\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Finalment, el fet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\approx\ln n$ (se'n pot trobar una prova a [7]) ens dóna el resultat cercat.
□

Aquesta acotació recent trobada ens fa considerar la següent proposició:

Proposició 1.4.4. *Existeix una funció contínua amb sumes parcials de la seva sèrie de Fourier en el 0 grans (és a dir, amb sèrie de Fourier no convergent en un punt).*

Demostració:
Per a fer una de les proves d'aquest resultat és necessari emprar el Principi de l'Acotació Uniforme, que ara reproduïm:

Teorema 1.4.5. *(Principi de l'acotació uniforme o teorema de Banach-Steinhaus) Sigui X un espai mètric complet, Y espai lineal normat. Sigui $\{T_a\}_{a\in A}$ una família d'operadors lineals acotats d'X en Y de manera que per cada $x\in X$, $\exists c_x$ tal que $\forall a\in A$ $\|T_a x\|\leq c_x<\infty$. Aleshores, $\exists c$ tq $\displaystyle\sup_{\|x\|_X\leq 1}\|T_a x\|_Y\leq c$, $\forall a\in A$.*

Demostració:
Suposem que tenim $x_0\in X$, $\varepsilon>0$, k, de manera que $\|T_a x\|_Y\leq k$, $\forall x$ tal que $\|x_0-x\|_X\leq\varepsilon$. Aleshores, per tot $x\neq 0$, tal que $\|x\|_X\leq 1$ i $\|x_0-x\|>\varepsilon$, definim

$$z:=\varepsilon\frac{x}{\|x\|_x}+x_0.$$

Clarament $\|z - x_0\|_X \leq \varepsilon$, de manera que $\|T_a z\|_Y \leq k$. Només resta aplicar una desigualtat triangular per resoldre:

$$\varepsilon \frac{\|T_a x\|_Y}{\|x\|_X} - \|T_a x_0\|_Y \leq \left\| \varepsilon \frac{T_a x}{\|x\|_X} + T_a x_0 \right\|_Y = \|T_a z\|_Y \leq k,$$

de manera que

$$\|T_a x\|_Y \leq \frac{(k + \|T_a x_0\|_Y) \|x\|_X}{\varepsilon} \leq \frac{k + \sup_a \|T_a x_0\|}{\varepsilon} = \frac{k + c_{x_0}}{\varepsilon} =: \frac{c}{\varepsilon}.$$

Trobada una acotació que no depén de les a, el resultat queda provat. Resta només, doncs, veure l'existència de l'x_0:
Suposem que no existeix. Fixem un y_0 qualsevol d'X, i definim $B_0 = B(y_0, \varepsilon_0)$. Aleshores, com y_0 no té les propietats de l'x_0 cercat, existeixen $y_1 \in B_0$ $, \varepsilon_1,$ a_1 tq $\|T_{a_1} y_1\| > 1$, i, per continuïtat, $\|T_{a_1} y\| > 1, \ \forall y \in B(y_1, \varepsilon_1) \equiv B_1 \subseteq B_0$.
Aplicant aquest argument recurrentment, arribem a unes boles $B_0 \supseteq ... \supseteq B_{k-1}$ de radi $\varepsilon_j = \dfrac{1}{j}$ amb centres y_j de forma que per tot $j \, \exists a_j$ tq $\left\|T_{a_j} y_j\right\|_Y \geq j$ Aquesta successió de y_j's és clarament de Cauchy, i, com X és complet, convergeix a un punt y. Aleshores tindríem que $\forall k, \ \|T_{a_k} y\| > k$, cosa que contradiria la hipòtesi de l'enunciat. $\square$

Es poden donar dos tipus de demostracions diferents, una suposant la no existència de la funció i arribant a contradicció i l'altra trobant explícitament una funció amb aquesta propietat. Farem les dues:

- Suposem que no existeix cap funció amb aquesta propietat. Així, per tota $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, $\exists c_f$ tq $|s_n(f, 0)| < c_f$ per tot n. Emprant la notació dels nuclis de Dirichlet, això és equivalent a dir que $\forall f \in \mathcal{C}(T)$, $\exists c_f$ tal que, $\forall n$,

  $$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t) \right| < c_f.$$

  Considerem la família d'operadors lineals $\{T_n\}_n$ entre l'espai $X = \mathcal{C}(\mathbb{T})$ (complet) i $Y = \mathbb{C}$:

  $$T_n(f) = s_n(f, 0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t) dt, \qquad n > 0.$$

  Per la Proposició (1.4.3), tenim que

  $$\sup_{\|f\|_{\mathcal{C}(\mathbb{T})} \leq 1} |T_n(f)| \approx \frac{4}{\pi^2} \ln n.$$

  D'altra banda, l'acotació feta d'inici ens diu que, fixat un $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, i per tot n,

  $$|T_n(f)| \leq c_f,$$

és a dir, per a cada $f \in X$ espai complet tenim una acotació de la família $\{T_n\}_n$, de manera que podem aplicar el principi de l'acotació uniforme i concloure l'existència d'una constant c que sigui cota de $\{T_n\}_n$ per tota $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, o, el que és el mateix:

$$\frac{4}{\pi^2}\ln n \approx \sup_{\|f\|_{C(T)}\leq 1} |T_n(f)| \leq c, \qquad \text{per tot } n.$$

Que $\lim\limits_{n\to\infty} \ln n = \infty$ és contradictori amb aquest fet, contradixxió que prové de suposar la no existència cap funció f de forma que $\sup\limits_n |s_n(f,0)| = \infty$, de manera que la funció existeix i el resultat queda provat.

- Construim una funció amb la propietat buscada. Definim

$$f(x) := \sum_{k\geq 1} c_k \sin(n_k t)\chi_{I_k}, \qquad t \in [0,\pi],$$

amb $c_k \xrightarrow{k} 0$ i on χ_{I_k} és la funció característica en $I_k = \left(\dfrac{\pi}{n_k},\ \dfrac{\pi}{n_{k-1}}\right]$.
Triem els diferents paràmetres inicials que defineixen f de la següent manera:

$$c_1 = 1 \qquad n_1 = 2 \qquad I_1 = \left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right].$$

Definim la resta recursivament:
Si tenim $c_1, ..., c_{k-1}$, $n_1, ..., n_{k-1}$ i els seus corresponents I_j, definim:

$$h(t) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} c_j \sin(n_j t)\chi_{I_j(t)}, & \text{si } t \in \left(\dfrac{\pi}{n_{k-1}},\ \pi\right]. \\ 0, \text{ en cas contrari.} \end{cases}$$

Clarament $h(t)$ està acotat (doncs com a màxim pot valdre, en mòdul, $\max\limits_{1\leq j\leq k-1} |c_j|$) de manera que $\dfrac{h(t)}{t}$ també ho estarà $\left(\text{aquest cop per } \max\limits_{1\leq j\leq k-1} \dfrac{|c_j|}{\pi/n_{k-1}}\right)$.
Així doncs, $\dfrac{h(t)}{t} \in L^\infty(\mathbb{T})$, de manera que podem afirmar que

$$\lim_n \int_0^\pi \frac{h(t)}{t} \sin nt\, dt = 0,$$

per Riemann-Lebesgue. Aleshores, prenem $n_k := n_1 ... n_{k-1} N_k$, amb $N_k \geq 2^k$ prou gran perquè es compleixi

$$\left| \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{h(t)}{t} \sin n_k t dt \right| < 1.$$

Un cop fixat el nou n_k, només cal fer $I_k = \left(\dfrac{\pi}{n_k},\ \dfrac{\pi}{n_{k-1}}\right]$. Aleshores, en I_k, prenem $c_k = (\ln N_k)^{-\varepsilon}$, amb $0 \leq \varepsilon \leq 1$ i tenim:

$$f(t) = c_k \sin n_k t.$$

A posteriori veurem el perquè d'aquesta tria de les c_k. L'únic que sabem en aquests moments és que podem escollir-ne qualsevol que faci decreixent la successió de les c's (que ha de convergir a 0).
Finalment, apliquem el resultat segons el qual

$$s_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin n(x-t)}{x-t}dt + O(1),$$

amb la qual cosa tenim, per tot k,

$$\begin{aligned} s_{n_k}(f,0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\frac{\sin n_k t}{t}dt + O(1) &= \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{n_k}} f(t)\frac{\sin n_k t}{t}dt}_{=:A_k} \\ &+ \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{\pi}{n_{k-1}}} f(t)\frac{\sin n_k t}{t}dt}_{=:B_k} + \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n_{k-1}}}^{\pi} f(t)\frac{\sin n_k t}{t}dt}_{=:C_k} + O(1). \end{aligned}$$

De les acotacions realitzades per a la funció h, deduïm que A_k i C_k són O(1), de manera que ens reduïm a l'estudi de B_k. Així:

$$\begin{aligned} B_k = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{\pi}{n_{k-1}}} f(t)\frac{\sin n_k t}{t}dt &\underbrace{=}_{\text{estem a } I_k} c_k\int_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{\pi}{n_{k-1}}} (\sin n_k t)^2\frac{dt}{t} \\ = c_k\int_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{\pi}{n_{k-1}}} \frac{1-\cos 2n_k t}{2t}dt &= \underbrace{c_k\int_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{\pi}{n_{k-1}}} \frac{dt}{2t}}_{=:B'_k} \\ &\underbrace{- \frac{c_k}{2}\int_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{\pi}{n_{k-1}}} \cos 2n_k t\frac{dt}{t}}_{=:B''_k}. \end{aligned}$$

Estudiem les dues integrals:

- $B'_k = \dfrac{c_k}{2}[\ln \pi/n_{k-1} - \ln \pi/n_k] = \dfrac{1}{2}(\ln N_k)^{-\varepsilon}\ln N_k = \dfrac{1}{2}(\ln N_k)^{1-\varepsilon}.$
  Així doncs, $B'_k \xrightarrow{k} \infty$.
- $B''_k = \dfrac{c_k}{2}\displaystyle\int_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{\pi}{n_{k-1}}} \cos 2n_k t\frac{dt}{t} = \left[\frac{c_k}{2}\frac{\sin 2n_k t}{2n_k t}\right]_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{\pi}{n_{k-1}}} + \frac{c_k}{2}\int_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{\pi}{n_{k-1}}} \frac{\sin 2n_k t}{2n_k}\frac{dt}{t^2}.$
  El primer dels valors dóna $\dfrac{\sin 2N_k}{2N_k}$, que clarament tendeix a 0 en n. La integral pot majorar-se (en mòdul) per $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{n_k}}^{\frac{\pi}{n_{k-1}}} \frac{dt}{t^2}$, que clarament pertany a O(1). Així doncs, concloem $B''_k \in O(1)$.

Finalment, acabades totes les acotacions, tenim que

$$s_{n_k}(f,0) \approx \frac{1}{2}(\ln N_k)^{1-\varepsilon} + O(1),$$

cosa que, en ser $\varepsilon < 1$, implica que les sumes de les sèries de Fourier d'f no tendeixen a 0 (sino a ∞!) en n, i per tant conclou la demostració.

□

1.5 Sumabilitat de Cesàro.

1.5.1 Concepte de sumabilitat de Cesàro.

Fins ara només hem estudiat la convergència de les sèries de Fourier de forma puntual. Intentarem ampliar aquest estudi a entorns més amplis.

Definició 1.5.1. *(Convergència Cesàro) Sigui $\{c_j\}$ una successió en $\mathbb{C}$. Direm que convergeix a L en sentit de Cesàro (C, 1) si*

$$\lim_j C_j = L, \quad amb\ C_j = \frac{1}{j}\sum_{1\le i\le j} c_i;$$

ho notarem $\lim\limits_{j\to\infty} c_j = L(C,1)$.

Proposició 1.5.2. *La convergència d'una succesió a L implica la seva convergència $L(C,1)$.*

Demostració:
Podem considerar $L = 0$ (si cal fent una translació a la successió considerada) sense perdre generalitat. Així, tenim $\{c_j\}$ una successió en $\mathbb{C}$ de manera que $\lim\limits_j c_j = 0$. Això és:

$$\forall\varepsilon\ \exists n_0 \text{ tal que, } \forall j > n_0,\ |c_j| < \varepsilon.$$

Així, $c_j < \max\{|c_1|, ..., |c_{n_0}|, \varepsilon\} =: K$.
Aleshores, $\forall j > n_0$,

$$\begin{aligned} |C_j| &\le \frac{|c_1| + ... + |c_{n_0}| + \varepsilon(j-n_0)}{j} \\ &\le \frac{n_0 K}{j} + \varepsilon. \end{aligned}$$

El fet que podem fixar l'ε tan petit com volguem fa que també podem reduïr els $|C_j|$ a voluntat, i per tant la seva convergència a 0 queda provada. □

Observació 1.5.3. *La convergència Cesàro és més feble que la normal. Com a exemple trivial podem prendre la successió* $c_j = 1+(-1)^j$, *que clarament no convergeix en* $j \to \infty$. *La successió associada* $C_j = \dfrac{c_1 + ... + c_j}{j}$, *en canvi, convergeix a* 1.

El resultat és clar:

$$C_j = \frac{c_1 + ... + c_j}{j} = \frac{0+2+0+2+...}{j} = \begin{cases} \dfrac{j}{j} = 1 \text{ si } j \text{ parell.} \\ \\ \dfrac{j-2}{j} \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 1 \text{ si } j \text{ senar.} \end{cases}$$

Així tenim una successió no covergent però convergent $(C, 1)$.

Definició 1.5.4. *(Convergència Cesàro d'una sèrie) Sigui* $\{c_j\}_j \subseteq \mathbb{C}$. *Definim*

$$s_n := \sum_{1\leq j\leq n} c_j, \qquad \sigma_n := \frac{1}{n}\sum_{1\leq j\leq n} s_j.$$

Si $\lim_n \sigma_n = s$, *diem que la sèrie* $\sum_j c_j$ *és* C_1*-sumable a* s, *i ho notem* $\sum_j c_j = s(C, 1)$.

Clarament, si $\lim_n s_n = s$, aleshores $\sum_j c_j = s(C, 1)$ (prenent, per tot j, $c_j = s_j$ i aplicant la Proposició (1.5.2)).

Observació 1.5.5. *Altre cop, la convergència de sèries en sentit normal és més forta que en sentit Cesàro. Per exemple, sabem que prenent* z *un nombre complex de mòdul* 1, *la sèrie* $\sum_j z^j$ *no convergeix. En canvi, si* z *és diferent d'*1, *tenim:*

$$\sum_j z^j = \frac{1}{1-z}(C, 1).$$

Veiem-ho: Prenem, per tot n,

$$s_n = \sum_{j=0}^{n} z^j, \qquad \sigma_n = \frac{\sum_{j=0}^{n} s_j}{n+1}.$$

Aleshores,

$$\begin{aligned}
\lim_n \sigma_n &= \lim_n \frac{1 + z + \sum_{j=0}^{2} z^j + ... + \sum_{j=0}^{n} z^j}{n+1} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\frac{1-z^{j+1}}{1-z} = \frac{1}{(n+1)(1-z)}\sum_{j=0}^{n} 1 - z^{j+1} \\
&= \frac{1}{(n+1)(1-z)}\left((n+1) - \sum_{j=0}^{n} z^{j+1}\right) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{(n+1)(1-z)}\frac{1-z^{n+2}}{1-z} \\
&= \frac{1}{1-z} - \frac{1-z^{n+2}}{(n+1)(1-z)^2}.
\end{aligned}$$

El fet que z sigui de norma 1 diferent d'1 (per $z = 1$ no hi ha cap convergència) fa que $\frac{1-z^{n+2}}{(n+1)(1-z)^2}$ estigui acotat en norma per $\frac{2}{n(1-z)^2}$, que clarament convergeix a 0 en n, de manera que tenim:

$$\lim_n \sigma_n = \lim_n \frac{1}{(n+1)(1-z)}\left(n+1-\sum_{j=0}^{n} z^{j+1}\right) = \lim_n \frac{1}{1-z} - \frac{1-z^{n+2}}{(n+1)(1-z)^2} = \frac{1}{1-z},$$

cosa que conclou la convergència (C, 1) de σ_n al valor suposat. □

1.5.2 Nucli de Fejér.

Suposem tenir $f \approx \sum_j c_j e^{ijt}$ (aleshores $s_n(f,t) = \sum_{|j|\le n} c_j e^{ijt}$). Si definim

$$\sigma_n(f,t) := \frac{1}{n+1}\sum_{|j|\le n} s_j(f,t),$$

aleshores,

$$\begin{aligned}
\sigma_n(f,t) &= \frac{c_0 + \sum_{|j|\le 1} c_j e^{ijt} + ... + \sum_{|j|\le n} c_j e^{ijt}}{n+1} \\
&= \frac{c_0(n+1) + (c_1 e^{it} + c_{-1}e^{-it})n + ... + c_n e^{int} + c_{-n}e^{-int}}{n+1} \\
&= \sum_{|j|\le n} \frac{n+1-|j|}{n+1} c_j e^{ijt} \\
&= \sum_{|j|\le n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1} c_j\right) e^{ijt}.
\end{aligned}$$

D'altra banda, aplicant que

$$s_n(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t)dt = 2D_n * f(x),$$

tenim que

$$\begin{aligned}
\sigma_n(f,x) &= \frac{2D_0 * f(x) + ... + 2D_n * f(x)}{n+1} \\
&= \frac{f * 2D_0(x) + ... + f * 2D_n(x)}{n+1} \\
&= \frac{1}{n+1} f * 2\sum_{j=0}^{n} D_n(x) = f * 2K_n,
\end{aligned}$$

amb $K_n = \frac{\sum_{j=0}^{n} D_n(x)}{n+1}$ Per arribar a aquest resultat hem aplicat que el nucli de Dirichlet és parell 2π-periòdic i les següents propietats de la convolució:

Proposició 1.5.6. *Siguin $f, g \in L^p(\mathbb{T}), \{g_i\}_i \subset L^p(\mathbb{T})$. Aleshores, la convolució és distributiva respecte la suma. Si f, g 2π-periòdiques, aleshores la convolució és commutativa.*

Demostració:
Veiem, per començar, la commutativitat:

$$\begin{aligned}(f*g)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)dt \\ &\underbrace{=}_{u=x-t} -\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{-\pi} f(u)g(x-u)du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)g(x-u)du \\ &= (g*f)(x).\end{aligned}$$

Notem que a l'hora de fer el canvi no hem mogut els límits d'integració. Això és degut a que en ser f i g periòdiques de període 2π, $h(t) := f(t)g(x-t)$ també ho és i per tant la integral pren els mateixos valors en tot interval d'aquesta longitud. Comprovem ara la distributivitat respecte de la suma:

$$\begin{aligned}\sum_j ((f*g_j)(x)) &= \frac{1}{2\pi}\sum_j \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g_j(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\sum_j g_j(t)dt \\ &= \left(f*\left(\sum_j g_j\right)\right)(x).\end{aligned}$$

□

Definició 1.5.7. *(Nucli de Fejér) Anomenem nucli de Fejér n-èssim a*

$$K_n(t) := \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} D_j(t).$$

Proposició 1.5.8. $K_n(t) = \dfrac{1}{2(n+1)}\left(\dfrac{\sin(n+1)t/2}{\sin t/2}\right)^2.$

Demostració:
Sabem que

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} D_j(t).$$

D'altra banda, aplicant $D_j(t) = \frac{1}{2}\frac{\sin(j+1/2)t}{\sin t/2}$, tenim que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} D_j(t) &= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\frac{\sin(j+1/2)t}{\sin t/2} \\
&= \frac{1}{2\sin t/2}\Im\left(\sum_{j=0}^{n} e^{i(j+1/2)t}\right) \\
&= \frac{1}{2\sin t/2}\Im\left(e^{it/2}\frac{1-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}}\right) \\
&= \frac{1}{2\sin t/2}\Im\left(e^{i(n+1)t/2}\frac{e^{-i(n+1)t/2}-e^{i(n+1)t/2}}{e^{-it/2}-e^{it/2}}\right) \\
&= \frac{1}{2\sin t/2}\Im\left(e^{i(n+1)t/2}\frac{\sin(n+1)t/2}{\sin t/2}\right) \\
&= \frac{\sin(n+1)t/2}{2(\sin t/2)^2}\Im\left(e^{i(n+1)t/2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n+1)t/2}{\sin t/2}\right)^2,
\end{aligned}$$

i el resultat queda provat. □

Amb totes aquestes dades, més les ja sabudes del nucli de Dirichlet, són simples de veure les següents propietats:

Proposició 1.5.9. *Es compleix, per tot n:*

- $K_n \geq 0$. Trivialment, per ser K_n producte d'un nombre positiu i un quadrat.
- K_n parell. Es veu directament de que D_n parell per tot n.
- $K_n(t) = \frac{1}{2}\sum_{|j|\leq n}\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)e^{ijt}$.
- $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} K_n(t)dt = 1$. Clar a partir de $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_j(t)dt = 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt &= \frac{1}{(n+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{j=0}^{n} D_j(t)dt \\
&= \frac{1}{(n+1)}\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_j(t)dt \\
&= \frac{1}{(n+1)}\sum_{j=0}^{n} 1 = \frac{1}{(n+1)}(n+1) = 1.
\end{aligned}$$

- $K_n(t) \leq \dfrac{n+1}{2}$. Directe emprant que per tot j $D_j(t) \leq j + 1/2$.
- $K_n(t) \leq \dfrac{\pi^2}{2(n+1)t^2}$. Es veu aplicant la desigualtat coneguda $\dfrac{1}{2\sin t/2} \leq \dfrac{\pi}{2|t|}$:

$$\begin{aligned} K_n(t) &= \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin{(n+1)t/2}}{\sin t/2}\right)^2 \\ &\leq \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{1}{\sin t/2}\right)^2 \\ &= \frac{2}{n+1}\left(\frac{1}{2\sin t/2}\right)^2 \\ &\leq \frac{2}{n+1}\left(\frac{\pi}{2|t|}\right)^2 = \frac{\pi^2}{2(n+1)t^2}. \end{aligned}$$

- $\sigma_n(f,x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi (f(x+t)+f(x-t))K_n(t)dt$.
  És equivalent a veure
  $$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}K_n(t)dt.$$
  Però sabem:
  $$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_n(t)dt \underbrace{=}_{u=x+t} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)K_n(u-x)du \underbrace{=}_{K_n \text{ parell}}$$
  $$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)K_n(x-u)du = 2f * K_n(x) = \sigma_n(f,x),$$
  i també, emprant tècniques usades anteriorment:
  $$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_n(t)dt = 2K_n * f(x) = \sigma_n(f,x).$$
  Aleshores, és clar que
  $$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}K_n(t)dt = 2\frac{\sigma_n(f,x)}{2} = \sigma_n(f,x), \text{ i el resultat queda vist.}$$

$\square$

Teorema 1.5.10. *(de Fejér) Sigui $f \in L^1(\mathbb{T})$, $f \approx \sum_{|j|\leq n} c_j e^{ijt}$. Si existeixen els límits laterals d'f en un punt x, aleshores*

$$\sum_j c_j e^{ijx} = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}(C,1).$$

A més, si f és contínua en $I \subseteq T$, aleshores la convergència és uniforme en I.

Demostració:

$$\begin{aligned}
\sigma_n(f,x)-f(x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}K_n(t)dt - f(x) \\
&\underbrace{=}_{\frac{2}{\pi}\int_0^\pi Kn(t)dt=1} \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-f(x)\right)K_n(t)dt \\
&= \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^h \left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-f(x)\right)K_n(t)dt}_{=:I_1} \\
&+ \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_h^\pi \left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-f(x)\right)K_n(t)dt}_{=:I_2},
\end{aligned}$$

per qualsevol $h \in (0,\pi)$ que escollim.

D'altra banda, de què $f(x) = \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, sabem que per tot $\varepsilon > 0$ tenim un δ de forma que

$$\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-f(x)\right| < \varepsilon,$$

si $|t| \leq \delta$. Així doncs, si prenem $h := \delta$, aleshores

$$I_1 \leq \varepsilon\frac{2}{\pi}\int_0^\pi K_n(t)dt = \varepsilon.$$

Tot es redueix doncs a l'acotació d'I_2. Definim la funció

$$M_n(\delta) := \max_{\delta\leq t\leq\pi} K_n(t).$$

De les acotacions de K_n donades a la Proposició (1.5.9), tenim, per tot $\delta > 0$, que en l'interval (δ,π),

$$K_n(t) \leq \frac{\pi}{2(n+1)\delta^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Amb això, arribem a

$$I_2 \leq M_n(\delta)\frac{2}{\pi}\int_\delta^\pi |f(x+t)| + |f(x-t)| + 2\,|f(x)|\,dt = o(1),$$

per ser $f \in L^1(\mathbb{T})$ (i per tant tenir norma L^1 acotada). Això conclou la convergència en un punt. La convergència uniforme en cas de continuitat d'f en un interval $I \subset \mathbb{T}$ ve donada pel fet que en aquest cas la darrera expressió obtinguda està uniformement acotada en I. □

Corol·lari 1.5.11. *Sigui $f \in L^1(\mathbb{T})$, de manera que existeixin m, M tal que $m \leq f(x) \leq M$ en un interval $(a,b) \subset \mathbb{T}$. Aleshores, per tot $\delta > 0$ existeix un $n_0(\delta)$ de forma que per tot $n \geq n_0(\delta)$ es té*

$$m-\delta \leq \sigma_n(f,x) \leq M+\delta, \ \textit{per tot } x \in [a+\delta,\ b-\delta].$$

Demostració:
En tot l'interval $(a,\ b)$ l'acotació d'f ens permet aplicar el Teorema de Fejér (doncs si per tot $x \in (a,\ b)$ $|f(x)| < M$ en particular existeixen els límits laterals per qualsevol punt de l'interval). Així doncs, $\forall x \in (a,\ b)$,

$$\lim_n \sigma_n(f,x) = \frac{f(x+\varepsilon)+f(x-\varepsilon)}{2},\ \text{amb } \varepsilon \approx 0,$$

és a dir, que fixat un $\delta > 0$, tenim un n_0 tal que, $\forall n > n_0$,

$$-\delta \leq \sigma_n(f,x) - \frac{f(x+\varepsilon)+f(x-\varepsilon)}{2} \leq \delta,$$

cosa que, tenint present les acotacions d'f en l'interval $(a,\ b)$, es tradueix en

$$m - \delta \leq \sigma_n(f,x) \leq M + \delta.$$

Finalment, cal $x \in (a+\varepsilon,\ b-\varepsilon)$ per a que les acotacions siguin aplicables. En particular, $0 \approx \varepsilon < \delta$, amb la qual cosa el resultat és vàlid en l'interval $[a+\delta,\ b-\delta]$. $\square$

Corol·lari 1.5.12. *(Teorema de Weierstrass) Sigui $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Aleshores, per qualsevol $\varepsilon > 0$ fixat, existeix un polinomi trigonomètric p tal que*

$$|f(x) - p(x)| \leq \varepsilon.$$

Demostració:
Fixats $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{T}$, pel Teorema de Fejér (que podem aplicar per ser f contínua en $\mathbb{T}$), podem prendre n prou gran per tal de que

$$\left|\sigma_n(f,x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right| \leq \varepsilon$$

en $\mathbb{T}$. Només cal notar que si f contínua en x,

$$\lim_{y\to x\pm} f(y) = f(x),$$

i que per tant

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = f(x).$$

Això prova que $\sigma_n(f,x)$ és el polinomi trigonomètric cercat, i conclou el teorema. $\square$

Corol·lari 1.5.13. *Sigui $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < \infty$. Aleshores,*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+h) - f(t)|^p\, dt = 0,$$

és a dir, f és contínua en norma L^p.

Demostració:
Sabem $\overline{\mathcal{C}(\mathbb{T})} = L^p(\mathbb{T})$ per $1 \leq p < \infty$. Així doncs, és equivalent provar el resultat per funcions d'$L^p(\mathbb{T})$ que per funcions contínues en $\mathbb{T}$. Si f és contínua, però, a l'estar definida sobre un compacte ($\mathbb{T}$) està acotada (i per tant dominada per la funció constant igual a la seva cota), de manera que podem aplicar el Teorema de Convergència Dominada a L^p a la funció

$$F(t) := f(t+h) - f(t),$$

que trivialment tendeix a 0 amb h. Aleshores,

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t+h) - f(t)|^p \, dt \\ &\underbrace{=}_{\text{T.Conv.Dom.}} \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{h\to 0} |f(t+h) - f(t)|^p \, dt = 0,\end{aligned}$$

la qual cosa prova el teorema. $\square$

Teorema 1.5.14. *Sigui $f \in L^p(\mathbb{T})$, amb $1 \leq p < \infty$. Aleshores,*

$$\lim_n \|\sigma_n(f) - f\|_p = 0.$$

Demostració:
Definim

$$F(t) := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Pel corol·lari anterior, sabem $\lim\limits_{t\to 0} F(t) = 0$, és a dir, F contínua amb norma L^p, i, per tant, aplicant el Teorema de Fejér,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(F, 0) = 0.$$

Aleshores, tenint present que

$$2f * K_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_n(t) \, dt \underbrace{=}_{u=-t,\ K_n \text{ parell}} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) K_n(u) \, du,$$

tenim:

$$\begin{aligned}\sigma_n(f,x) - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) K_n(t) dt - f(x) \\ &\underbrace{=}_{\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\, dt = 1} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x)) K_n(t) dt.\end{aligned}$$

Aplicant la desigualtat de Minkowski, segons la qual

$$\left\| \int_{-\pi}^{\pi} f(\cdot, t) \, dt \right\| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \|f(\cdot, t)\| \, dt,$$

tenim:

$$\begin{aligned}\|\sigma_n(f,x)-f(x)\|_p &= \left\|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x+t)-f(x))K_n(t)dt\right\|_p \\ &\le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\|f(x+t)-f(x)\|_p\,K_n(t)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)K_n(t)\,dt = \sigma_n(F,0)\xrightarrow{n}0.\end{aligned}$$

□

Corol·lari 1.5.15. *(Teorema d'Unicitat) Sigui* $f \in L^p(T)$*,* $1 \le p < \infty$*,* $f \approx \sum_j c_j e^{ijt}$*. Aleshores,* $c_j = 0$ *per tot* j *implica* $f = 0$ *g.p.t.*

Demostració:
$\sigma_n(f,x) = 0$ per tot x, n. Però, pel teorema anterior,

$$\lim_n \|\sigma_n(f)-f\|_p = 0.$$

D'aquí, trivialment tenim que

$$\|f\|_p = 0,$$

cosa que es tradueix en que f sigui igual a 0 g.p.t. □

El Teorema d'Unicitat ens dóna un lligam entre els espais $L^1(\mathbb{T})$ i c_0 (recordem que $c_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tals que $x_j \xrightarrow{j} 0\}$).

Proposició 1.5.16. *L'aplicació*

$$\begin{aligned}\widehat{(\cdot)}:&L^1(\mathbb{T})\to c_0\\ &f \longrightarrow \{c_j(f)\}_j\end{aligned}$$

és injectiva.

Demostració:
Per començar, observem que $\widehat{(\cdot)}$ està ben definida, doncs, pel Teorema de Riemann-Lebesgue, $\forall f \in L^1(\mathbb{T}),\ c_j(f) \xrightarrow{j} 0$. Veiem doncs que $\ker\widehat{(\cdot)} = 0$:

$$\widehat{f} \equiv 0 \Leftrightarrow \forall j,\ c_j(f) = 0 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Teorema d'Unicitat}} \quad f \equiv 0.$$

□

Observació 1.5.17. *Clarament,* $\widehat{(\cdot)}$ *injectiva implica el Teorema d'Unicitat, de manera que ambdues condicions són equivalents.*

Exemple 1.5.18. *Representació gràfica del nucli de Fejér per a diferents n's:*

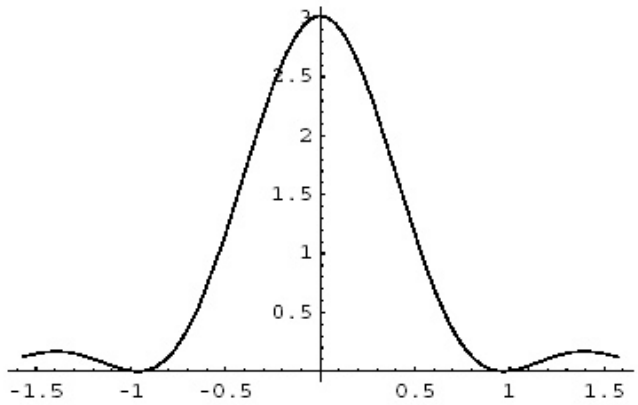

Figura 1.12: $K_5(t)$

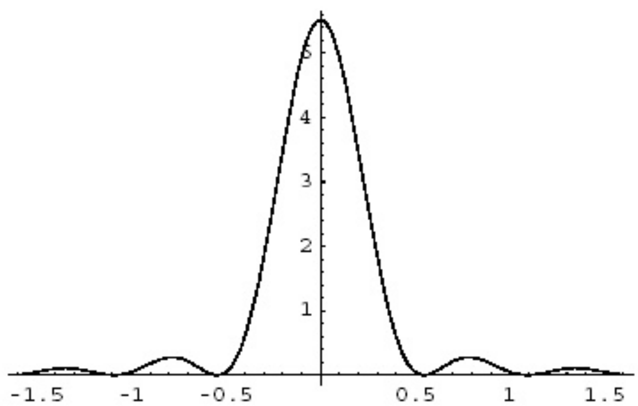

Figura 1.13: $K_{10}(t)$

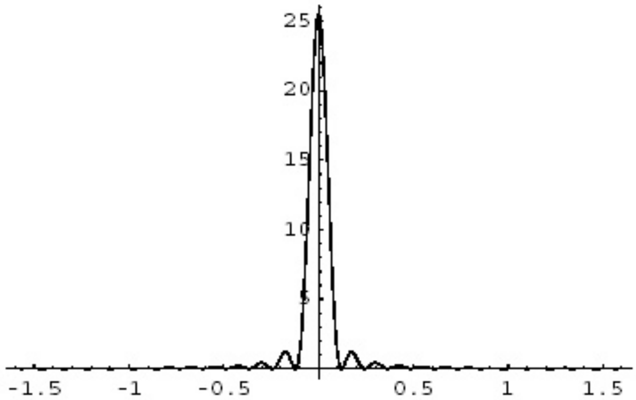

Figura 1.14: $K_{50}(t)$

1.6 Caracterització de sèries de Fourier de funcions diverses.

Intentarem trobar criteris per identificar les sèries trigonomètriques que corresponguin a les sèries de Fourier de funcions de diferents tipus ($\mathcal{C}(\mathbb{T}),\ L^p(\mathbb{T}), ...$).

1.6.1 El cas d'$L^2(\mathbb{T})$.

Aquest és un cas especial degut a què el sistema trigonomètric és ortonormal en $L^2(\mathbb{T})$, fet que ens permet concloure amb no massa dificultat que tota sèrie de Fourier d'una funció d'aquest espai hi convergeix en aquesta norma. Per a una informació més extesa, pot consultar-se [1] Per començar, ens caldrà comentar breument algunes definicions bàsiques.

Definició 1.6.1. *(Aplicació lineal, semilineal) Siguin E, $F \subset \mathbb{K}(:= \mathbb{R}$ o $\mathbb{C})$ espais vectorials. Una aplicació*

$$u : F \to E,$$

és lineal si satisfà:

(i) Per tot $x,\ y \in E$, $u(x+y) = u(x) + u(y)$.
(ii) Per tot $h \in \mathbb{C}$, $u(hx) = hu(x)$.

Si u verifica (i) i enlloc de (ii) compleix:

(ii') Per tot $h \in \mathbb{C}$, $u(hx) = \overline{h}u(x)$,

diem que u és semilineal.

Definició 1.6.2. *(Producte escalar) Sigui E un espai vactorial. Un producte escalar en E és una aplicació*

$$(\cdot,\cdot)_E : E \times E \to \mathbb{K}$$

tal que:
(i) Per tot $x \in E$,

$$\begin{aligned}(\cdot, x)_E : & E \to \mathbb{K} \\ & y \mapsto (y, x)_E\end{aligned}$$

és lineal, i

$$\begin{aligned}(x, \cdot)_E : & E \to \mathbb{K} \\ & y \mapsto (x, y)_E\end{aligned}$$

és semilineal.
(ii) Per tot x, $y \in E$, $(x, y)_E = \overline{(y, x)_E}$.
(iii) Per tot $x \in E$, $(x, x)_E \geq 0$ i és 0 si i només si $x = 0$.

Definició 1.6.3. *(Norma induida per un producte escalar) Donats un espai vectorial E i un producte escalar $(\cdot,\cdot)_E$ en E, aquest indueix una norma en l'espai:*

$$\|x\|_E := (x, x)_E^{1/2}.$$

(Es comprova trivialment que $\|\cdot\|_E$ així definida és norma en E).

Definició 1.6.4. *(Espai vectorial complet) Donat E espai vectorial, $\|\cdot\|_2$ norma en E, diem que E és complet si tota successió de Cauchy d'elements d'E convergeix en E (en la norma donada).*

Observació 1.6.5. *Cal no confondre la completesa d'un espai vectorial acabada de definir amb la completesa d'un sistema $\{e_i\}_{i \in I}$ dins un espai, concepte tractat al primer capítol (Teorema de Lebesgue (1.1.9)).*

Definició 1.6.6. *(Espai de Hilbert) Un espai de Hilbert és un espai vectorial complet H amb un producte escalar $(\cdot,\cdot)_H$. El parell es nota $(H, (\cdot,\cdot)_H)$.*

Definició 1.6.7. *(Producte escalar a $L^2(\mathbb{T})$) Definim el producte escalar entre dues funcions f, g d'$L^2(\mathbb{T})$ com*

$$(f, g)_2 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt.$$

Les propietats de producte escalar es verifiquen clarament.

Observació 1.6.8. *$(L^2(\mathbb{T}), (\cdot,\cdot)_2)$ és un espai de Hilbert.*

Observació 1.6.9. *Notem que la norma generada per $(\cdot,\cdot)_2$ en $L^2(\mathbb{T})$ és la usual. Donada $f \in L^2(\mathbb{T})$,*

$$\|f\|_2^2 = (f, f)_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{f(t)}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt.$$

Proposició 1.6.10. *El sistema trigonomètric $\{e^{ik}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ és ortonormal en $(L^2(\mathbb{T}), (\cdot,\cdot)_2)$.*

Demostració:
Per començar, veiem que per tot $j, k \in \mathbb{Z}$, $k \neq j$, $(e^{ik}, e^{ij})_2 = 0$:

$$\begin{aligned}(e^{ik}, e^{ij})_2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\overline{e^{ijt}}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}e^{-ijt}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-j)t}\, dt \neq 0 \Leftrightarrow k = j, \text{ com s'ha vist en altres ocasions.}\end{aligned}$$

Amb això tenim que el sistema és ortogonal. Resta doncs veure que els seus elements tenen norma 1. Així doncs, fixat un $k \in \mathbb{Z}$,

$$\left\|e^{ik}\right\|_2^2 = (e^{ik}, e^{ik})_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}e^{-ikt}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\, dt = 1.$$

Vista aquesta darrera condició, concloem la ortonormalitat del sistema. □

Observació 1.6.11. *Pel Teorema de Lebesgue (1.1.9) sabem que el sistema trigonomètric és complet en $L^2(\mathbb{T})$, de manera que en $L^2(\mathbb{T})$, $\{e^{ik}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ és un sistema ortonormal complet.*

Proposició 1.6.12. *(Teorema de Pitàgores) Siguin $x_1, ..., x_n \in H$ espai de Hilbert ortogonals 2 a 2. Aleshores,*

$$\|x_1\|_H^2 + ... + \|x_n\|_H^2 = \|x_1 + .. + x_n\|_H^2 .$$

Demostració:

$$\begin{aligned}\|x_1 + .. + x_n\|_H^2 &= (x_1 + ... + x_n, x_1 + ... + x_n)_H \underbrace{=}_{\{x_i\}\text{ ortogonals}} (x_1, x_1)_H + ... + (x_n, x_n)_H \\ &= \|x_1\|_H^2 + ... + \|x_n\|_H^2 .\end{aligned}$$

□

Definició 1.6.13. *(Projecció òptima) $A \subset M$ espai mètric, $x \in M$. Diem que $y \in A$ és projecció òptima d'x en A si $d(x, A) = d(x, y)$. D'existir, notem $y = P_A(x)$.*

Teorema 1.6.14. *(de la Projecció) Sigui C subespai convex tancat d'H Hilbert. Aleshores, per tot $x \in H$, $\exists! P_C(x) \in C$ tal que $\|x - P_C(x)\|_H = d(C, x)$.*

Demostració:
La unicitat se'n deriva de la convexitat de C:
Siguin $y,\ z \in C$ tal que $\|y-x\|_H = \|z-x\|_H = d(x,C)$. Aleshores, si considerem el punt $a := \frac{y+z}{2}$ (que sabem que pertany a C per convexitat), tenim

$$\|x-a\|_H = \frac{1}{2}\|x-y+x-z\|_H \leq \frac{1}{2}(\|x-y\|_H + \|x-z\|_H) = d(x,C).$$

L'única opció possible és que $\|x-a\|_H = d(x,C)$, doncs en altre cas y i z no serien projecció òptima. Notem, però, que el segment que uneix x amb a és perpendicular al que uneix y amb z, de manera que aplicant el Teorema de Pitàgores per a triangles rectangles, tenim:

$$d(y,x)^2 = d(y,a)^2 + d(a,x)^2.$$

Sabem, però, que $d(y,x) = d(a,x)$, de manera que l'anterior igualtat es redueix a

$$d(y,a) = 0,$$

cosa que porta a $d(y,z) = 0$, i per tant a $y = z$.

Vista la unicitat, resta comprovar l'existència:
Sigui $d = d(x,C)$. El que per tot $\varepsilon > 0$ tinguem un $y \in C$ tal que $d(y,x) \leq d + \varepsilon$ fa que podem construir una successió $\{y_n\}_{n\in N} \subset C$ de forma que $\lim_n d(y_n,x) = d$. És obvi que aquesta successió és de Cauchy (doncs fixat un ε, tindrem un n_0 tal que per tot $j > n_0$, $d \leq d(y_j,x) \leq d+\varepsilon$, cosa que deriva, per la desigualtat triangular de les distàncies, en que per tot $j,\ i > n_0$, $d(y_i,y_j) \leq \varepsilon$). El fet que H sigui Hilbert fa que la successió convergeixi a un punt y, que complirà $d(x,y) = d$. Com la successió d'y_n's és de C, i C és tancat, tenim que $y \in C$ i $P_C(x) = y$, amb la qual cosa l'existència queda vista.

Això acaba el teorema. □

Definició 1.6.15. *(Ortogonal a un espai) Donat un espai vectorial F contingut en H Hilbert, definim l'ortogonal d'F com:*

$$F^T := \{x \in H \textit{ tal que } (x,y)_H = 0 \textit{ per tot } y \in F\}.$$

Teorema 1.6.16. *Si F és un subespai vectorial tancat d'un espai de Hilbert H aleshores $H = F \oplus F^T$. Per tot $x \in H$, $x = P_F(x) + P_{F^T}(x)$.*

Demostració:
Fem $y = P_F(x) \in F$. Per començar, veiem que $z := x - y$ pertany a F^T: suposem el contrari, és a dir, suposem tenir $s \in F$, tal que $(s,z)_H \neq 0$. Aleshores, per ser $z = x - y = x + \underbrace{P_F(y)}_{=P_F(x)}$, es té que

$$P_F(z) = P_F(x + P_F(x)) \underbrace{=}_{P_F^2 = P_F} P_F(x) - P_F(x) = 0,$$

cosa que implica $P_{\langle s\rangle}(z) = (s, z)_H = 0$, que és contradicció provinent de suposar $z \notin F^T$. Només resta raonar que $z = P_{F^T}(x)$. Això és clar a partir de Pitàgores (que podem aplicar perquè, per definició, F i F^T ortogonals), doncs, si prenem un $u \in F^T$ qualsevol, tenim:

$$\|x-u\|_H^2 = \|x-z+z-u\|_H^2 \underbrace{=}_{\text{Pitàgores}} \|x-z\|_H^2 + \|z-u\|_H^2 \geq \|x-z\|_H^2 .$$

Amb això ja tenim $x = y + z$, amb $y = P_F(x)$ i $z = P_{F^T}(x)$, cosa que conclou el teorema. □

Corol·lari 1.6.17. *Donat un espai Hilbert H, i F un subespai tancat d'H, aleshores, per tot $x \in H$, $\|P_F(x)\|_H \leq \|x\|_H$.*

Demostració:
Pel teorema anterior, prenent $F \in H$ tancat, tenim que $x = P_F(x) + P_{F^T}(x)$. D'aquí,

$$\|x\|_H^2 = \|P_F(x) + P_{F^T}(x)\|_H^2 \underbrace{=}_{\text{Pitàgores}} \|P_F(x)\|_H^2 + \|P_{F^T}(x)\|_H^2 ,$$

cosa que ens dòna que, $\|P_F(x)\|_H^2 \leq \|x\|_H^2$ i clou el corol.lari. □

Proposició 1.6.18. *(Desigualtat de Bessel) Si $\{e_i\}_{i\in I}$ és sistema ortonormal d'un espai de Hilbert H, i $x \in H$, aleshores*

$$\sum_{i\in I} |(x, e_i)_H|^2 \leq \|x\|_H^2.$$

Demostració:
Si definim $F \in H$ fent

$$F := \langle \{e_j\}_{j\in J} \rangle ,$$

amb J finit, és clar que $\|P_F(x)\|_H^2 \leq \|x\|_H^2$. D'altra banda, el Teorema de Pitàgores, que podem aplicar per ser el sistema ortogonal, ens diu que $\|P_F(x)\|_H^2 = \sum_{j\in J} |(x, e_j)_H|^2$, de manera que tenim

$$\sum_{j\in J} |(x, e_j)_H|^2 \leq \|x\|_H^2 .$$

En ser cert per tot J finit podem prendre suprems i concloure el resultat desitjat. □

Teorema 1.6.19. *(Fisher-Riesz) Sigui $\{e_i \mid i \in I\}$ un sistema ortonormal en un espai de Hilbert H. Aleshores, són equivalents:*
(i) El sistema és complet.
(ii) Per tot $x \in H$,

$$x = \lim_n s_n(x) = \sum_{i\in I} (x, e_i)_H e_i.$$

(iii) (Identitat de Parsaval) Per tot $x \in H$,

$$\|x\|_H = \sum_{i\in I} |(x, e_i)_H|^2.$$

Demostració:

$(i) \Rightarrow (ii)$:

Sigui $z := \lim_n s_n(x) = \sum_i \underbrace{(x, e_i)_H}_{=c_i(x)} e_i$, aleshores, notem que, en particular, per tot i, $c_i(z) = c_i(x)$, de manera que si definim la funció

$$h := x - z,$$

tenim, per tot i, $c_i(h) = 0$, cosa que, per ser el sistema complet, es tradueix en que $h \equiv 0$, de manera que $z \equiv x$ i (ii) queda vist.

$(ii) \Rightarrow (iii)$:

Per continuïtat de la norma, tenim

$$x = \lim_n s_n(x) \Rightarrow \|x\|_H^2 = \left\|\lim_n s_n(x)\right\|_H^2 \Rightarrow \|x\|_H^2 = \lim_n \|s_n(x)\|_H^2,$$

però, de la desigualtat de Bessel, aplicable per ser el sistema ortogonal:

$$\lim_n \|s_n(x)\|_H^2 = \left\|\sum_j (x, e_i)\right\|_H^2 \underbrace{\geq}_{\text{Bessel}} \sum_j |(x, e_i)|_H^2 |e_i|_H^2 \underbrace{=}_{\text{base ortonormal}} \sum_j |(x, e_i)|^2.$$

Com sempre tenim (desigualtat triangular)

$$\left\|\sum_j (x, e_i)\right\|_H^2 \leq \sum_j |(x, e_i)|^2,$$

la identitat de Parsaval queda provada.

$(iii) \Rightarrow (i)$:

Cal veure que el sistema és complet, és a dir, que si tenim un $x \in H$ de forma que per tot $i \in I$ $(x, e_i)_H = 0$, aleshores $x \equiv 0$. Veurem que la norma d'x és 0:

$$\|x\|_H^2 = \sum_{i \in I} \underbrace{|(x, e_i)|_H^2}_{=0} = 0.$$

Això obviament implica $x \equiv 0$ i dóna la completesa del sistema. $\square$

Podem aplicar aquest teorema a $L^2(\mathbb{T})$, cosa que ens dóna de manera immediata la convergència en la norma L^2 de tota sèrie de Fourier d'una funció d'$L^2(\mathbb{T})$ a dita funció, a més d'un altre resultat que no per no ser el cercat deixa de tenir importància:

Teorema 1.6.20. *(d'Inversió de Fourier) Sigui $f \in L^2(\mathbb{T})$, aleshores,*

(i) $\lim_n \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - s_n(f, t)|^2 \, dt = 0.$

(ii) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2.$

Per acabar, aquest resultat ens permet veure l'existència d'un isomorfisme isomètric entre $L^2(\mathbb{T})$ i ℓ^2 a través de sèries de Fourier.

Corol·lari 1.6.21. *Existeix un isomorfisme isomètric*

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2.$$

Demostració:
Definim l'isomorfisme:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} :& L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2 \\ & f \to \{c_j(f)\}_{|j|\geq 0}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} :& \ \ell^2 \longrightarrow L^2(\mathbb{T}) \\ \{c_j\}_{|j|\geq 0} &\to f_{c_j} := \sum_j c_j e^{ijt}. \end{aligned}$$

Sabem que $\mathcal{F}^{-1}$ està ben definit degut que tota sèrie $\{c_j\}_j \subset \ell^2$ expressada en forma $\sum_j c_j e^{ijt}$ convergeix a una funció $f \in L^2(\mathbb{T})$, en virtut del Teorema d'Inversió de Fourier. Amb això ja concloem que $\mathcal{F}$ és un isomorfisme. La identitat de Parsaval ens dóna directament que és isomètric. $\square$

1.6.2 Cas general.

En aquest apartat intentarem donar criteris per a veure quan una sèrie de Fourier d'una funció f contínua o d'un espai $L^p(\mathbb{T})$, amb $p \neq 2$, convergeix en la norma corresponent a aquesta.

Teorema 1.6.22. *(Criteri de classificació de sèries de Fourier de funcions contínues). Si considerem*

$$s_n(t) = \sum_{|j|\leq n} c_j e^{ijt},$$

i

$$\sigma_n(t) = \sum_{|j|\leq n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) c_j e^{ijt}$$

les seves mitjes de Cesàro, aleshores $\{s_n\}_n$ *són les sèries de Fourier d'una funció* $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}) \Leftrightarrow$ $\{\sigma_n(t)\}_n$ *convergeix uniformement en* $\mathbb{T}$.

Demostració:
$\Rightarrow$:
Pel Teorema de Féjer, (amb l'interval de continuïtat tot $\mathbb{T}$) tenim la convergència uniforme de les σ_n's.

$\Leftarrow$:
Sigui $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ límit uniforme de les σ_n's. Aleshores, fixat un j, tenim:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n(t)e^{-ijt}\,dt &= \frac{1}{2\pi}\sum_{|k|\le n}\int_{-\pi}^{\pi} c_k e^{ikt}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)e^{-ijt}\,dt \\
&= \sum_{|k|\le n} c_k \frac{1}{2\pi}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-j)t}\,dt}_{=1 \text{ sol si } k=j,\text{ si no és } 0} \\
&= c_j\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right) \to c_j, \text{ quan } n\to\infty.
\end{aligned}$$

La convergència uniforme de la successió de les σ_n cap a f ens dóna la convergència integral, de manera que tenim

$$\begin{cases}
\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n(t)e^{-ijt}\,dt \xrightarrow{n} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ijt}\,dt. \\
\\
\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n(t)e^{-ijt}\,dt \xrightarrow{n} c_j,
\end{cases}$$

cosa que ens diu que $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ijt}\,dt = c_j$ i que per tant $\{s_n\}_n$ són les sèries de Fourier de la funció f. Amb això el resultat queda provat. $\square$

Per a les funcions $L^p(\mathbb{T})$, ens cal la següent observació:

Observació 1.6.23. *Amb les notacions anteriors,*

$$\begin{aligned}
\|\sigma_n(f,x)\|_p = \|f * 2K_n(x)\|_p &= \left\|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_n(t)\,dt\right\|_p \\
&\underbrace{=}_{*\ commuta} \left\|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)K_n(x-u)\,du\right\|_p \\
&\underbrace{\le}_{\text{Desigualtat de Minkowski}} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|f\|_p\,\|K_n\|_p\,du \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|f\|_p\,du = \|f\|_p,
\end{aligned}$$

degut a que

$$\|K_n\|_p \le \|K_n\|_1 \le \frac{1}{2}\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,dt}_{=1} = \frac{1}{2},$$

és a dir, que la successió $\{\sigma_n(f)\}_n$ està acotada en $L^p(\mathbb{T})$ per $\|f\|_p$.

Teorema 1.6.24. *Sigui $\{f_n\}_n \subset L^p(\mathbb{T})$, amb $1 < p \leq \infty$ de forma que, per tot n, $\|f_n\|_p \leq M$. Aleshores, existeix una successió $\{n_k\}_k$ i una funció $f \in L^p(\mathbb{T})$, $\|f\|_p \leq M$ tal que si*

$$\lim_{n_k \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{n_k}(t) g(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t)\, dt$$

per tot $g \in L^q(\mathbb{T})$, on $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (es fa $q = 1$ quan $p = \infty$), aleshores, $f_{n_k} \to f$ en $L^p(\mathbb{T})$.

Demostració:
Farem la prova en 3 passos:
(i) Existeix una successió $\{n_k\}_k$ tal que per tot polinomi trigonomètric g,

$$\exists\, l = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{n_k}(t) g(t)\, dt,\ |l| < \infty.$$

Veiem-ho:
Considerem $\{g_i\}_{i \geq 1}$ polinomis trigonomètrics. Definim:

$$c_{n,m} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(t) g_m(t)\, dt.$$

Aleshores,

$$\begin{aligned} |c_{n,m}| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(t) g_m(t)\, dt \right| \\ &\underbrace{\leq}_{\text{Hölder}} \|f_n\|_p \|g_m\|_q \leq M \|g_m\|_q, \end{aligned}$$

per tot n, m. Com, per tot m, g_m acotat per ser polinomi trigonomètric, en particular totes les $c_{n,m}$ estan acotades. Comencem ara un procés iteratiu:
Considerem la successió $\{c_{n,1}\}_n$, acotada per $M \|g_1\|_q$ en $B(0, M \|g_1\|_q)$ compacte. Podem doncs trobar una subsuccessió $\{m_k\}_k \subset \{n_k\}_k$ tal que $\exists \lim_k c_{m_k,1}$.
Per $m = 2$, repetim l'argument per la successió $\{c_{m_k,2}\}$, amb la qual cosa obtenim una segona successió en la que tenen límit tant $c_{\cdot,1}$ com $c_{\cdot,2}$.
Iterant aquest procés, podem aconseguir una parcial $\{s\}_k$ de la successió original d'n's de manera que $\exists \lim_s \{c_{s,m}\}_{s,m}$ per tot valor m fixat, amb la qual cosa el resultat és cert.

(ii) Si considerem $\{n_k\}_k$ la successió final obtinguda a (i), i definim

$$L(g) = \lim_k \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{n_k}(t) g(t)\, dt,$$

aleshores L és lineal acotada en els polinomis trigonomètrics que pot extendres a $L^q(\mathbb{T})$. També,

$$\|L(h)\|_q \leq M \|h\|_q,\ \forall h \in L^q(\mathbb{T}).$$

Veiem-ho:
La linealitat d'L és clara:

$$L(g_1 + sg_2) = \lim_k \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{n_k}(t)g_1(t) + sf_{n_k}(t)g_2(t)\,dt$$
$$= L(g_1) + sL(g_2).$$

També ho és l'acotació:
$$|L(g)| = \left|\lim_k c_{n_k,j}\right| \le M\,\|g\|_q\,.$$

Ara aplicarem que els polinomis trigonomètrics són densos en $L^q(\mathbb{T})$ (vist a 1.1.19). Aleshores, donada una funció $h \in L^q(\mathbb{T})$ qualsevol, tenim una successió de polinomis trigonomètrics $\{g_k\}_k$, tal que
$$\lim_n \|h - g_n\|_q = 0,$$
de forma creixent (i.e. $\sup_n \|g_n\|_q \le \|h\|_q$).
En particular, a partir de $\lim_n \|h - g_n\|_q = 0$ és clar que $\{g_k\}_k$ és de Cauchy, i, per tant, en ser $L^q(\mathbb{T})$ Banach, convergent.
Així doncs, podem definir
$$L(h) = \lim_k L(g_k),$$
funció extensió ben definida en $L^q(\mathbb{T})$. Només resta veure'n l'acotació, que és trivial:

$$|L(h)| \le \limsup_n |L(h) - L(g_n)| + \limsup_n |L(g_n)| \le M\,\|g_n\|_q \le M\,\|h\|_q\,.$$

(iii) (Teorema de representació de Riesz) Cada operador lineal acotat en $L^q(\mathbb{T})$ de *(ii)* pot expressar-se com
$$L(h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t)f(t)\,dt,$$
on $f \in L^p(\mathbb{T})$ i $\|f\|_p = \sup \left(\dfrac{|L(h)|}{\|h\|_q} \right) \le M.$
Veiem-ho:
Comencem per les funcions de tipus $\chi_{(-\pi,x]}$ (funcions característiques en l'interval $(-\pi, x]$):
Definim $F(x) := L(\chi_{(-\pi,x]})$. Veiem que F és contínua, és a dir, que donada una successió d'intervals $\{I_j\}_j \subset \mathbb{T}$, per tot ε fixat, existeix un δ tal que si

$$\sum_j |I_j| < \delta, \text{ aleshores } \sum_j |F(b_j) - F(a_j)| < \varepsilon.$$

Considerem la funció
$$\phi(t) := \sum_{j=1}^{n} \operatorname{sign}(F(b_j) - F(a_j))\chi_{I_j}(t).$$

Aleshores, d'una banda,

$$\begin{aligned}\|\phi\|_q^q &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_j \underbrace{|\mathrm{sign}(F(b_j)-F(a_j))|^q}_{=1}\ \chi^q_{I_j(t)}\,dt\\ &= \sum_j |I_j|,\end{aligned}$$

i, de l'altra, per la linealitat d'L,

$$\begin{aligned}L(\phi) \underbrace{=}_{L \text{ lineal}} &\sum_j \mathrm{sign}(F(b_j)-F(a_j))L(\chi_{I_j})\\ &= \sum_j \mathrm{sign}(L(\chi_{I_j}))L(\chi_{I_j}) = \sum j|L(\chi_{I_j})|\\ &= \sum_j |F(b_j)-F(a_j)|.\end{aligned}$$

Amb aquestes dades, només resta aplicar l'acotació d'L per a trobar un δ adient:

$$\sum_j |F(b_j)-F(a_j)| = L(\phi) \le M\,\|\phi\|_q \le \left(M\sum_j |I_j|\right)^{1/q},$$

de manera que agafant $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^q$ en tenim prou, i per tant la continuitat d'F queda provada.
Tenim

$$L(\chi_{(-\pi,x]}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\chi_{(-\pi,x]}(t)f(t)\,dt,$$

ben definida per tota funció característica en un interval, de manera que podem extendre L a una funció del tipus de ϕ (per ser ϕ combinació lineal de funcions característiques). Amb anàleg raonament, si considerem un polinomi trigonomètric real h, sabem que hi ha una successió $\{\phi_n\}_n$ del tipus de ϕ que hi convergeixen g.p.t., de manera que

$$\begin{aligned}L(h) &= \frac{1}{2\pi}\int_{pi}^{\pi} h(t)f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\lim_n \phi_n(t)f(t)\,dt\\ &\underbrace{=}_{\text{convergència dominada per } \|L\|} \frac{1}{2\pi}\lim_n \int_{-\pi}^{\pi}\phi_n(t)f(t)\,dt\\ &= \lim_n L(\phi_n),\end{aligned}$$

amb la qual cosa tenim que L està ben definida pels polinomis trigonomètrics reals, cosa que ens porta directament a la mateixa conclusió per polinomis trigonomètrics complexos (expressables com a suma de dos reals). El fet que els polinomis trigonomètrics són densos en $L^p(\mathbb{T})$ ens dóna el resultat per a funcions d'aquest espai.
Només resta l'acotació d'f, per la desigualtat de Hölder. $\square$

Aquest resultat ens dóna de forma gairebé directe una condició necessària i suficient per a què una sèrie trigonomètrica sigui sèrie de Fourier d'una funció $f \in L^p(\mathbb{T})$:

Teorema 1.6.25. *Una condició necessària i suficient per a què una sèrie trigonomètrica* $\sum_j c_j e^{ijt}$ *sigui sèrie de Fourier d'una funció* $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 < p \leq \infty$, *és que les seves mitges de Cesàro estiguin acotades en* L^p. *Aleshores, si* $\|\sigma_n\|_p \leq k$, $\|f\|_p \leq k$.

Demostració:
Considerem la successió $\{\sigma_n\}_n$ de mitjanes de Cesàro de la sèrie donada. En ser, per tot j, $e^{-ijt} \in L^p(\mathbb{T})$, podem aplicar la proposició anterior per dir que existeix una successió $\{n_k\}_k$ d'índex amb $\lim_k n_k = \infty$ i $f \in L^p(\mathbb{T})$ de manera que

$$\lim_k \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_{n_k} e^{-ijt}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ijt}\, dt.$$

Però:

$$\begin{aligned} \lim_k \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_{n_k} e^{-ist}\, dt &= \lim_k \sum_{|j| \leq n_k} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 - \frac{|j|}{n_k + 1}\right) c_j e^{ijt} e^{-ist}\, dt \\ &= \lim_k \frac{1}{2\pi} \left(1 - \frac{|s|}{n_k + 1}\right) c_s \int_{-\pi}^{\pi} dt \\ &= \lim_k \left(1 - \frac{|s|}{n_k + 1}\right) c_s = c_s. \end{aligned}$$

Així doncs, tenim que per tot j,

$$c_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ijt}\, dt = \lim_k \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_{n_k} e^{-ijt}\, dt,$$

de manera que la nostra sèrie original $\sum_j c_j e^{ijt}$ és la sèrie de Fourier de la funció f. L'acotació d'f ve donada pel fet que la successió de σ's, que hi convergeix feblement, estigui uniformement acotada per un valor k. $\square$

1.7 El Fenomen de Gibbs.

A l'estudiar exemples de sèries de Fourier de funcions discontínues hem observat que sembla que en els punts de discontinuïtat l'aproximació no és bona per molt que augmentem l'índex de la sèrie pertinent. Això és el que es coneix com a Fenomen de Gibbs, que en aquesta secció estudiarem amb cert detall. Pot trobar-se informació addicional a [11]

1.7.1 La funció ϕ.

Per a l'estudi que ens proposem, ens serà molt útil familiaritzar-nos amb la funció

$$\phi(x) := \frac{\pi - x}{2},\ 0 < x < 2\pi.$$

Per començar, calculem-ne la seva sèrie de Fourier:

- Càlcul de $c_k(\phi)$, amb $k \neq 0$.

$$2\pi c_k(\phi) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi - x}{2} e^{-ikx}\, dx = \frac{\pi}{2} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}\, dx}_{=0}$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-ikx}\, dx = -\frac{1}{2}\left(\left[\frac{-xe^{-ikx}}{ik}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{ik}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}\, dx}_{=0}\right)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\pi}{ik}, \text{ si } k \text{ parell.} \\ \\ -\dfrac{\pi}{ik}, \text{ si } k \text{ senar.} \end{cases}$$

- Càlcul de $c_0(\phi)$.

$$c_0(\phi) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi - x}{2}\, dx = \frac{\pi}{2} 2\pi - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Així doncs,

$$s_n(\phi, t) = \sum_{1 \leq |j| \leq n} (-1)^j \frac{1}{2ij} e^{ijt} = \sum_{1 \leq < j \leq n} \frac{1}{j}(e^{ijt} - e^{-ijt}) = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\sin jt}{j},$$

per tot n.

Proposició 1.7.1. *Per tot n, $s_n(\phi, t) = \frac{\pi}{2} \underbrace{\left(\frac{2}{\pi}\int_0^x D_n(t)\, dt\right)}_{=\alpha_n(x)} - \frac{t}{2}$.*

Demostració:
Per començar, notem el següent resultat relatiu al nucli de Dirichlet:

Observació 1.7.2. *Fixat n, $D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{j=0}^{n} \cos jt$.*

Aquest fet és clar a partir de la definició:

$$D_n(t) = \frac{1}{2}\sum_{|j| \leq n} e^{ijt} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{1 \leq j \leq n} e^{ijt} + e^{-ijt} = \frac{1}{2} + \sum_{1 \leq j \leq n} \cos jt.$$

Aleshores, tenim que

$$\int_0^x D_n(t)\, dt = \int_0^x \left(\frac{t}{2} + \sum_{1 \leq j \leq n} \cos jt\right) dt = \frac{x}{2} + \sum_{1 \leq j \leq n} \int_0^x \cos jt\, dt$$
$$= \frac{x}{2} + \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\sin jt}{j} = \frac{x}{2} + s_n(\phi, t).$$

$\square$

Afinarem aquest resultat segons el que ens convé.

Definició 1.7.3. *(γ_n) Notem, fixat n,*

$$\gamma_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\sin nt}{t}\,dt,\ \ 0 \le x \le \pi.$$

Proposició 1.7.4. $\lim\limits_{n\to\infty} \|\alpha_n - \gamma_n\|_\infty = 0.$

Demostració:
Com sabem (Observació (1.2.9)) que $\lim\limits_{n\to\infty} \|\alpha_n - \beta_n\|_\infty = 0$, el resultat que cerquem quedarà vist si veiem que $\lim\limits_{n\to\infty} \|\beta_n - \gamma_n\|_\infty = 0$.
Així doncs, com tenim

$$\begin{aligned}\gamma_n(x) - \beta_n(x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^x \left(\frac{\sin nt}{t} - \frac{\sin nt}{2\tan t/2}\right)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^x \sin nt\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2\tan t/2}\right)dt\\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^x \sin nt\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\mathrm{cotg}\, t/2\right)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi w_x(t)\sin nt\,dt,\end{aligned}$$

on

$$w_x(t) = \begin{cases}\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{2}\mathrm{cotg}\, t/2, \text{ si } 0 < t < x.\\ 0, \text{ si } x \le t.\end{cases}$$

Es té que w_x és de variació acotada en $(0,\pi)$. Resta considerar el següent lema:

Lema 1.7.5. *Sigui $f \in VA[-\pi,\pi]$. Aleshores, existeix un $c > 0$ tal que*

$$|c_j(f)| \le \frac{cV(f)}{|j|},$$

per tot $j \ne 0$.

Demostració:
Aplicant la definició:

$$c_j(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ijt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\left(\left[-f(t)\frac{e^{-ijt}}{ij}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{ij}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ijt}\,df(x)\right),$$

i, prenent valor absolut, es té que

$$|c_j(f)| \le \frac{1}{2\pi|j|}\left(\underbrace{|f(\pi) - f(-\pi)|}_{=V_0\le V} + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}|df|}_{=V}\right) \le \frac{V}{\pi|j|}.$$

$\square$

Aplicant aquest resultat, (considerant l'extensió pertinent d'w_x) tenim, doncs, que

$$|\gamma_n(x) - \beta_n(x)| \underbrace{\leq}_{w_x \in VA[-\pi,\pi]} \frac{cV(w_x)}{n} \overset{n\to\infty}{\to} 0, \text{ uniformement en } x.$$

$\square$

Observació 1.7.6. *Gràcies a aquesta proposició, podem dir que, de fet,*

$$s_n(\phi, x) + \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}\gamma_n(x) + o(1),$$

uniformement tant en x com en n. Podem doncs considerar sempre que

$$s_n(\phi, x) = \int_0^{nx} \frac{\sin t}{t}\, dt + R_n(x),$$

(canvi de variable a γ), amb $|R_n(x)| < \varepsilon$ a partir d'un $n_0(\varepsilon)$ pertinent, per tot $x < \varepsilon$ (això darrer ve de què cal també considerar l'expressió $x/2$).
Amb això, si considerem

$$G(x) := \int_0^{x} \frac{\sin t}{t}\, dt,$$

tenim que

$$|s_n(\phi, \pi/n) - G(\pi)| = \left|R_n\left(\frac{\pi}{n}\right)\right| < \varepsilon,$$

a partir d'un cert $n_0(\varepsilon)$, o, el que és el mateix, que

$$s_n(\phi, \pi/n) \overset{n\to\infty}{\to} G(\pi).$$

Vist aquest fet, estudiarem el comportament de la funció G.

Notem, d'una banda, que

$$G'(x) = \frac{\sin x}{x},$$

que és 0 si i només si $x = k\pi$, per algun k enter. D'altra banda, també sabem que

$$\left|\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt\right|, \text{(veure [6] per a detalls)}$$

és decreixent en k. Tot això ens permet concloure que la funció G assoleix màxims M_{2j+1} en $(2j+1)\pi$ per tot j, amb $M_{j_1} > M_{j_2}$ si $j_1 < j_2$, i mínims m_{2j} en $2j\pi$ per tot j, amb $m_{j_1} < m_{j_2}$ si $j_1 < j_2$. En particular, tenim que

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{x\to\infty} G(x) < G(\pi) = 1.8519.$$

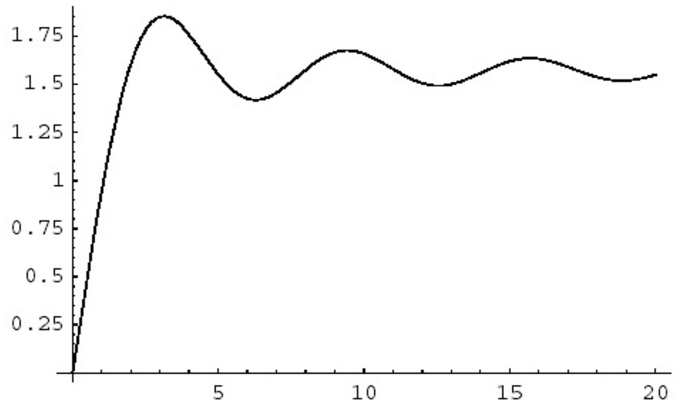

Figura 1.15: $G(x),\ 0 \leq x \leq 20$.

Així doncs, malgrat que per tota x entre 0 i π

$$s_n(\phi, x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \phi(x),$$

(doncs en aquest domini la funció ϕ és $\mathcal{C}^\infty$), i tenint present que $s_n(\phi, 0) = 0$ per tot n, podem deduïr que les sèries $s_n(\phi, t)$ es van condensant a l'interval $[0, G(\pi)]$. Sabent que $\phi(0) = \pi/2$, tenim que l'error de la sèrie de Fourier respecte ϕ en el 0 tendeix a $\dfrac{G(\pi)}{\pi/2} \approx 1.179$.
Això es el que es coneix com a Fenomen de Gibbs, i en aquest cas es dóna anàlogament amb els mateixos raonaments aproximant-nos per l'esquerra al punt $x = 0$.
Visualitzem aquest fet amb diverses gràfiques de ϕ contra la seva sèrie de Fourier:

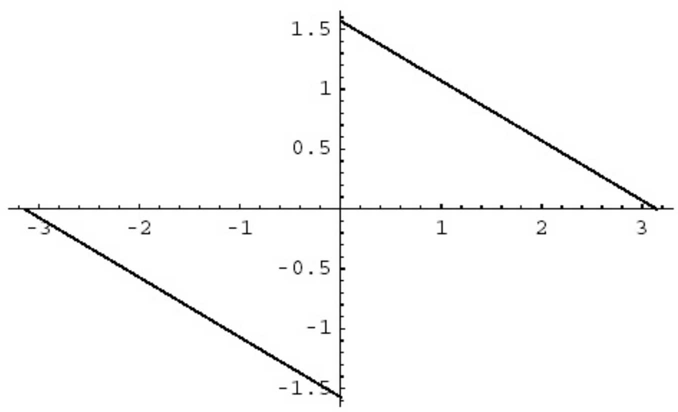

Figura 1.16: Funció $\phi(x),\ -\pi < x < \pi$.

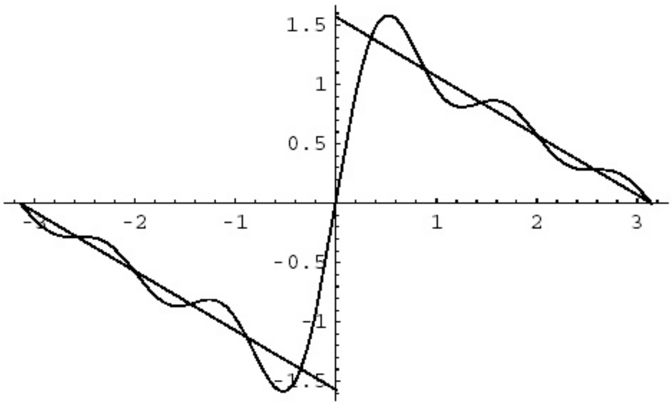

Figura 1.17: Superposició ϕ amb $s_5(\phi, t)$.

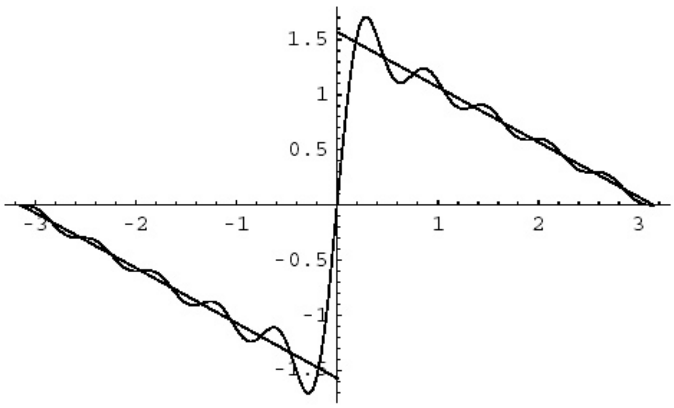

Figura 1.18: Superposició ϕ amb $s_{10}(\phi, t)$.

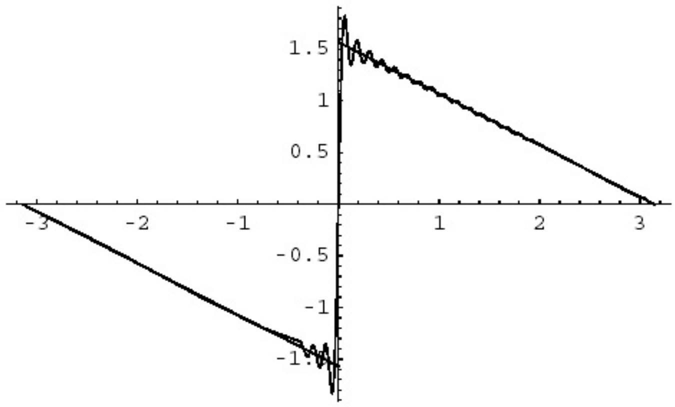

Figura 1.19: Superposició ϕ amb $s_{50}(\phi, t)$.

1.7.2 Definició i caracterització del Fenomen de Gibbs.

El Fenomen de Gibbs s'acostuma a descriure de la següent manera:
Sigui $\{f_n\}_n$ tal que $f_n(x) \overset{n\to\infty}{\to} f(x)$ per $x_0 < x < x_0 + h$, i suposem que existeix $f(x_0^+)$. Si

$$\limsup_{x\to x_0^+,\ n\to\infty} f_n(x) > f(x_0^+),$$

o bé

$$\liminf_{x\to x_0^+,\ n\to\infty} f_n(x) < f(x_0^+),$$

es diu que $\{f_n\}_n$ presenta el Fenomen de Gibbs a la dreta d'x_0. El Fenomen de Gibbs per l'esquerra es defineix simètricament.

Teorema 1.7.7. *Sigui f de variació acotada sense discontinuïtats evitables. Aleshores, la sèrie de Fourier de la funció f presenta el Fenomen de Gibbs en els seus punts de discontinuïtat, i enlloc més.*

Demostració:
Suposem, per cada x, $f(x) = \dfrac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$. Sigui y tal que $f(y+0)+f(y-0) = l \neq 0$. Aleshores, la funció

$$\Delta(x) = f(x) - \frac{l}{\pi}\phi(x-y),$$

és contínua en y, doncs

$$\begin{aligned}\lim_{z\to y}\Delta(z) &= \lim_{z\to y}\left(f(z) - \frac{l}{\pi}\frac{\pi+y-z}{2}\right) = \lim_{z\to y}\left(f(z) - \frac{l}{2} + \frac{l(y-z)}{2}\right)\\ &= \lim_{z\to y}\frac{2f(z) - f(y+0) - f(y-0)}{2},\end{aligned}$$

que, per la hipòtesi inicial, és igual a 0. Això ens diu que la sèrie de Fourier de Δ hi convergeix uniformement en y. D'aquest fet, però, concloem que

$$\left|\left(s_n(f,z)-\frac{l}{\pi}s_n(\phi,z-y)\right)-\left(f(z)-\frac{l}{\pi}\phi(z-y)\right)\right| \overset{n\to\infty}{\to} 0 \text{ per } z \text{ prou proper a } y,$$

amb la qual cosa tenim que, en $z=y$,

$$s_n(f,z)-\frac{l}{\pi}s_n(\phi,z-y) \overset{n\to\infty}{\to} 0,$$

degut a què

$$\frac{l}{\pi}\phi(0)=\frac{l}{2}=\frac{f(y+0)+f(y-0)}{2}=f(y).$$

D'aquest resultat es conclou que la sèrie de Fourier d'f presentarà el Fenomen de Gibbs en el punt $x=y$ (per presentar-lo la de ϕ, com sabem, en $x=0$). La resta és directe tenint present que si f és contínua en un punt la seva sèrie de Fourier hi convergeix uniformement en aquest. $\square$

1.8 Sèries de Fourier en resolució d'edp's. Separació de variables.

1.8.1 Conceptes bàsics de la teoria d'equacions diferencials.

En aquesta secció ens limitarem a definir superficialment alguns conceptes de la teoria d'edo, que resultaran necessaris a l'hora d'explicar el mètode de resolució d'edp per separació de variables. Per a més detall, és recomanable consultar [5].

Definició 1.8.1. *(Sistema d'equacions diferencials lineals homogènies) Siguin x funció d'$\mathbb{R}^n$, $A\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, $x_0, t_0\in\mathbb{R}^n$. Aleshores,*

$$\begin{cases} x' = Ax. \\ x(t_0)=x_0. \end{cases}$$

és un sistema lineal homogeni d'edo.

Definició 1.8.2. *(Sistema fonamental de solucions) Generador de les solucions d'una edo, que formen un espai vectorial.*

Definició 1.8.3. *(Matriu fonamental d'una edo) Matriu $n\times n$ tal que les seves columnes són solucions linealment independents de l'edo considerada.*

Definició 1.8.4. *(Exponencial d'una matriu) Donada una matriu A, definim*

$$e^A := \sum_{n\geq 0}\frac{A^n}{n!}.$$

La importància de l'exponencial d'una matriu per a la resolució de sistemes lineals homogenis d'edo queda reflectida en aquesta proposició:

Proposició 1.8.5. *Donat un sistema linal homogeni d'edo de forma*

$$\begin{cases} x' = Ax. \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

aleshores e^{At} *és matriu fonamental del sistema.*

L'exponencial de matrius compleix les següents propietats, que en faciliten el càlcul:

Proposició 1.8.6. *Donades* A, B, C *matrius, es té:*

- $e^{0_n} = Id_n$.
- *Si* $AB = BC$, *aleshores* $e^A B = B e^C$.
- *Si* $AB = BA$, *aleshores* $e^{A+B} = e^A e^B$.
- e^A *és invertible amb inversa* e^{-A}.
- *Si* C *és invertible, aleshores* $e^{C^1 AC} = C^{-1} e^A C$.
- *Si* $A = \begin{pmatrix} a_1 Id_{n_1} & & & & & \\ & a_2 Id_{n_2} & & & & \\ & & . & & & \\ & & & . & & \\ & & & & . & \\ & & & & & a_k Id_{n_k} \end{pmatrix}$, *aleshores*

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{a_1} Id_{n_1} & & & & & \\ & e^{a_2} Id_{n_2} & & & & \\ & & . & & & \\ & & & . & & \\ & & & & . & \\ & & & & & e^{a_k} Id_{n_k} \end{pmatrix}.$$

Definició 1.8.7. *(Equació en derivades pracials) Donada una funció*

$$u : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

k vegades diferenciable, una edp d'ordre k ve donada per una funció

$$F : \mathbb{R}^{mn^k} \times ... \times \mathbb{R}^{mn} \times \mathbb{R}^m \times U \to \mathbb{R}^m,$$

fent

$$F(D^k u, ..., Du, u, x) = 0.$$

A continuació explicarem un mètode per a la resolució d'edp's, útil en algunes situacions, conegut com a mètode de separació de variables.

1.8.2 Separació de variables.

Per a relacionar més fortament el mètode de resolució d'EDP's que detallarem amb la teoria de Fourier coneguda, pot consultar-se [4], mentres que per a un estudi exhaustiu de la teoria d'EDP's [3] també és interessant. En aquesta secció ens limitarem al cas d'una edp d'ordre 2. Donada una funció

$$u : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m,$$

i una edp amb condicions inicials

$$\begin{cases} F(D^k u, ..., Du, u, x) = 0. \\ u(a,t) = h_1, \ u(b,t) = h_2, \ t > 0. \\ u(x,c) = f(x), \ u_t(x,c) = g(x), \ 0 < x < \pi, \end{cases}$$

intentarem posar u com a producte de dues funcions

$$X, T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m,$$

és a dir, intentarem trobar X, T tals que $\forall x, \ t \in \mathbb{R}$,

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

D'aquesta manera, aconseguim que per tot i, j,

$$\frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial t^j}(x,t) = X^{(i)}(x)T^{(j)}(t),$$

cosa que, en cas que podem separar la condició de la u inicial en dues d'independents per X i T, ens en facilitarà el seu estudi. En l'adequació de les funcions X i T a les condicions inicials marcades intervindran fortament les sèries de Fourier.

Vista la idea general de la separació de variables, donem-ne exemples concrets.

Exemple 1.8.8. *Aplicació del mètode de separació de variables per a la resolució de l'edp:*

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \text{ per tot } x, \ t. \\ u(x,0) = f(x), \ u_t(x,0) = g(x), \text{ en } x \in (0,\pi). \\ u(0,t) = 0, \ u(0,t) = 0, \ u(\pi,t) = 0, \text{ per tot } t > 0. \end{cases}$$

Imposem la condició per tot x, t,

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

i tenim

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \Leftrightarrow X(x)T''(t) - X''(x)T(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{X(x)}{X''(x)} = \frac{T(t)}{T''(t)}.$$

De què aquesta condició sigui certa per tot x i t amb independència l'un de l'altre fa que deduim l'existència d'una constant $a \in \mathbb{R}$ de manera que

$$\frac{X(x)}{X''(x)} = \frac{T(t)}{T''(t)} = a, \text{ per tot } x,\ t,$$

o, equivalentment,

$$\begin{cases} X''(x) = aX(x), \text{ per tot } x. \\ T''(t) = aT(t), \text{ per tot } t. \end{cases}$$

També observem que podem adaptar les condicions inicials de la nostra funció u a X i T:

$$u(0,t) = 0 \text{ per tot } t > 0 \Rightarrow X(0)T(t) = 0 \text{ per tot } t > 0 \Rightarrow X(0) = 0.$$

$$u(\pi,t) = 0 \text{ per tot } t > 0 \Rightarrow X(\pi)T(t) = 0 \text{ per tot } t > 0 \Rightarrow X(\pi) = 0.$$

La resta de condicions les tindrem en compte a posteriori. Per ara, notem que tenim una equació diferencial ordinària amb condicions inicials per a la funció X:

$$\begin{cases} X''(x) - aX(x) = 0. \\ X(0) = X(\pi) = 0. \end{cases}$$

Resolem-la: Definint $X_1 := X$, $X_2 := X'$, tenim el sistema lineal homogeni:

$$\begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}}_{:=A} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

El resolem fàcilment obtenint l'exponencial de la matriu A:
Diagonalitzem A: el seu polinomi característic és $x^2 - a = 0$, de manera que els seus vaps són $\pm\sqrt{a}$. És simple comprovar que $(1, \sqrt{a})^T$ i $(1, -\sqrt{a})^T$ són els seus corresponents veps. Com

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{a} & -\sqrt{a} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{\sqrt{a}} \\ 1 & -\dfrac{1}{\sqrt{a}} \end{pmatrix}$$

tenim que

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{a} & -\sqrt{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & -\sqrt{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{\sqrt{a}} \\ 1 & -\dfrac{1}{\sqrt{a}} \end{pmatrix},$$

Aleshores, una matriu fonamental del sistema a resoldre és

$$e^{At} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{a} & -\sqrt{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\sqrt{a}t} & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{a}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{\sqrt{a}} \\ 1 & -\dfrac{1}{\sqrt{a}} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{=}_{\sqrt{a}=\sqrt{-a}i} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{-a}i & -\sqrt{-a}i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\sqrt{-a}it} & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{-a}it} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{\sqrt{-a}i} \\ 1 & -\dfrac{1}{\sqrt{-a}i} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{e^{\sqrt{-a}it}+e^{\sqrt{-a}it}}{2} & \dfrac{1}{\sqrt{-a}i}\dfrac{e^{\sqrt{-a}it}-e^{\sqrt{-a}it}}{2} \\ \sqrt{-a}i.\dfrac{e^{\sqrt{-a}it}-e^{\sqrt{-a}it}}{2} & \dfrac{e^{\sqrt{-a}it}+e^{\sqrt{-a}it}}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{-a}t) & \dfrac{1}{\sqrt{-a}}\sin(\sqrt{-a}t) \\ -\sqrt{-a}\sin(\sqrt{-a}t) & \cos(\sqrt{-a}t) \end{pmatrix}.$$

Així doncs, les possibles solucions de l'edo plantejada són de forma

$$X(x) = b\cos(\sqrt{-a}t) + c\sin(\sqrt{-a}t).$$

Imposem les condicions inicials:

$$X(0) = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow X(x) = c\sin(\sqrt{-a}t).$$

$$X(\pi) = 0 \Rightarrow \sin(\sqrt{-a}\pi) = 0 \Rightarrow \sqrt{-a} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{-a} = n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Amb això, tenim

$$\begin{cases} X(x) = c\sin nx. \\ T(t) = d\cos nt + e\sin nt. \end{cases}$$

(T és de la mateixa forma que X, que acabem de resoldre. El fet de no imposar condicions inicials fa que no podem determinar encara d i e)
Sabem que el producte de qualsevol funció de la forma $c\sin nx$ (amb $c \neq 0$) per una altra del tipus $d\cos nt + e\sin nt$ (amb $d \neq 0$ o $e \neq 0$) verificarà totes les condicions desitjades excepte les que fan referència a la funció T (és a dir, $u(x,0) = f(x)$ i $u_t(x,0) = g(x)$). En particular, si definim

$$c_n(t) := d_n\cos nt + e_n\sin nt,\ d_n,\ e_n \text{ constants},$$

tenim que la funció

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(t)\sin nx,$$

també les complirà. Ara imposem les restants condicions:

$$u(x,0) = f(x) \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Imposant-ho a } T} \sum_n d_n(t)\sin nx = f(x).$$

$$u_t(x,0) = g(x) \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Imposant-ho a } T'} \sum_n ne_n(t)\sin nx = g(x).$$

Notem, però, que f i g estan definides en $(0,\pi)$, de manera que podem extendre-les de manera senar a l'interval $(-\pi,\pi)$ (notarem a partir d'ara com f i g, de fet, a aquestes extensions). Aleshores, el fet que

$$\sum_n d_n(t)\sin nx = f(x)$$

equival a que

$$\sum_n d_n(t)e^{inx} = f(x),$$

de manera que podem dir que $d_n = c_n(f)$ per tot n, és a dir, que els d_n són els coeficients de Fourier de la funció f, que és senar, i, per tant,

$$d_n = \frac{i}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt.$$

De manera anàloga, obtenim que

$$e_n = \frac{i}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin nt\,dt,$$

i per tant concloem que la funció

$$u(x,t) = \sum_n [d_n\cos nt + e_n\sin nt]\sin nx,$$

amb els e_n, d_n especificats, és solució de l'edp inicial. Cal, per acabar, veure quines condicions han de complir f i g per a que la sèrie sigui de classe 2 tant per a x com per a t. Per a que això succeeixi, cal que

$$\begin{cases} \sum_j |j|^2|d_j| < \infty. \\ \sum_j |j|^2|e_j| < \infty. \end{cases}$$

En ser els d_j coeficients de Fourier d'f, sabem, per la Proposició (1.3.7), que la primera condició es complirà si $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{T})$. Anàlogament, la segona serà certa si

$$\begin{aligned} \sum_j |j|^2|e_j| < \infty, &\Leftrightarrow \sum_j |j|^2\frac{1}{|j|}|c_j(g)| < \infty, \\ &\Leftrightarrow \sum_j |j||c_j(g)| < \infty, \end{aligned}$$

cosa que, altre cop per la Proposició (1.3.7), passarà si $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T})$.
Així doncs, si $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{T})$ i $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T})$, tenim que una solució explícita de l'edp plantejada és

$$u(x,t) = \sum_n [d_n\cos nt + e_n\sin nt]\sin nx.$$

Per enllestir aquest apartat, donarem un exemple absolutament explícit.

Exemple 1.8.9. *Aplicació del mètode de separació de variables per a resoldre l'edp:*

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \ 0 < x < 1, \ t > 0. \\ u_x(0,t) = u(1,t) = 0, \ t > 0. \\ u(x,0) = 1 - x^2, \ 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Procedim de manera anàloga a l'exemple anterior: per començar, posem

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Aleshores,

$$u_t - u_{xx} = 0 \Leftrightarrow X(x)T'(t) - X''(x)T(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} \ \forall x, \ t,$$

cosa que es tradueix en l'existència d'una constant a tal que

$$\begin{cases} X''(x) = aX(x). \\ T'(t) = aT(t). \end{cases}$$

Extreiem condicions per a la funció X a partir de les ja conegudes per a u:

$$u_x(0,t) = 0 \ \forall t \Rightarrow X'(0)T(t) = 0 \ \forall t \Rightarrow X'(0) = 0.$$

$$u(1,t) = 0 \ \forall t \Rightarrow X(1)T(0) = 0 \ \forall t \Rightarrow X(1) = 0.$$

Així doncs, hem obtingut, per a la funció X, la següent edo lineal homogènia amb coeficients constants:

$$\begin{cases} X''(x) = aX(x). \\ X'(0) = X(1) = 0. \end{cases}$$

Notem que l'edo és la mateixa que la de l'exemple anterior, de manera que tenim

$$X(x) = b\cos(\sqrt{-a}x) + c\sin(\sqrt{-a}x),$$

imposem les condicions inicials:

$$X'(0) = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{-a}b\sin(\sqrt{-a}0) + \sqrt{-a}c\cos(\sqrt{-a}0) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{-a}c = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{Suposem } a \neq 0} c = 0.$$

Amb això tenim

$$X(x) = b\cos(\sqrt{-a}x).$$

Amb la darrera condició inicial:

$$X(1) = 0 \Leftrightarrow b\cos(\sqrt{-a}) = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{b \neq 0} \sqrt{-a} = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \Leftrightarrow a = -\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\right)^2,$$

de manera que concloem

$$X(x) = b\cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x\right).$$

Estudiem ara la funció T. L'edo que la defineix és ben senzilla de resoldre:

$$T'(t) = aT(t) \Leftrightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = a \Leftrightarrow \ln T(t) = at + d \Leftrightarrow T(t) = e^d e^{at} \Leftrightarrow T(t) = he^{at};$$

tenint present el que sabem d'a, tenim, de fet,

$$T(t) = he^{-\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)^2 t}.$$

Arribats a aquest punt, procedim com abans: com sabem que tot producte de funcions del tipus X i T trobades resoldran tot el que ha de complir u llevat de la darrera condició, si definim

$$a_n(t) = c_n e^{-\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)^2 t},$$

aleshores

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(t)\cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x\right)$$

també les complirà. Sols resta imposar aquesta última condició ($u(x,0) = 1-x^2$) per a tenir una funció solució:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(0)\cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x\right) = 1-x^2 \underbrace{\Leftrightarrow}_{s=\frac{(k+\frac{1}{2})\pi x}{n}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(0)\cos ns = 1 - \left(\frac{ns}{(k+\frac{1}{2})\pi}\right)^2 =: f(s).$$

Notem que f és una funció parell, de manera que els coeficients de la seva sèrie de Fourier seran, precisament, els $a_n(0)$'s. Trobem-los doncs:

$$\begin{aligned}
a_n(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\cos ns\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1-\left(\frac{ns}{(k+\frac{1}{2})\pi}\right)^2\right)\cos ns\,ds \\
&= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos ns\,ds}_{=0} - \frac{n^2}{2\pi((k+\frac{1}{2})\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} s^2\cos ns\,ds \\
&= -\frac{n^2}{2\pi((k+\frac{1}{2})\pi)^2}\left(\underbrace{\left[s^2\frac{\sin ns}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} s\sin ns\,ds\right) \\
&= \frac{n^2}{n\pi((k+\frac{1}{2})\pi)^2}\left(\left[-s\frac{\cos ns}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \underbrace{\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos s\,ds}_{=0}\right) \\
&= \frac{n^2}{n\pi((k+\frac{1}{2})\pi)^2}\frac{-2\pi(-1)^n}{n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{((k+\frac{1}{2})\pi)^2}.
\end{aligned}$$

Així doncs, per tot n, tenim $a_n(0) = \dfrac{2(-1)^{n+1}}{((k+\frac{1}{2})\pi)^2}$, és a dir:

$$c_n e^{-\left((k+\frac{1}{2})\pi\right)^2 0} = c_n = a_n(0) = \frac{2(-1)^{n+1}}{((k+\frac{1}{2})\pi)^2},$$

de manera que concloem que, per tot t,

$$T(t) = \frac{2(-1)^{n+1}}{((k+\frac{1}{2})\pi)^2} e^{-\left((k+\frac{1}{2})\pi\right)^2 t}.$$

Acabem donant explícitament la nostra funció u:

$$u(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{((k+\frac{1}{2})\pi)^2} e^{-t\left((k+\frac{1}{2})\pi\right)^2} \cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x\right).$$

En aquest cas la diferenciabilitat de la sèrie obtinguda és clara per ser f de classe $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{T}$ (Proposició (1.3.7)).

Capítol 2

La transformada de Fourier.

Aquest capítol està realitzat amb [9] com a guia.

2.1 Transformada de Fourier. Cas $L^1(\mathbb{R}^n)$.

2.1.1 Preliminars.

Definició 2.1.1. *(Transformada de Fourier) Donada una funció $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definim la seva transformada de Fourier com*

$$\widehat{f}(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(t)e^{-2\pi i x\cdot t}\, dt,\ \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

on, si $x,\ t \in \mathbb{R}^n$, $x \cdot t$ és el producte escalar habitual $\left(x \cdot t := \sum_{j=1}^{n} x_i t_i\right)$.

Proposició 2.1.2. *Si considerem l'aplicació*

$$T : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$$
$$f \longmapsto \widehat{f},$$

aleshores T és lineal acotada, i, a més, $\left\|\widehat{f}\right\|_\infty \leq \|f\|_1$.

Demostració:
La linealitat de T és clara: donades $f,\ g \in L^1(\mathbb{R}^n),\ k \in \mathbb{C}$, aleshores,

$$T(f+kg)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (f+kg)(t)e^{-2\pi i x\cdot t}\, dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)e^{-2\pi i x\cdot t}\, dt + k\int_{\mathbb{R}^n} g(t)e^{-2\pi i x\cdot t}\, dt = T(f) + kT(g).$$

Veiem ara que T és acotada:

$$\begin{aligned}
\|T\| &= \sup_{\|f\|_1=1} \|Tf\|_\infty = \sup_{\|f\|_1=1} \left\| \widehat{f} \right\|_\infty \\
&= \sup_{\|f\|_1=1} \left(\sup_x \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-2\pi i x\cdot t}\, dt \right| \right) \\
&\leq \sup_{\|f\|_1=1} \left(\sup_x \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|\, dt \right) = \sup_{\|f\|_1=1} \|f\|_1 = 1.
\end{aligned}$$

L'acotació de T per 1 ens dóna també directament que per a tota $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\left\| \widehat{f} \right\|_\infty \leq \|f\|_1$.
□

Observació 2.1.3. *Indirectament, s'ha comprovat que T està ben definida, és a dir, que el conjunt arribada està realment inclós a $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. A més, en ser T un operador lineal, que estigui acotat implica que és continu.*

Teorema 2.1.4. *(Riemann-Lebesgue) Per a tota $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$,*

$$\lim_{|x|\to\infty} \widehat{f}(x) = 0.$$

Demostració:
La prova d'aquest teorema és molt similar a la del Teorema (1.1.18). Començarem provant el resultat explícitament per a funcions característiques en $\mathbb{R}^n$. Sigui

$$f := \chi_I, \text{ amb } I = [a_1,\ b_1] \times ... \times [a_n,\ b_n] \subset \mathbb{R}^n,$$

és a dir, donada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } \forall j, x_j \in [a_j,\ b_j]. \\ 0, \text{ en cas contrari.} \end{cases}$$

Si considerem $|x| := \max_{1\leq j\leq n} |x_j|$, només cal que $|x| \geq \max_{1\leq j\leq n}\{|a_j|,\ |b_j|\}$ per a qué $f(x) = 0$, cosa que clarament implica $\widehat{f}(x) = 0$. Així doncs, per aquest tipus d'f, el resultat és clar.
Vist això, el teorema queda provat amb la mateixa tècnica que al teorema esmentat, gràcies al raonament d'aproximació de funcions $L^p(\mathbb{R}^n)$ per funcions característiques provat a la Proposició (1.1.19). □

Observació 2.1.5. *Aquest reslutat ens dóna una condició necessària per a que una funció f sigui transformada de Fourier. Així*

$$f \text{ transformada de Fourier} \Rightarrow \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0,$$

és a dir, tota transformada de Fourier pertany a $C_0 := \{$funcions amb límit 0 a l'$\infty\}$.

Teorema 2.1.6. *Siguin $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Aleshores,*

$$\widehat{(f * g)} \equiv \widehat{f}\widehat{g}.$$

Demostració:
En aquesta prova, com en altres relacionades amb la convolució, té un paper clau el Teorema de Fubini.

$$\begin{aligned}
\widehat{(f * g)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(s-t)g(t)\,dt \right) e^{-2\pi i x\cdot s}\,ds \\
&\underbrace{=}_{Fubini} \int_{\mathbb{R}^n} g(t) \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(s-t)e^{-2\pi i x\cdot s}\,ds \right) dt \\
&\underbrace{=}_{u=s-t} \int_{\mathbb{R}^n} g(t) \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(u)e^{-2\pi i x\cdot u}\,ds \right) e^{-2\pi i x\cdot t}\,dt \\
&= \widehat{f} \int_{\mathbb{R}^n} g(t)e^{-2\pi i x\cdot t}\,dt = \widehat{f}\widehat{g}.
\end{aligned}$$

□

Proposició 2.1.7. *Si notem per τ_h la translació per $h \in \mathbb{R}^n$ (i.e. donada una funció g en $\mathbb{R}^n$, $\tau_h(g)(x) = g(x-h)$ per tot x) i per δ_a la dilatació per $a \in \mathbb{R}^n$ ($\delta_a(g)(x) = g(ax)$), aleshores, per a tota $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, es té:*

(i) $(\widehat{\tau_h f})(x) = e^{-2\pi i h\cdot x}\widehat{f}(x)$.

(ii) $(\widehat{e^{2\pi i t\cdot h} f(t)})(x) = (\tau_h \widehat{f})(x)$.

(iii) $a^n(\widehat{\delta_a f})(x) = \widehat{f}\left(\dfrac{x}{a}\right)$.

Demostració:
(i)

$$\begin{aligned}
(\widehat{\tau_h f})(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_h f)(t)e^{-2\pi i x\cdot t}\,dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(t-h)e^{-2\pi i x\cdot t}\,dt \\
&\underbrace{=}_{z=t-h} e^{-2\pi i x\cdot h} \int_{\mathbb{R}^n} f(z)e^{-2\pi i x\cdot z}\,dz = e^{-2\pi i x\cdot h}\widehat{f}(x).
\end{aligned}$$

(ii)

$$(\widehat{e^{2\pi i t\cdot h} f(t)})(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)e^{-2\pi i t\cdot(x-h)}\,dt = (f\widehat{(x-h)}) = (\tau_h \widehat{f})(x).$$

(iii)

$$\begin{aligned}(\widehat{\delta_a f})(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\delta_a f)(t) e^{-2\pi i x\cdot t}\, dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(at) e^{-2\pi i x\cdot t}\, dt \\ &\underbrace{=}_{z=at} \frac{1}{a^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{-2\pi i x\cdot z/a}\, dz = \frac{1}{a^n}\widehat{f}\left(\frac{x}{a}\right).\end{aligned}$$

□

A partir d'ara, donada f, notarem $(x_k f(x))$ la funció

$$\begin{aligned}(x_k f(x)) : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{C} \\ t &\longmapsto t_k f(t).\end{aligned}$$

Teorema 2.1.8. *Sigui $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, tal que $(x_k f(x)) \in L^1(\mathbb{R})$. Aleshores, $\widehat{f}$ és diferenciable respecte la coordenada k i*

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_k}(x) = (\widehat{-2\pi i t_k f}(t))(x).$$

Demostració:

Sigui $h = (0, ..., 0, \underbrace{h_k}_{\text{lloc } k}, 0, ...0)$. Aleshores,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_k}(x) &= \lim_{h_k \to 0} \frac{\widehat{f}(x+h) - \widehat{f}(x)}{h_k} \underbrace{=}_{\text{proposició anterior}} \lim_{h_k\to 0}\left[\left(\widehat{\frac{e^{-2\pi i t\cdot h} - 1}{h_k}}\right) f(t)\right](x) \\ &= \lim_{h_k\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{e^{-2\pi i t\cdot h} - 1}{h_k}\right) f(t) e^{-2\pi i x\cdot t}\, dt \\ &\underbrace{=}_{\text{convergència dominada}} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\lim_{h_k\to 0}\left(\frac{e^{-2\pi i t\cdot h} - 1}{h_k}\right)}_{=-2\pi i t_k \text{ (L'Hôpital)}} f(t) e^{-2\pi i x\cdot t}\, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} -2\pi i t_k f(t) e^{-2\pi i x\cdot t}\, dt = (\widehat{-2\pi i t_k f}(t))(x).\end{aligned}$$

Notem que podem aplicar convergència dominada perquè $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ens dóna una acotació sobre les integrals considerades, i que la darrera integral obtinguda és transformada de Fourier gràcies a que $(x_k f(x)) \in L^1(\mathbb{R})$. □

Aquest teorema ens diu que la derivada respecte una component k d'una transformada de Fourier és la transformada de Fourier de la funció original per la component k-éssima. Veiem ara què podem dir de la transformada de Fourier d'aquestes funcions derivades.

Definició 2.1.9. *(Diferencial k-éssima) Amb les notacions definides al Teorema (2.1.8), donada una funció $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, diem que $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ és la derivada d'f respecte la component k*

en norma L^1 si

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h_k} - g(x) \right| dx \overset{h_k \to 0}{\to} 0.$$

Teorema 2.1.10. *Sigui $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, i g la seva derivada respecte la component k en norma L^1. Aleshores,*

$$\widehat{g}(x) = 2\pi i x_k \widehat{f}(x).$$

Demostració:
Sabem, per definició de derivada, que

$$A(h) := \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h_k} - g(x) \right| dx \overset{h_k \to 0}{\to} 0.$$

D'altra banda, per la Proposició (2.1.2), tenim que

$$B(h) := \left\| \widehat{g}(x) - \frac{\widehat{f}(x+h) - \widehat{f}(x)}{h_k} \right\|_\infty \leq A(h),$$

de manera que també tenim que

$$B(h) \overset{h \to 0}{\to} 0.$$

Gràcies al primer apartat de la Proposició (2.1.7), tenim que $\widehat{f}(x+h) = e^{2\pi i x \cdot h}\widehat{f}(x)$, i que, per tant, podem escriure

$$B(h) = \left\| \widehat{g}(x) - \widehat{f}(x) \frac{e^{2\pi i x \cdot h} - 1}{h_k} \right\|_\infty;$$

aleshores, per continuitat de $\|*\|_\infty$, la condició

$$B(h) \overset{h \to 0}{\to} 0$$

es tradueix en

$$B(h) = \left\| \widehat{g}(x) - \widehat{f}(x) \underbrace{\lim_{h_k \to 0} \left(\frac{e^{2\pi i x \cdot h} - 1}{h_k} \right)}_{=2\pi i x_k} \right\|_\infty = 0,$$

és a dir, que, de fet, tenim

$$\left\| \widehat{g}(x) - 2\pi i x_k \widehat{f}(x) \right\|_\infty = 0,$$

cosa que equival a $\widehat{g}(x) = 2\pi i x_k \widehat{f}(x)$, que és el que volíem veure. $\square$

Abans de donar un corol.lari d'aquests dos teoremes, definim la notació que farem servir. Donada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}^n$ amb totes les components majors o iguals a 0, posem

$$D^s f := \frac{\partial^{s_1 + \ldots + s_n}}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} f.$$

Corol·lari 2.1.11. *Els dos teoremes anteriors poden extendre's de manera natural per a combinacions lineals de derivades parcials. Així doncs, donada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, i P polinomi en n variables, aleshores,*

(i)$P(D)\widehat{f}(x) = (P(-\widehat{2\pi it)f(t)}))(x)$.

(ii)$(\widehat{P(D)f})(x) = P(2\pi ix)\widehat{f}(x)$.

La demostració és clara gràcies a la linealitat de la derivada.

A continuació, dedicarem els nostres esforços a intentar invertir la transformada de Fourier. Iniciarem aquest camí estudiant dues integrals concretes, anomenades nuclis de Poisson i Gauss-Weierstrass.

2.1.2 Nuclis de Poisson i Gauss-Weierstrass.

En aquesta subsecció pren especial rellevància la teoria de residus per al càlcul d'integrals. Pot trobar-se informació sobre les tècniques emprades a [8].

Definició 2.1.12. *(Mitjana d'Abel) Donades un funció f, i una constant $\varepsilon > 0$, posem*

$$A_\varepsilon(f) \equiv A_\varepsilon := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-\varepsilon|x|}\,dx.$$

És clar que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

$$A_\varepsilon \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx \underbrace{<}_{f\in L^1(\mathbb{R}^n)} \infty,$$

de manera que podem aplicar convergència dominada per dir que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\varepsilon\to 0} f(x)e^{\varepsilon|x|}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx.$$

Notem també que poden existir les mitjanes d'Abel d'una funció encara que aquesta sigui no integrable. Per exemple, si prenem f acotada per una constant M, $\varepsilon > 0$, reduïnt-nos al cas $n = 1$, tenim:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\varepsilon}|x|\,dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} Me^{-\varepsilon|x|}\,dx &= M\int_{-\infty}^{0} e^{\varepsilon x}\,dx + M\int_{0}^{\infty} e^{-\varepsilon x}\,dx \\ &= \left[\frac{M}{\varepsilon}e^{\varepsilon x}\right]_{-\infty}^{0} - \left[\frac{M}{\varepsilon}e^{-\varepsilon x}\right]_{0}^{\infty} = \frac{M}{\varepsilon} + \frac{M}{\varepsilon} = \frac{2M}{\varepsilon}.\end{aligned}$$

També, en certs casos, pot existir el límit d'A_ε encara que f no sigui integrable. Un exemple prou clar és el de la funció $\dfrac{\sin x}{x}$.

Definició 2.1.13. *(Sumabilitat d'Abel) Donada una funció f, si $\exists\ l$ tal que*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon(f) = l,$$

diem que $\int_{\mathbb{R}^n} f$ és sumable Abel a l.

Definició 2.1.14. *(Mitjana de Gauss) Donades un funció f, i una constant $\varepsilon > 0$, posem*

$$G_\varepsilon(f) \equiv G_\varepsilon := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-\varepsilon|x|^2}\, dx.$$

Definició 2.1.15. *(Sumabilitat de Gauss) Diem que $\int_{\mathbb{R}^n} f$ és Gauss sumable a l si existeix el límit*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} G_\varepsilon(f),$$

i és igual a l.

Definició 2.1.16. *(ϕ mitjana) $A_\varepsilon(f)$ i $G_\varepsilon(f)$ poden expressar-se de forma:*

$$M_{\varepsilon,\phi}(f) \equiv M_\varepsilon(f) := \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\varepsilon x) f(x)\, dx,$$

on $\phi \in C_0$ (doncs $\lim_{y\to\infty} e^{-\varepsilon|y|} = \lim_{y\to\infty} e^{-\varepsilon|y|^2} = 0$, per $\varepsilon > 0$), i $\phi(0) = 1$. Anomenem a $M_\varepsilon(f)$ la ϕ mitjana de $\int_{\mathbb{R}^n} f$.

Definició 2.1.17. *(Ésser sumable) Diem que una funció f és sumable a l si*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} M_\varepsilon(f) = l.$$

Per a la obtenció del nostre objectiu, ens caldrà la transformada de Fourier de les funcions $e^{-\varepsilon|x|}$ i de $e^{-\varepsilon|x|^2}$. Per començar, ens centrarem en la darrera.

Lema 2.1.18. *Es compleix la següent igualtat:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+iy)^2}\, dx = 1.$$

Demostració:

Per a veure aquest fet, considerem la funció $f(z) := e^{-\pi z^2}$, clarament holomorfa en $\mathbb{C}$. Aleshores, si definim la regió $\mathcal{D} := [-R, R] \times [0, y]$, per y, R fixats, obtenim, pel Teorema de Cauchy, que

$$\int_{\mathcal{D}} f(z)\, dz = 0.$$

Sabem, però, que

$$\int_{\mathcal{D}} f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\gamma_j} f(z)\, dz,$$

on γ_j són les vores que delimiten el rectangle $\mathcal{D}$. Calculem-ho tot explícitament:

- $\gamma_1(t) = t$ ($\Rightarrow \gamma_1' \equiv 1$), per $t \in [-R, R]$.
  Aleshores,

$$\int_{\gamma_1} f(t)\,dt = \int_{-R}^{R} \gamma_1'(t) f(\gamma_1(t))\,dt = \int_{-R}^{R} e^{-\pi t^2}\,dt \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2}\,dt.$$

- $\gamma_2(t) = R + it$ ($\Rightarrow \gamma_1' \equiv i$), per $t \in [-y, y]$. Aleshores,

$$\int_{\gamma_1} f(t)\,dt = \int_0^y ie^{-\pi(R+it)^2}\,dt = \int_0^y ie^{-\pi R^2} e^{-2\pi i t} e^{\pi t^2}\,dt,$$

  cosa que implica

$$\left|\int_{\gamma_2} f(t)\,dt\right| \leq e^{\pi y^2} \int_{-y}^{y} e^{-\pi R^2} = ye^{\pi(R^2-y^2)} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- Amb anàleg procés que per γ_2, es té que

$$\left|\int_{\gamma_3} f(t)\,dt\right| \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

  amb $\gamma_3(t) = -R - it$, per $t \in [0, y]$.

- $\gamma_4(t) = -t + iy$ ($\Rightarrow \gamma_4' \equiv -1$), per $t \in [-R, R]$. Com per γ_1, s'obté:

$$\int_{\gamma_4} f(z)\,dz \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(t+iy)^2}\,dt$$

Així doncs, concloem que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(t+iy)^2}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2}\,dt,$$

que clarament és igual a 1, com a conseqüència directa (amb un canvi de variable) de què

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}.$$

$\square$

Observació 2.1.19. *En particular, aquest lema ens diu que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x y}\,dx = e^{-\pi y^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(t+iy)^2}\,dt}_{=1(\text{ lema})} = e^{-\pi y^2}.$$

Això ja ens dóna la transformada de la funció $e^{-\varepsilon|x|^2}$:

Teorema 2.1.20. *Per tot $h > 0$,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi h|x|^2} e^{-2\pi i x\cdot t}\, dx = h^{-n/2} e^{-\pi|t|^2/4}.$$

Demostració:
Tivial a partir del lema anterior. Tenim:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi h|x|^2} e^{-2\pi i x\cdot t}\, dx &= \prod_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x_j^2} e^{-2\pi i x_j t_j}\, dx_j \\ &\underbrace{=}_{s=\sqrt{h}x} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi s_j^2} e^{-2\pi i s_j \frac{t_j}{\sqrt{h}}}\, ds \\ &\underbrace{=}_{\text{lema}} h^{-n/2} \prod_{j=1}^{n} e^{-\pi \frac{t_j^2}{h}} = h^{-n/2} e^{\frac{-\pi|t|^2}{h}}.\end{aligned}$$

□

Amb això ja tenim la transformada de Fourier de la funció $e^{-\varepsilon|x|^2}$. La de la funció $e^{-\varepsilon|x|}$ és més complicada d'obtenir. Abans d'encarar-la ens calen els següents resultats:

Lema 2.1.21. *Les següents igualtats són certes:*

- $\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{(1+x^2)u}\, du.$
- $e^{-s} = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos sx}{1+x^2}\, dx.$

Demostració:
La primera igualtat és evident (només cal fer la integral respecte u). La segona és una mica més complicada, i la obtindrem com a aplicació del Teorema dels Residus. Considerem la funció

$$f(z) := \frac{e^{isz}}{1+z^2},$$

i el domini definit per les corbes

$$\gamma_1(t) := t,\ t \in [-R, R], \qquad \gamma_2(t) := Re^{i\pi t},\ t \in [0, 1],$$

que notarem $\mathcal{D}$. Integrarem f en $\mathcal{D}$. Notem que en aquesta zona f només té un pol d'ordre 1 en $z = i$, de manera que tenim:

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{e^{isz}}{1+z^2}\, dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f, i) = \pi e^{-s},$$

degut a que en ser i pol d'ordre 1, el residu d'f en i, si prenem f de forma

$$\frac{A(z)}{B(z)} = f(z), \qquad A(z) := e^{isz}, \qquad B(z) := 1 + z^2,$$

és

$$\frac{A(i)}{B'(i)},$$

que en aquest cas és $\dfrac{e^{-s}}{2i}$.

D'altra banda, també és cert que

$$\int_{\mathcal{D}} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{2} \int_{\gamma_j} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(\gamma_1(z))\gamma_1'(z)\,dz + \int_0^1 f(\gamma_2(z))\gamma_2'(z)\,dz.$$

Estudiem aquestes dues integrals. D'una banda,

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{R} f(\gamma_1(z))\gamma_1'(z)\,dz &= \int_{-R}^{R} \frac{e^{isz}}{1+z^2}\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{\cos sz}{1+z^2}\,dz \\ &\quad + \underbrace{\int_{-R}^{R} \underbrace{\frac{\sin sz}{1+z^2}}_{\text{funció senar}}\,dz}_{=0} = \int_{-R}^{R} \frac{\cos sz}{1+z^2}\,dz \\ &\overset{R\to\infty}{\to} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos sz}{1+z^2}\,dz,\end{aligned}$$

i, de l'altra,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(\gamma_2(z))\gamma_2'(z)\,dz\right| &\leq \int_0^1 \left|\frac{\pi R}{1 - R^2 e^{2\pi i z}}\right|\,dz \leq \pi R \int_0^1 \frac{1}{R^2-1}\,dz \\ &= \frac{\pi R}{R^2-1} \overset{R\to\infty}{\to} 0.\end{aligned}$$

Així doncs, fent tendir R a ∞, tenim que

$$\pi e^{-s} = \int_{\mathcal{D}} \frac{e^{isz}}{1+z^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos sz}{1+z^2}\,dz + 0,$$

cosa que, observant que la funció $\dfrac{\cos sz}{1+z^2}$ és parell i que per tant

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos sz}{1+z^2}\,dz = 2\int_0^{\infty} \frac{\cos sz}{1+z^2}\,dz,$$

ens porta a concloure que

$$2\int_0^{\infty} \frac{\cos sz}{1+z^2}\,dz = \pi e^{-s},$$

que és el que volíem. $\square$

Lema 2.1.22. *Donat s, es té:*

$$e^{-s} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-s^2/4u}\, du.$$

Demostració:
Ràpid a partir del lema anterior. Comprovem-ho:

$$\begin{aligned}
e^{-s} &\underbrace{=}_{\text{lema}} \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos sx}{1+x^2}\,dx \underbrace{=}_{\text{lema}} \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos sx \left(\int_0^\infty e^{-(1+x^2)u}\,du\right) dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos sx \left(\int_0^\infty e^{-u}e^{-ux^2}\,du\right) dx \\
&\underbrace{=}_{\text{Fubini}} \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-u} \left(\int_0^\infty \cos sx\, e^{-ux^2}\,dx\right) du \\
&\underbrace{=}_{e^{-ux^2}\sin sx \text{ senar}\Rightarrow \text{ en } (-\infty,\infty) \text{ integra } 0, \text{ i } e^{-ux^2}\cos sx \text{ parell}\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} = 2\int_0^\infty} \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-u}\left(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{isx}e^{-ux^2}\,dx\right) du \\
&\underbrace{=}_{2\pi y = x} \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-u}\left(\pi\int_{-\infty}^\infty e^{-4\pi^2 uy^2}e^{-2\pi isy}\,dy\right) du \\
&\underbrace{=}_{\text{Transformada } e^{-h|x|^2} \text{ amb } h=4\pi u} \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-u}\pi\frac{1}{2\sqrt{\pi u}}e^{\frac{-\pi|s|^2}{4\pi u}}\,du = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sqrt{\pi}\frac{e^{-u}}{2\sqrt{u}}e^{\frac{-|s|^2}{4u}}\,du \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}e^{-s^2/4u}\,du,
\end{aligned}$$

i el resultat queda provat. □

Amb totes aquestes eines, ja podem resodre el nostre problema inicial.

Teorema 2.1.23. *Per tot $h > 0$,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi|y|h}e^{-2\pi it\cdot y}\,dy = c_n \frac{h}{(h^2+|t|^2)^{\frac{n-1}{2}}},$$

on $c_n = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}$.

Demostració:
Provarem el resultat per a $h = 1$.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi|y|}e^{-2\pi it\cdot y}\,dy &= \int_{\mathbb{R}^n}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}e^{\frac{-4\pi^2|y|^2}{4u}}\,du\right]e^{-2\pi it\cdot y}\,dy \\
&\underbrace{=}_{\text{Fubini}} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-\pi^2|y|^2}{u}}e^{-2\pi it\cdot y}\right)du \\
&\underbrace{=}_{\text{Transformada } e^{-h|x|^2},\text{ amb } h=\pi/u} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\left(\left(\sqrt{\frac{u}{\pi}}\right)^n e^{-|t|^2u}\right)du \\
&= \frac{1}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\int_0^\infty e^{-u}u^{\frac{n-1}{2}}e^{-|t|^2u}\,du \\
&\underbrace{=}_{s=(1+|t|^2)u} \frac{1}{(1+|t|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\frac{1}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\underbrace{\int_0^\infty e^{-s}s^{\frac{n-1}{2}}\,ds}_{=\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \\
&= c_n\frac{1}{(1+|t|^2)^{\frac{n-1}{2}}} \underbrace{=}_{h=1} c_n\frac{h}{(h^2+|t|^2)^{\frac{n-1}{2}}},
\end{aligned}$$

de manera que el teorema es compleix per $h = 1$. Per altres valors d'$h > 0$, tenim:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi|y|h}e^{-2\pi it\cdot y}\,dy &\underbrace{=}_{x=yh} \frac{1}{h^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi|x|}e^{-2\pi it\cdot\frac{x}{h}}\,dx \\
&= \frac{1}{h^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi|x|}e^{-2\pi i\frac{t}{h}\cdot x}\,dx \\
&\underbrace{=}_{\text{apliquem el cas } h=1} \frac{c_n}{h^n(1+|\frac{t}{h}|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \\
&\underbrace{=}_{h>0} \frac{c_n}{\frac{h^n(h^2+|t|^2)^{\frac{n+1}{2}}}{h^{n+1}}} = c_n\frac{h}{(h^2+|t|^2)^{\frac{n+1}{2}}},
\end{aligned}$$

amb la qual cosa el resultat també és cert. □

Amb això ja tenim les transformades de Fourier de les dues funcions esmentades, a partir de les quals definirem els nuclis de Gauss-Weierstrass i de Poisson.

Definició 2.1.24. *(Nucli de Gauss-Weierstrass, nucli de Poisson) Donat $h > 0$, notem per W i P les transformades de les funcions $e^{-4\pi^2h|y|^2}$ i $e^{-2\pi h|y|}$ respectivament, és a dir:*

$$W(t,h) := (4\pi h)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|t|^2}{4h}}, \qquad P(t,h) := c_n\frac{h}{(h^2+|t|^2)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

W és el nucli de Gauss-Weierstrass, i P el de Poisson.

Teorema 2.1.25. *(Fòrmula de Multiplicació) Siguin $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, aleshores*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)\,dx.$$

Demostració:
Directe emprant Fubini:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)g(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(t)e^{-2\pi i t\cdot x}\,dt\right) g(x)\,dx \\
&\underbrace{=}_{\text{Fubini}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)e^{-2\pi i t\cdot x}\,dx\right) f(t)\,dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\widehat{g}(t)\,dt.
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.1.26. *Siguin f, $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i $\varphi = \widehat{\phi}$, aleshores, per tot $\varepsilon > 0$,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)e^{2\pi i t\cdot x}\phi(\varepsilon x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_\varepsilon(x-t)\,dx,$$

on $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

Demostració:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)e^{2\pi i t\cdot x}\phi(\varepsilon x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{e^{2\pi i t\cdot x}\phi(\varepsilon x)}\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\tau_t(\varphi_\varepsilon)(x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_\varepsilon(x-t)\,dx
\end{aligned}$$

□

Corol·lari 2.1.27. *Podem aplicar aquest teorema directament a les funcions $\phi_1(x) := e^{-2\pi|x|}$ i $\phi_2(x) := e^{-4\pi^2|x|^2}$ (que són clarament d'$L^1(\mathbb{R}^n)$), obtenint:*
(i) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)e^{2\pi i t\cdot x}e^{-2\pi\varepsilon|x|}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)P(x-t,\varepsilon)\,dx.$
(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)e^{2\pi i t\cdot x}e^{-4\pi^2\varepsilon^2|x|^2}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)W(x-t,\varepsilon^2)\,dx.$

Demostració:
Directe a partir del teorema tenint present que la transformada de Fourier de $\phi_1(\varepsilon x) = e^{-2\pi\varepsilon|x|}$ és $P(x,\varepsilon)$ (Teorema (2.1.23)) i que la de $\phi_2(\varepsilon x) = e^{-4\pi^2\varepsilon^2|x|^2}$ és $W(t,\varepsilon^2)$ (Teorema (2.1.20)). □

Teorema 2.1.28. *Siguin $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, ϕ i $\varphi := \widehat{\phi}$. Si ϕ i φ són integrables, i a més*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t)\, dt = 1,$$

aleshores,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x) e^{2\pi i t\cdot x} \phi(\varepsilon x)\, dx$$

convergeix a f en norma L^1.

Demostració:
Pel Teorema (2.1.26), sabem que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x) e^{2\pi i t\cdot x} \phi(\varepsilon x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_\varepsilon(x-t)\, dx,$$

amb $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, de manera que podem formular el teorema en forma de convolucions. Així doncs, veurem que

$$\|f * \varphi_\varepsilon - f\|_1 \overset{\varepsilon\to 0}{\to} 0.$$

Per començar, comprovem que $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(t)\, dt = 1$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-n}\varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\, dt \underbrace{=}_{x=\frac{t}{\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx = 1.$$

Vist això, tenim:

$$(f*\varphi_\varepsilon)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)\varphi_\varepsilon(t)\, dt - f(x) \underbrace{=}_{\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\varepsilon = 1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)\varphi_\varepsilon(t)\, dt$$
$$- \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_\varepsilon(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-t) - f(x))\varphi_\varepsilon(t)\, dt.$$

Aplicant la desigualtat de Minkowsky a aquesta expressió:

$$\|f*\varphi_\varepsilon - f\|_1 \le \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t) - f(x)|\, dx\right) \varepsilon^{-n} \left|\varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right|\, dt$$
$$\underbrace{=}_{y=\frac{t}{\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\varepsilon y) - f(x)|\, dx\right)}_{=:A} |\varphi(y)|\, dy,$$

notem que A és l'L^1 mòdul de continuitat d'f, $w_1(f,\varepsilon)$. Obviament és acotat en norma L^1 (per $2\|f\|_1$), i $\lim_{\varepsilon\to 0} w_1(f,\varepsilon) = 0$ (1.2.13). Així doncs, tenim

$$\|f*\varphi\varepsilon - f\|_1 \le \int_{\mathbb{R}^n} w_1(f,-\varepsilon t)|\varphi(t)|\, dt.$$

Que la funció $w_1(f, -\varepsilon t)|\varphi(t)|$ sigui majorable per $2\,\|f\|_1\,|\varphi(t)|$, que és integrable per hipòtesi (per ser-ho φ), fa que podem aplicar convergència dominada, obtenint:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\|f*\varphi\varepsilon - f\|_1 &\leq \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} w_1(f,-\varepsilon t)|\varphi(t)|\,dt \\ &\underbrace{=}_{\text{Convergència dominada}} \int_{\mathbb{R}^n}\lim_{\varepsilon\to 0} w_1(f,-\varepsilon t)|\varphi(t)|\,dt = 0.\end{aligned}$$

Amb això el teorema queda provat. $\square$

Corol·lari 2.1.29. *Amb les notacions anteriors, si $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i*

$$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(t)\,dt = 0,$$

aleshores

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|f*\varphi_\varepsilon\|_1 = 0.$$

(En particular, això és vàlid per $\|\cdot\|_p$, amb $p \neq 1$, des del moment en que la desigualtat de Minkowsky no es restringeix a norma L^1. El procés de demostració seria anàleg al detallat.)

Demostració:
Només cal notar que la hipòtesi implica

$$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\varepsilon(t)\,dt = 0,$$

amb la qual cosa,

$$(f*\varphi_\varepsilon)(x) = (f*\varphi_\varepsilon)(x) - f(x)0 = (f*\varphi_\varepsilon)(x) + f(x)\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\varepsilon(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}^n}(f(x-t)-f(x))\varphi_\varepsilon(t)\,dt,$$

i, repetint els càlculs realitzats al final de la prova del teorema, es té

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|f*\varphi_\varepsilon\|_1 \leq \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} w_1(f,t)|\varphi(t)|\,dt = 0.$$

$\square$

Teorema 2.1.30. *Siguin f, ϕ integrables i $\widehat{\phi} =: \varphi$ integrable tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\varepsilon(t)\,dt = 1,$$

aleshores

$$\int_{\mathbb{R}^n}\phi(\varepsilon x)\widehat{f}(x)e^{2\pi i t\cdot x}\,dx \overset{\varepsilon\to 0}{\to} f(x)$$

en norma L^1.

Demostració:
Pel Teorema (2.1.26) i les propietats conegudes de l'aplicació τ (translació), per tot $\varepsilon > 0$, per tot t,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(\varepsilon x)\widehat{f}(x)e^{2\pi i t\cdot x}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_\varepsilon(x-t)\,dx = (\varphi_\varepsilon * f)(t) = (f * \varphi_\varepsilon)(t)$$

i, pel Teorema (2.1.28),

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|f * \varphi_\varepsilon - f\|_1 = 0;$$

això ens dóna el resultat cercat. □

Corol·lari 2.1.31. *Si f, $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, aleshores*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(t)e^{2\pi i x\cdot t}\,dt$$

per tot x.

Demostració:
Si $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, aleshores la integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(\varepsilon x)\widehat{f}(x)e^{2\pi i t\cdot x}\,dx,$$

amb ϕ mitjana, està acotada, i per tant podem aplicar convergència dominada per afirmar:

$$\underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)e^{2\pi i x\cdot t}\phi(\varepsilon x)\,dx}_{=f(x)\text{ (teorema anterior)}} = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\varepsilon\to 0}\widehat{f}(x)e^{2\pi i x\cdot t}\phi(\varepsilon x)\,dx \underbrace{=}_{\phi(0)=1} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)e^{2\pi i x\cdot t}\,dx,$$

la qual cosa prova el corol·lari. □

Corol·lari 2.1.32. *(Unicitat) Siguin $f_1,\ f_2 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tals que $\widehat{f_1}(x) = \widehat{f_2}(x)$ per tot $x \in \mathbb{R}^n$. Aleshores, $f_1(t) = f_2(t)$ gairebé per tot t.*

Demostració:
Prenem $f := f_1 - f_2$. En ser diferència de funcions de $L^1(\mathbb{R}^n)$, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Alehores, per ser la transformada de Fourier lineal,

$$\widehat{f}(t) \equiv \widehat{f_1}(t) - \widehat{f_2}(t) = 0 \text{ gairebé per tot t},$$

i, en ser $\widehat{f} \equiv \lim_{\varepsilon\to\infty} f * \varphi_\varepsilon$ (amb les notacions habituals), tenim que

$$\lim_{\varepsilon\to\infty} f * \varphi_\varepsilon = 0 \text{ gairebé per tot},$$

de manera que, pel teorema,

$$0 = \lim_{\varepsilon\to 0} \|f\varphi_\varepsilon - f\|_1 \underbrace{=}_{\|*\|\text{contínua}} \|f\|_1,$$

i per tant concloem el que cercàvem. □

A continuació veurem que els nuclis de Poisson i Weierstrass compleixen la condició necessària per a que se'ls pugui aplicar aquests resultats. Per al primer, emprarem el Corol·lari (2.1.31), de manera que ens caldrà veure que les funcions $e^{-2\pi\varepsilon|x|}$ i $P(\varepsilon, t)$ són integrables.

Lema 2.1.33. *Les funcions $e^{-2\pi\varepsilon|x|}$ i $P(\varepsilon, t)$ són integrables.*

Demostració:
$e^{-2\pi\varepsilon|x|}$ és clarament integrable des del moment en que es compleix:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi\varepsilon|x|}\, dx = \int_{0}^{\infty} e^{-2\pi\varepsilon|x|}\, dx + \int_{-\infty}^{0} e^{-2\pi\varepsilon|x|}\, dx = \frac{1}{\pi\varepsilon} < \infty.$$

Veure la integrabilitat de $P(\varepsilon, t)$ serà més complicat. D'entrada, recordem que tenim, donat qualsevol $\varepsilon > 0$,

$$P(\varepsilon, t) = c_n \frac{\varepsilon}{(\varepsilon^2 + |t|^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \text{ amb } c_n \text{ independent de } t.$$

Aleshores, per veure P integrable, el que cal provar és que $\dfrac{\varepsilon}{(\varepsilon^2 + |t|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$ és integrable. Per a més comoditat, veurem, de fet, la integrabilitat de la funció $\dfrac{1}{(1 + |t|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$. Amb raonaments ja emprats anteriorment, sabem que veure aquest cas implicarà fàcilment el cas general.
Així doncs, donada

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |t|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\, dt,$$

comencem amb el canvi de variable $x = rt$, amb $r = |t|$ (coordenades polars de dimensió n). Clarament $r \in [0, \infty)$, i $|x| = 1$ $\left(|x| = \left|\frac{x}{r}\right| = \left|\frac{x}{x}\right| = 1\right)$. El jacobià és r^{n-1}. Així doncs, tenim:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |t|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\, dt \underbrace{=}_{\text{canvi de variable}} \int_0^{\infty} \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{(1 + r^2)^{\frac{n+1}{2}}}\, dx \right) r^{n-1}\, dr$$
$$\underbrace{=}_{x \text{ i } r \text{ són independents}} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{S}^n} dx \right)}_{=\text{Superfície d'}\mathbb{S}^{n-1}\text{, fitada}} \left(\int_0^{\infty} \frac{r^{n-1}}{(1 + r^2)^{\frac{n+1}{2}}}\, dr \right).$$

Per a que la funció sigui integrable resta veure que

$$\int_0^{\infty} \frac{r^{n-1}}{(1 + r^2)^{\frac{n+1}{2}}}\, dr < \infty,$$

cosa que farem amb el canvi de variable $\tan \Theta = r$. El rang de Θ és $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, i el jacobià, $\dfrac{1}{\cos^2 \Theta}$.

Així doncs, obtenim:

$$\int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{\frac{n+1}{2}}}\,dr \underbrace{=}_{\text{canvi de variable}} \int_0^{\pi/2} \frac{\tan^{n-1}\Theta}{\cos^2\Theta(1+\tan^2\Theta)^{\frac{n+1}{2}}}\,d\Theta$$
$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\tan^{n-1}\Theta}{\cos^2\Theta\left(\frac{\cos^2\Theta+\sin^2\Theta}{\cos^2\Theta}\right)^{\frac{n+1}{2}}}\,d\Theta$$
$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\tan^{n-1}\Theta}{\cos^2\Theta\frac{1}{\cos^{n+1}\Theta}}\,d\Theta = \int_0^{\pi/2} \frac{\frac{\sin^{n-1}\Theta}{\cos^{n-1}\Theta}}{\cos^{-(n-1)}}\,d\Theta$$
$$= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1}\Theta\,d\Theta,$$

que és una funció acotada ($\sin^{n-1} \in L^1(0,\pi/2)$ per tot $n \geq 1$, que és el que considerem). Amb això queda provada la integrabilitat de la funció P. $\square$

Amb aquest resultat, ja podem veure el que volíem.

Lema 2.1.34. *Per tota $h > 0$, es té:*

(i) $\int_{\mathbb{R}^n} W(x,h)\,dx = 1.$

(ii) $\int_{\mathbb{R}^n} P(x,h)\,dx = 1.$

Demostració:

(i)

Començarem suposant $h = 1$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} W(t,1)\,dt = (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|t|^2}{4}}\,dt = (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{t_j^2}{4}}\,dt_j.$$

Com

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{t^2}{4}}\,dt \underbrace{=}_{x=\frac{t}{2}} 2\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = 4\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = 4\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 2\sqrt{\pi},$$

aleshores

$$(4\pi)^{-\frac{n}{2}} \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{t_j^2}{4}}\,dt_j = (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n 2\sqrt{\pi} = 1,$$

i el resultat queda vist.

Si $h \neq 1$, tenim:

$$\int_{\mathbb{R}^n} W(t,h)\,dt = \int_{\mathbb{R}^n} (4\pi h)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|t|^2}{4h}}\,dt \underbrace{=}_{s=\frac{t}{\sqrt{h}}} h^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} (4\pi h)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|s|^2}{4}}\,ds$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} (4\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|s|^2}{4}}\,ds = \int_{\mathbb{R}^n} W(s,1)\,ds,$$

que ja hem vist que és igual a 1.

(ii)
Com, pel lema anterior, sabem que les funcions $e^{-2\pi\varepsilon|x|}$ i $P(\varepsilon, x)$ són integrables per a tot $\varepsilon > 0$, podem aplicar el Corol·lari (2.1.31) per afirmar que, per tot $x \in \mathbb{R}^n$,

$$e^{-2\pi\varepsilon|x|} = \int_{\mathbb{R}^n} P(\varepsilon, t) e^{2\pi i x \cdot t}\, dt.$$

En particular, si prenem $x = 0$, tenim:

$$1 = e^{2\pi\varepsilon 0} = \int_{\mathbb{R}^n} P(\varepsilon, t) e^{2\pi i 0 \cdot t}\, dt = \int_{\mathbb{R}^n} P(\varepsilon, t)\, dt,$$

la qual cosa ens dóna el resultat cercat. □

Per a treballar amb les eines necessàries per als nostres propers objectius, ens cal introduïr alguns nous conceptes i resultats.

Teorema 2.1.35. *(de Diferenciació de Lebesgue) Sigui f localment integrable en $\mathbb{R}^n$. Aleshores,*

$$\frac{1}{r^n} \int_{|t|<r} (f(x-t) - f(x))dt \overset{r \to 0}{\to} 0$$

gairebé per tot.

Ens limitarem a assumir aquest resultat. Pot trobar-se'n una demostració a [2] (Teorema (3.1))

Definició 2.1.36. *(Conjunt de punts on la integral d'una funció és diferenciable) El conjunt de punts complint la proposició anterior forma el conjunt de punts on la integral d'f és diferenciable.*

Definició 2.1.37. *(Conjunt de Lebesgue d'una funció) Sigui f una funció localment integrable. Aleshores, el conjunt de punts x tals que*

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r^n} \int_{|t|<r} |f(x-t) - f(x)|\, dt = 0,$$

és el conjunt de Lebesgue d'f.

Proposició 2.1.38. *Donada f una funció localment integrable en $\mathbb{R}^n$, gairebé per tot x, x és del conjunt de Lebesgue d'f.*

Demostració:
Que f sigui localment integrable fa que, per tot $s \in \mathbb{R}$,

$$f_s := |f - s|$$

sigui localment integrable. Pel Teorema de Diferenciació de Lebesgue, fixat s, gairebé per tot x es té:

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^n}\int_{|t|<r} f_s(x-t)-f(x)\,dt=0,$$

cosa que, per definició d'f_s, equival a

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^n}\int_{|t|<r} |f(x-t)-s|-|f(x)-s|\,dt=0.$$

Definim, per a cada s, M_s el conjunt de punts on f_s no compleix aquesta condició. Hem vist que tots els M_s tenen mesura 0. Aleshores, el conjunt $F:=\bigcup_s M_s$ també és de mesura 0. Veiem que per tot $x\notin F$, x és del conjunt de Lebesgue d'f:
Fixat $x\notin F$, $\varepsilon>0$, prenem $s\in\mathbb{R}$ tal que $|f(x)-s|<\frac{\varepsilon}{2}$. Aleshores,

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^n}\int_{|t|<r}|f(x-t)-f(x)|\,dt &\le \frac{1}{r^n}\int_{|t|<r}|f(x-t)-s|\,dt\\ &+\frac{1}{r^n}\int_{|t|<r}|f(x)-s|\,dt\le\varepsilon,\end{aligned}$$

quan $r\to 0$. Així doncs, tenim que per tot $\varepsilon>0$, prenent r prou petit, s'obté que

$$\frac{1}{r^n}\int_{|t|<r}|f(x-t)-f(x)|\,dt\le\varepsilon,$$

la qual cosa prova el resultat. □

A continuació veurem que, sota certes condicions, donada una funció integrable f en $\mathbb{R}^n$, la integral

$$\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(t)e^{2\pi i x\cdot t}\,dt$$

és ϕ-sumable a $f(x)$ en tot el conjunt de Lebesgue d'f.

Teorema 2.1.39. *Siguin $\varphi\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\psi(x)=\sup_{|t|\ge|x|}|\varphi(t)|$, i, per $\varepsilon>0$, $\varphi_\varepsilon(x):=\varepsilon^{-n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Aleshores, si $\psi\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, per $1\le p\le\infty$,*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(f*\varphi_\varepsilon)(x)=f(x)\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(t)\,dt,$$

si x és del conjunt de Lebesgue d'f.

Demostració:
Prenem x del conjunt de Lebesgue d'f, i $\delta>0$. Aleshores, per la proposició anterior, tenim un $\nu>0$ de manera que per tot $r<\nu$, la integral

$$\frac{1}{r^n}\int_{|t|<r}|f(x-t)-f(x)|\,dt$$

és menor a δ. Aleshores, si prenem $a := \int_{\mathbb{R}^\ltimes} \varphi(t)\,dt$, (que és igual a $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(t)\,dt$ amb anàleg raonament que a la demostració del Teorema (2.1.28)), tenim:

$$\begin{aligned}
|(f*\varphi_\varepsilon)(x) - af(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)\varphi_\varepsilon(x)\,dt - af(x)\right| \\
&\underbrace{=}_{\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\varepsilon(t)\,dt=a} \left|\int_{\mathbb{R}^n} (f(x-t)-f(x))\varphi_\varepsilon(x)\,dt\right| \\
&\leq \underbrace{\left|\int_{|t|<\nu} (f(x-t)-f(x))\varphi_\varepsilon(x)\,dt\right|}_{=:I_1} + \underbrace{\left|\int_{|t|\geq\nu} (f(x-t)-f(x))\varphi_\varepsilon(x)\,dt\right|}_{=:I_2}.
\end{aligned}$$

Veient que I_1 i I_2 tendeixem a 0 amb ε, haurem acabat. Ens caldran algunes observacions respecte la funció ψ (definida com $\sup\limits_{|t|\geq|x|} |\varphi(t)|$). Per començar, és clar que ψ és radial $\left(|x| = |y| \Rightarrow \psi(x) = \sup\limits_{|t|\geq|x|} |\varphi(t)| = \sup\limits_{|t|\geq|y|} |\varphi(t)| = \psi(y)\right)$, de manera que podem redefinir-la com a funció d'$\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\psi_0 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
r &\to \sup_{|t|\geq r} |\varphi(t)|,
\end{aligned}$$

ψ_0 és clarament decreixent en r. Es compleix:

$$Ar^n\psi_0(r) \leq \int_{r/2\leq|x|\leq r} \psi(x)\,dx, \ A>0 \text{ constant},$$

doncs

$$\begin{aligned}
\int_{r/2\leq|x|\leq r} \psi(x)\,dx &\underbrace{=}_{\text{polars}} \int_{r/2}^{r} s^{n-1}\left(\int_{|t|=1}\psi(st)\,dt\right)ds = \int_{r/2}^{r} s^{n-1}\psi_0(s)\left(\int_{|t|=1} dt\right)ds \\
&\geq \psi_0(r)\left(\frac{r}{2}\right)^{n-1}\frac{r}{2}\int_{|t|=1} dt = \frac{1}{2^n} r^n\psi_0(r)\int_{|t|=1} dt =: Ar^n\psi_0(r).
\end{aligned}$$

Tenim, però, que $\int_{r/2\leq|x|\leq r} \psi(x)\,dx$ tendeix a 0 tant per $r\to 0$ com per $r\to\infty$ (per ser el conjunt d'integració $r/2 \leq |x| \leq r$ de mesura 0). En particular, això implica que el límit quan r tendeix a 0 o ∞ de $r^n\psi_0(r)$ és 0, cosa que deriva en $r^n\psi_0(r)$ acotada (suposarem que per una constant A) en $(0,\infty)$ (clar, doncs per ser els límits 0, podem considerar que la funció està acotada en $(0,\mu)$, i (τ,∞), per μ petit, τ gran. En l'interval $[\mu,\tau]$ ho està per continuïtat de ψ_0).

Per acabar els preparatius, modificarem la nostra condició inicial convenientment:

$$\frac{1}{r^n}\int_{|t|<r}|f(x-t)-f(x)|\,dt<\delta \underbrace{\Leftrightarrow}_{t'=\frac{t}{s},\ s=|x|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\int_0^r s^{n-1}|f(x-st')-f(x)|\,ds\right)dt'<r^n\delta,$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{Fubini}} \int_0^r s^{n-1}\underbrace{\left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}}|f(x-st')-f(x)|\,dt'\right)}_{=:g(s)}ds<r^n\delta.$$

Així doncs, si definim

$$G(r):=\int_0^r s^{n-1}g(s)\,ds,$$

aleshores la condició d'inici es tradueix en

$$G(r)\leq\delta r^n,$$

per tot $r\leq\nu$.

Amb totes aquestes observacions presents, podem comencem a fer les acotacions pertinents. Començarem per I_1.

$$\begin{aligned}
I_1&=\left|\int_{|t|<\nu}(f(x-t)-f(x))\varphi_\varepsilon(x)\,dt\right|\\
&\underbrace{\leq}_{\psi\geq\varphi\text{ per definició de suprem}}\int_{|t|<\nu}|f(x-t)-f(x)|\varepsilon^{-n}\psi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)dt\\
&\underbrace{=}_{t'=\frac{x}{s},\ s=|x|}\int_0^\nu s^{n-1}g(s)\varepsilon^{-n}\psi_0\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)ds\\
&\underbrace{=}_{\text{parts: } du=s^{n-1}g}\underbrace{\left[G(s)\varepsilon^{-n}\psi_0\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right]_0^\nu}_{\leq\delta\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)^n\psi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\leq\delta A}-\int_0^\nu G(s)\varepsilon^{-(n+1)}\psi_0'\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)ds\\
&\underbrace{\leq}_{r=\frac{s}{\varepsilon}}\delta A-\int_0^{\frac{\nu}{\varepsilon}}\underbrace{G(\varepsilon r)}_{\leq\delta(\varepsilon r)^n}\varepsilon^{-n}\psi_0'(r)\,dr\leq\delta A-\int_0^{\frac{\nu}{\varepsilon}}\delta r^n\psi_0'(r)\,dr\\
&\leq\delta\left(A-\int_0^\infty r^n\psi_0'(s)\,ds\right).
\end{aligned}$$

Per a poder dir que $I_1\overset{\delta\to0}{\to}0$, només ens cal veure que

$$\int_0^\infty r^n\psi_0'(s)\,ds$$

està acotada. Veiem-ho:

$$\int_0^\infty r^n\psi_0'(r)\,dr\underbrace{=}_{\text{parts, } v=s^n}\underbrace{[s^n\psi_0(r)]_0^\infty}_{=0\text{ propietat de }\psi\text{ (ja vista)}}+n\int_0^\infty r^{n-1}\psi_0(r)\,dr.$$

Però
$$\int_0^\infty r^{n-1}\psi_0(r)\,dr = B\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\,dx,\ B>0 \text{ constant},$$
(amb raonament anàleg a l'emprat a l'acotació inferior de $\displaystyle\int_{r/2\le|x|\le r}\psi(x)\,dx$). Que ψ sigui integrable ens dóna l'acotació de la integral.
Així doncs, podem afirmar que existeix $B>0$ tal que
$$\left|A-\int_0^\infty r^n\psi_0'(s)\,ds\right|<B,$$
de manera que $I_1\le\delta B$, i, per tant,
$$\lim_{\delta\to 0} I_1 = 0.$$
Així, podem fer tendir I_1 a 0 quan $\varepsilon\to 0$ (prenent qualsevaol $\varepsilon<\delta$ ja serviria). Per acabar la demostració, ens cal un raonament similar per a I_2. Per a fer-ho, notarem $\psi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\psi\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$, i χ_ν la funció característica tal que
$$\chi_\nu(x) := \begin{cases} 1, \text{ si } |x|\ge\nu. \\ 0, \text{ en cas contrari.}\end{cases}$$
Aleshores, si considerem q el conjugat de p $\left(\text{en el sentit } \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1\right)$, tenim:
$$I_2 = \left|\int_{|t|\ge\nu}(f(x-t)-f(x))\varphi_\varepsilon(x)\,dt\right| \le \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)\varphi_\varepsilon(t)\chi_\nu(t)\,dt\right| + \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_\varepsilon(t)\chi_\nu(t)\,dt\right|$$
$$\underbrace{\le}_{\text{Hölder}} \|f\|_p\,\|\chi_\nu\psi_\varepsilon\|_q + |f(x)|\,\|\chi_\nu\psi_\varepsilon\|_1 .$$
El segon sumand tendeix a 0 clarament amb ε des del moment en què f acotat ($f\in L^p(\mathbb{R}^n)$), i
$$\|\chi_\nu\psi_\varepsilon\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n}\psi_{\varepsilon(x)}\chi_\nu(x)\,dx = \int_{|x|>\nu}\psi_\varepsilon(x)\,dx = \int_{|x|>\nu}\varepsilon^{-n}\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\,dx$$
$$\underbrace{=}_{t=\frac{x}{\varepsilon}} \int_{|t|>\frac{\nu}{\varepsilon}}\psi(t)\,dt \overset{\varepsilon\to 0}{\to} 0,$$
(doncs el conjunt $\{t\in\mathbb{R}^n,\ |t|<\nu/\varepsilon\}$ té mesura 0 quan $\varepsilon\to 0$). Per enllestir la demostració ens resta l'acotació del primer sumand. És directe tenint present que f acotat en norma L^p, ($f\in L^p(\mathbb{R}^n)$), i que
$$\|\chi_\nu\psi_\varepsilon\|_q = \left(\int_{|x|\ge\nu}|\psi_\varepsilon(x)|^q\,dx\right)^{1/q} \underbrace{=}_{1+\frac{q}{p}=1+q(1-\frac{1}{q})=q} \left(\int_{|x|\ge\nu}\psi_\varepsilon(x)(\psi_\varepsilon(x))^{q/p}\,dx\right)^{1/q}$$
$$\underbrace{\le}_{\text{Hölder}} \left(\|\chi_\nu\psi_\varepsilon\|_\infty^{q/p}\,\|\chi_\nu\psi_\varepsilon\|_1\right)^{1/q} = \|\chi_\nu\psi_\varepsilon\|_\infty^{1/p}\,\|\chi_\nu\psi_\varepsilon\|_1^{1/q} .$$

A les observacions inicials, però, hem vist que

$$\lim_{r\to 0,\infty} r^n \psi_0(r) = 0,$$

de manera que

$$\|\chi_\nu \psi_\varepsilon\|_\infty = \sup_{|x|\geq \nu} \psi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\psi_0\left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right) \underbrace{=}_{\psi_0 \text{ decreixent (vist)}} \nu^{-n}\left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^n \psi_0\left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right) \overset{\varepsilon\to 0}{\to} 0.$$

Així doncs, tenim que tant I_1 com I_2 tendeixen a 0, i per tant que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |(f*\varphi_\varepsilon)(x) - af(x)| = 0,$$

i el teorema queda vist. $\square$

Observació 2.1.40. *Aquest teorema és aplicable, en particular, a les funcions W i P. Com, a més, hem vist que aquestes funcions integren 1 en $\mathbb{R}^n$, ens permet afirmar que*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} f(t)W(x-t,\varepsilon) = f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} f(t)P(x-t,\varepsilon).$$

Corol·lari 2.1.41. *Sigui $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, i $\widehat{f} \geq 0$. Aleshores, si f és contínua en el 0, $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, i*

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x) e^{2\pi i t\cdot x}\, dx,$$

gairebé per tot t.

Demostració:
Òbviament, si f localment integrable és contínua en $x \in \mathbb{R}^n$, aleshores x és del conjunt de Lebesgue d'f. Si és contínua en el 0, tenim:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x) e^{-2\pi\varepsilon|x|}\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x) e^{2\pi i t\cdot x} \underbrace{e^{-2\pi\varepsilon|x| - 2\pi i t\cdot x}}_{=:\phi(\varepsilon x)}\, dx.$$

Si $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, aleshores, amb les notacions del teorema, sent $\varphi = \widehat{\phi}$, tenim que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x) e^{2\pi i t\cdot x}\phi(\varepsilon x) \underbrace{=}_{\text{Teorema}} \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_\varepsilon(x-t)dx \underbrace{=}_{\text{teorema anterior}} f(t)\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\, dx.$$

Si $t = 0$, $\phi(\varepsilon x) = e^{-2\pi\varepsilon|x|}$, que sabem integrable, amb transformada de Fourier igual a $\varphi := P(t,\varepsilon)$ (Teorema (2.1.23)), que integra 1 (Lema (2.1.34)). Així doncs, prenent $t = 0$, tenim

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x) e^{-2\pi\varepsilon|x|}\, dx = f(0).$$

Aleshores, en ser $f \geq 0$, podem aplicar el lema de Fatou per a dir que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\varepsilon\to 0} \widehat{f}(t)e^{-2\pi\varepsilon|x|}\,dx \underbrace{\leq}_{\text{Fatou}} \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)e^{-2\pi\varepsilon|x|}\,dx = f(0),$$

i, en aquest cas, per ser $f \geq 0$, arribem a

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(x)|\,dx \underbrace{=}_{f\geq 0} \left|\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)\,dx\right| \leq |f(0)|,$$

de forma que ja tenim que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Aleshores,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)e^{2\pi i t\cdot x}\,dx$$

defineix una funció contínua (doncs té $\|\cdot\|_\infty$ menor o igual a la norma L^1 d'$\widehat{f}$), de manera que podem aplicar el Corol·lari (2.1.31) per a dir, com volíem, que

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)e^{2\pi i t\cdot x}\,dx$$

gairebé per tot $t \in \mathbb{R}^n$. □

Observació 2.1.42. *Amb les hipòtesis del corol·lari, és clar que*

$$f(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)\,dx.$$

Observació 2.1.43. *Aplicant el corol·lari als nuclis de Poisson i Weierstrass, i recordant els resultats dels Teoremes 5.19 i 5.22, tenim que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} W(x,\varepsilon)e^{2\pi i t\cdot x}\,dx = e^{-4\pi^2\varepsilon|t|^2},$$

i que

$$\int_{\mathbb{R}^n} P(x,\varepsilon)e^{2\pi i t\cdot x}\,dx = e^{-2\pi\varepsilon|t|},$$

per tot $\varepsilon > 0$.

Amb aquestes eines, a més de tot el que s'ha vist, podem veure que tant P com W compleixen propietats de semigrups.

Corol·lari 2.1.44. *Donats* h_1, $h_2 \in \mathbb{R}$, *aleshores*

(i) $W(x, h_1 + h_2) = \int_{\mathbb{R}^n} W(x-t, h_1)W(t, h_2)\,dt$

(ii) $P(x, h_1 + h_2) = \int_{\mathbb{R}^n} P(x-t, h_1)P(t, h_2)\,dt$

Demostració:
Les proves d'ambdós apartats són anàlogues. Només en detallarem la primera:
Pel corol·lari anterior, tenint present que W, per definició, és parell,

$$\begin{aligned}\widehat{W}(t, h_1+h_2) &= \int_{\mathbb{R}^n} W(x, h_1+h_2)e^{-2\pi i t\cdot x}\,dx \\ &\underbrace{=}_{s=-x} \int_{\mathbb{R}^n} W(s, h_1+h_2)e^{2\pi i t\cdot s}\,ds \\ &\underbrace{=}_{\text{corol·lari anterior}} e^{-4\pi^2 h_1|t|^2}e^{-4\pi^2 h_2|t|^2}.\end{aligned}$$

D'altra banda, pel Teorema (2.1.6),

$$(\widehat{W(\cdot, h_1) * W}(\cdot, h_2))(x) = \widehat{W}(x, h_1)\widehat{W}(x, h_2) \underbrace{=}_{\text{com abans}} e^{-4\pi^2 h_1|t|^2}e^{-4\pi^2 h_2|t|^2}$$

Aleshores, pel Corol·lari (2.1.31), com

$$\widehat{W}(t, h_1+h_2) = \widehat{W}(t, h_1)\widehat{W}(t, h_2),$$

concloem que

$$W(x, h_1+h_2) = \int_{\mathbb{R}^n} W(x-t, h_1)W(t, h_2)\,dt,$$

i la demostració queda feta. $\square$

2.2 Transformada de Fourier. Cas $L^2(\mathbb{R}^n)$.

2.2.1 Teoria $L^2(\mathbb{R}^n)$ i Teorema de Plancherel.

En espais $L^2(\mathbb{R}^n)$, definim la transformada de Fourier com l'extensió de la obtinguda a $L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Començarem a preparar el terreny amb una propietat prou senzilla.

Teorema 2.2.1. *Sigui $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Aleshores,*

$$\left\|\widehat{f}\right\|_2 = \|f\|_2\,.$$

Demostració:
Definim $g(x) := \overline{f(-x)} \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, i prenem $h := f * g$. Notem que $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}\|h\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(\cdot - t)g(t)|\,dt \underbrace{\leq}_{\text{Hölder}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^2\,dt\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \\ &= \|f\|_2\,\|g\|_2 \leq \infty,\end{aligned}$$

per ser $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. També sabem, per el Teorema (2.1.6), que

$$\widehat{h} = \widehat{f}\widehat{g},$$

que és igual a $\widehat{f}\widehat{\overline{\overline{f}}}$ tenint present la linealitat de la transformada de Fourier definida en L^1 (Teorema (2.1.2)). Així doncs, tenim que, de fet,

$$\widehat{h} = |\widehat{f}|^2.$$

Ara ens fixem en què h és contínua. Això és degut a que, com $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+t) - f(x)|^2 \, dx = 0,$$

i, aleshores, per qualsevol $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} |h(x+t) - h(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x+t-s)g(s)\, ds - \int_{\mathbb{R}^n} f(x-s)g(s)\, ds \right| \\
&\leq \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+t-s) - f(x-s)||g(s)|\, ds \\
&\underbrace{=}_{\text{caonvergència dominada (acotat per de } 2\|f\|_2\|g\|_2)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\lim_{t\to 0} |f(x+t-s) - f(x-s)|}_{=0} |g(s)|\, ds = 0,
\end{aligned}$$

de manera que h és contínua. En particular, h és contínua en el 0.
Així doncs, tenim que h és integrable contínua en el 0, i que $\widehat{h} := |\widehat{f}|^2$ és positiva, amb la qual cosa podem aplicar el Corol·lari (2.1.41) per afirmar que $\widehat{h}$ és integrable i que

$$h(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{h}(x)\, dx.$$

Aleshores, el resultat és directe:

$$\begin{aligned}
\left\|\widehat{f}\right\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{h}(x)\, dx = h(0) \underbrace{=}_{h\,:=\,f*g} \int_{\mathbb{R}^n} f(0-x)g(x)\, dx \\
&\underbrace{=}_{*\ \text{commutativa}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(0-x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{f(x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f|^2\, dx = \|f\|_2^2
\end{aligned}$$

□

Observació 2.2.2. *Aquest teorema ens diu que la transformada de Fourier vista en $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ és un operador lineal isomètric en norma L^2.*

Observació 2.2.3. *$L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ és un subespai d'$L^2(\mathbb{R}^n)$ dens. Clar tenint present que l'espai de les funcions contínues està inclòs en $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, i que a la demostració de la Proposició (1.1.19) s'ha vist que les funcions contínues són denses en $L^p(\mathbb{R}^n)$ per un p qualsevol.*

La transformada de Fourier d'una funció $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ qualsevol serà

$$\widehat{f}(x) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} h_k(t) e^{-2\pi i t\cdot x}\, dt \text{ (convergència en norma)},$$

amb $\{h_k\}_k \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ amb límit f. Resulta convenient posar, per tot k,

$$h_k(t) := \begin{cases} f(t), \text{ si } |t| < k. \\ 0, \text{ en cas contrari.} \end{cases}$$

Així doncs,

Definició 2.2.4. *(Transformada de Fourier d'una funció d'$L^2(\mathbb{R}^n)$) Sigui $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, definim la transformada de Fourier d'f en qualsevol $x \in \mathbb{R}^n$ com*

$$\mathcal{F}(f)(x) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} h_k(t) e^{-2\pi i t\cdot x}\, dt \textit{ (convergència en norma)},$$

on, per tot x,

$$h_k(x) := \begin{cases} f(x), \textit{ si } |x| < k. \\ 0, \textit{ en cas contrari.} \end{cases}$$

Observació 2.2.5. *Les h_k's, així definides, són d'$L^1(\mathbb{R}^n)$ per ser $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Veiem-ho:*

$$\|h_k\|_1 = \int_{|t|<k} 1|f(t)|\, dt \underbrace{\leq}_{Hölder} \underbrace{\left(\int_{|t|<k} |f(t)|^2\, dt\right)^{1/2}}_{\leq \|f\|_2} \underbrace{\left(\int_{|t|<k} 1^2\, dt\right)^{1/2}}_{<\infty}$$
$$\leq A\, \|f\|_2 < \infty.$$

Com $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, les h_k's també ho són, de manera que les h_k's pertanyen a $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ i la transformada està ben definida.

Definició 2.2.6. *(Operador unitari) Un operador unitari en $\mathbb{K}$ espai mètric és un operador lineal isomètric*

$$T: \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$

exhaustiu.

Teorema 2.2.7. *(de Plancherel)*

(i) $\mathcal{F}$ és un operador unitari en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

(ii) $\mathcal{F}^{-1}(g)(x) = (\mathcal{F}g)(-x)$ per tot $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Demostració:

(i)

Ja sabem que $\mathcal{F}$ és un operador lineal (per definició d'$\mathcal{F}$ tenint present que la transformada en $L^1(\mathbb{R}^n)$ ho és) isomètric (el Teorema (2.2.1) s'estén de manera natural a tot $L^2(\mathbb{R}^n)$). Cal doncs veure que $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^n))$ és $L^2(\mathbb{R}^n)$. Veiem-ho per reducció a l'absurd. Suposem que $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^n)) = F$ contingut estrictament en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Aleshores, en particular, per la teoria de projeccions detallada a la Secció 1.6.1., $L^2(\mathbb{R}^n) = F \oplus F^T$, $F^T \neq 0$ i tenim una funció $g \in F^T$, $g \neq 0$, tal que per tot $\widehat{f} \in \mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^n))$ $(g, \widehat{f}) = 0$. Això és

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x) g(x)\, dx = 0, \ \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

que, per la Fòrmula de la Multiplicació, equival a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \widehat{g}(x)\, dx = 0, \ \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

cosa que, per ser $L^2(\mathbb{R}^n)$ complet, implica $\widehat{g} \equiv 0$. Com $\mathcal{F}$ isometria, tenim que

$$0 = \|\widehat{g}\|_2 = \|g\|_2 \,,$$

de manera que tenim $g = 0$, resultat contradictori amb el que havíem suposat. Això implica la veracitat del resultat enunciat.

(ii)

Donada $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, per la Definició (2.2.4), sabem que,

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f = \lim_{k \to \infty} \int_{|x| \le k} \widehat{f}(x) e^{2\pi i t \cdot x}\, dx.$$

Veiem el resultat per a les funcions $g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$: definim

$$g'(x) := (\mathcal{F}(g))(-x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(t) e^{2\pi i t \cdot x}\, dt,$$

i, aleshores, donada una $h \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ qualsevol, tenim:

$$\begin{aligned}(h, g') &= \int_{\mathbb{R}^n} h(t) \overline{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(s) e^{2\pi i s \cdot t}\, ds \right)}\, dt \underbrace{=}_{\text{Fubini}} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\widehat{g}(s)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} h(t) e^{-2\pi i s \cdot t}\, dt \right) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(h)(s) \overline{\widehat{g}(s)}\, ds = (\mathcal{F}(h), \widehat{g}) = (\mathcal{F}(h), \mathcal{F}(g)).\end{aligned}$$

Com $\mathcal{F}$ és unitari, $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$, i per tant es compleix que per tota funció h_1, $h_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $(\mathcal{F}(h_1), h_2) = (h_1, \mathcal{F}(h_2))$. això ens porta a concloure que

$$(h, g') = (\mathcal{F}(h), \mathcal{F}(g)) = (h, \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(g)) = (h, g),$$

de manera que $g' \equiv g$, i el resultat queda vist per a funcions d'$L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. L'extensió a $L^2(\mathbb{R}^n)$ és directe degut a la densitat d'$L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ en aquest espai. $\square$

2.3 Incís: Transformada de Fourier a $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < 2$.

En els dos darrers capítols hem definit la transformada de Fourier en els espais $L^1(\mathbb{R}^n)$ i $L^2(\mathbb{R}^n)$. Amb aquests resultats, podem definir-la de manera natural a la classe

$$L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n) := \{f \text{ tal que } f \equiv f_1 + f_2 \text{ per algun } f_1 \in L^1(\mathbb{R}^n),\ f_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Així, donada una funció $f := f_1 + f_2$, amb $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, definirem la seva transformada de Fourier com

$$\widehat{f} := \widehat{f_1} + \widehat{f_2}.$$

Comprovem que la transformada està ben definida, doncs, si amb les notacions anteriors, $g := g_1 + g_2 = f_1 + f_2 =: f$, aleshores tenim que $\underbrace{g_1 - f_1}_{\in L^1(\mathbb{R}^n)} = \underbrace{f_2 - g_2}_{\in L^2(\mathbb{R}^n)} \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, i, per tant, $\widehat{g_1} - \widehat{f_1} = \widehat{f_2} - \widehat{g_2}$, de manera que $\widehat{g_1} + \widehat{g_2} = \widehat{f_1} + \widehat{f_2}$ i per tant les transformades de Fourier de les funcions inicials f i g coincideixen.

Observació 2.3.1. *Com per tot p, $1 < p < 2$, es té que $L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$, hem donat, de fet, la definició de transformada de Fourier en aquests espais.*

També és extensible la següent propietat, coneguda per les funcions $L^1(\mathbb{R}^n)$ i $L^2(\mathbb{R}^n)$:

Teorema 2.3.2. *Siguin $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq 2$. Aleshores, $h := f * g$ pertany a $L^p(\mathbb{R}^n)$, i*

$$\widehat{h}(x) = \widehat{f}(x)\widehat{g}(x),$$

gairebé per tot $x \in \mathbb{R}^n$.

Bibliografia

[1] J. Cerdà, *Introducció a l'Anàlisi Funcional*, Edicions UB, Barcelona, 2004.

[2] J. Cerdà, *Análisis Real*, Edicions UB, Barcelona, 2000.

[3] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1998.

[4] G. B. Folland, *Fourier Analysis and its Aplications*, Wadsworth and Brooks/Cole, Califòrnia, 1992.

[5] S. Novo, R. Obaya i J. Rojo, *Ecuaciones y Sistemas Diferenciales*, McGraw-Hill, Valladolid, 1995.

[6] J.M. Ortega, *Introducción al Análisis Matemático*, Labor, Barcelona, 1993.

[7] W. Rudin, *Principios del Análisis Matemático*, Mc-Graw-Hill, Mèxic, 1980.

[8] W. Rudin, *Análisis Real y Complejo*, Mc-Graw-Hill/Interamericana, Mèxic, 1988.

[9] E.M. Stein i G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Eucidean Spaces*, Princeton University Press, New Jersey, 1971.

[10] A. Torchinsky, *Real-Variable Methods in Harmonic Analysis*, Academic Press, Orlando, 1986.

[11] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Cambridge University Press, Cambridge, 1959.

Fe d'errades.

- *Lema 1.1.10. Pàgina 8.*
  En la demostració del lema, es menciona que $t(x_0 - \delta) = t(x_0 + \delta)$ com a conseqüència de què el cosinus és una funció senar. Òbviament, el motiu és exactament el contrari: el resultat és cert perquè el cosinus és funció parell.

- *Lema 1.1.11. Pàgina 11.*
  La prova no és vàlida. El raonament correcte és el següent:
  Sabent que la integral de g s'anul·la en tot interval, tenim que s'anul·la en tot obert (per ser tot obert reunió d'intervals). Això unit al fet que
  $$\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,dt = 0$$
  (per hipòtesi, doncs $1 = e^0$ polinomi trigonomètric) ens permet deduïr (prenent complementaris) que la integral de g s'anul·la també en qualsevol tancat de $[-\pi, \pi]$.
  Suposem ara, sense pèrdua de generalitat, $g > 0$ en $I \subset [-\pi, \pi]$, $|I| > 0$. Podem posar I com a reunió d'intervals tancats I_k, i tenim que
  $$0 \leq \int_I g(t)\,dt \leq \sum_k \underbrace{\int_{I_k} g(t)\,dt}_{=0} = 0,$$
  de manera que tenim contradicció amb la hipòtesi $g > 0$ en I.

- *Proposició 1.1.19. Pàgina 18.*
  La comprovació de què $\mathcal{P}$ separa punts no és correcte: el sistema plantejat és directament incompatible. Aquest resultat és, de fet, directe, a partir de que $f(t) := e^{it}$ és injectiva en $(-\pi, \pi)$.
  Després d'aplicar el Teorema d'Stone-Weierstrass, hi ha un error tipogràfic: un cop definides les funcions ς, es menciona que, de fet, les funcions χ són una constant per una funció característica. Aquest fet, en realitat, correspon a les funcions ς acabades de definir.

- *Proposició 1.2.2. Pàgina 22.*
  En la prova de $|D_n(t)| \leq n + 1/2$ la desigualtat no ve de
  $$|D_n(t)| \leq \left| \frac{1}{2} \sum_{|j| \leq n} e^{ijt} \right|$$

(on, per definició de nucli de Dirichlet, val la igualtat), sinò de

$$\left|\frac{1}{2}\sum_{|j|\leq n} e^{ijt}\right| \leq \frac{1}{2}\sum_{|j|\leq n} \left|e^{ijt}\right|.$$

- *Teorema 1.2.14. Principi de Localització. Pàgina 28.*
  L'objectiu inicial és aplicar Dini, per la qual cosa la funció ϕ_x definida ha de ser, de fet,

  $$\phi_x := f(x+t) + f(x-t).$$

  Com suposem $f \equiv 0$ en l'interval, seguim podent aplicar Dini amb $A \equiv 0$.

- *Observació 1.5.5. Pàgina 45.*
  En el desenvolupament de $\lim_n \sigma_n$, es té, en realitat,

  $$\lim_n \sigma_n = \lim_n \frac{2 + z + ... + \sum_{j=0}^{n} z^j}{n+1}$$

  (on $2 + z = 1 + \sum_{j=0}^{1} z^j$).

- *Observació 1.5.2. Nucli de Fejer. Pàgina 46.*
  En el desenvolupament de $\sigma_n(f,t)$ hi ha un error tipogràfic al darrer pas. El resultat correcte és

  $$\sigma_n(f,t) = \sum_{|j|\leq n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) c_j e^{ijt}.$$

- *Teorema 1.5.14. Pàgina 52.*
  El pas

  $$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_n(t)\,dt - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x))K_n(t)\,dt$$

  pot efectuar-se perquè

  $$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,dt = 1.$$

  A la igualtat indicada com a guia en la demostració li falta el terme $\dfrac{1}{\pi}$.

- *Teorema 1.6.16. Pàgina 58.*
  Es té $x \in H$ Hilbert, $y = P_F(x)$, F s.v.t. d'H. Es vol veure que $z := x - y$ és d'F^T:

  $$z = x - y = x - P_F(x) \Rightarrow P_F(z) = P_F(x - P_F(x)) = P_F(x) - P_F(x) = 0.$$

  A la prova s'havia canviat un signe per error.

- *Proposició 1.6.18. Pàgina 59.*
  Perquè la prova sigui completa cal raonar que en un sistema ortonormal com el presentat

$$P_F(x) = \sum_{j \in J} |(x, e_j)_H|^2.$$

Això és clar imposant que la recta $\overline{xP_F(x)}$ ha de ser perpendicular a F. Així, fixada i, i suposant $P_F(x) = \sum_{j \in J} \alpha_j e_j$,

$$(x - P_F(x), e_i) = (x, e_i) - (P_F(x), e_i) = 0 \Leftrightarrow (x, e_i) = \left(\sum_{j \in J} \alpha_j e_j, e_i \right)$$
$$= (\alpha_i e_i, e_i) = \alpha_i (e_i, e_i) = \alpha_i.$$

- *Teorema 1.6.24. Pàgina 65.*

  - A la prova del teorema de representació de Riesz, en realitat, per tal com ha estat definida, es té

$$\|\phi\|_q^q \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_j |\text{sign}(F(b_j) - F(a_j))|^q \ \chi_{I_j(t)}^q \, dt.$$

  - En l'estudi de la funció L, hi ha un error tipogràfic que pot resultar confús: el sumatori

$$\sum j \left| L(\chi_{I_j}) \right|$$

hauria de ser

$$\sum_j \left| L(\chi_{I_j}) \right|.$$

- *Proposició 1.7.4. Pàgina 68.*
  Per veure que w_x és de variació acotada només cal observar que el seu límit en el 0 és 0:

$$\lim_{t \to 0} \frac{2 - t \,\text{cotg} t/2}{2t} = \lim_{t \to 0} \frac{-2t \,\text{cotg}(t/2) + \frac{t^2}{\sin^2(t/2)} - 4 + 2t \,\text{cotg}(t/2)}{2}$$
$$= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{t^2}{\sin^2(t/2)} - 4}{2} = 0. \quad \text{(Aplicant Hôpital.)}$$

Tenint present que l'interval en el que oscil·la x és $[0, \pi]$, i la definició de w_x, tenim també que la funció és contínua excepte en $t = x$, on presenta una discontinuïtat de salt. Amb això concloem que $w_x \in VA[0, \pi]$. Per acabar, l'extensió d'w_x mencionada en la demostració de la proposició és la simètrica respecte el 0. Així definida, és conseqüència directa de l'argument anterior que és de variació acotada en $[-\pi, \pi]$.

- *Lema 1.7.7. Pàgina 72.*
  No té rellevància en la prova, però, en realitat, es té
  $$\frac{l}{\pi}\frac{\pi + y - z}{2} = \frac{l}{2} + \frac{l(y-z)}{2\pi},$$
  i no
  $$\frac{l}{\pi}\frac{\pi + y - z}{2} = \frac{l}{2} - \frac{l(y-z)}{2},$$
  com es diu erroniament.

- *Teorema 2.1.6. Pàgina 85.*
  A l'hora de fer el canvi de variable $u = s - t$ s'ha mantingut el diferencial d's enlloc de canviar-lo per du, com correspon.

- *Teorema 2.1.10. Pàgina 87.*
  Malgrat que la implicació
  $$\lim_{h\to 0} B(h) = 0 \Rightarrow \left\| \hat{g}(x) - \hat{f}(x) \lim_{h_k \to 0} \left(\frac{e^{2\pi i x\cdot h} - 1}{h_k} \right) \right\|_\infty = 0$$
  és correcta, la igualtat
  $$B(h) = \left\| \hat{g}(x) - \hat{f}(x) \lim_{h_k \to 0} \left(\frac{e^{2\pi i x\cdot h} - 1}{h_k} \right) \right\|_\infty$$
  no és certa (obviament la segona quantitat és $\lim_{h\to 0} B(h)$).

- *Teorema 2.1.12. Pàgina 88.*
  Hi ha un error tipogràfic: la integral
  $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\epsilon} \, |x| \, dx$$
  hauria de ser
  $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\epsilon |x|} \, dx.$$

- *Lema 2.1.18. Pàgina 90.*
  Durant l'estudi de
  $$\int_{\mathcal{D}} f(z) \, dz,$$
  en l'acotació de la integral d'f sobre γ_2, enlloc de
  $$\left| \int_{\gamma_2} f(t) \, dt \right| \leq e^{\pi y^2} \int_{-y}^{y} e^{-\pi R^2} = y e^{\pi (R^2 - y^2)},$$
  s'hauria de considerar
  $$\left| \int_{\gamma_2} f(t) \, dt \right| \leq e^{\pi y^2} \int_{-y}^{y} e^{-\pi R^2} \, dt = 2y e^{-\pi (R^2 - y^2)}.$$

Amb aquesta apreciació, el raonament posterior (convergència del resultat a 0 en $R \to \infty$) té sentit.

També s'ha produït un error tipogràfic, en posar $\gamma_1' \equiv i$, quan en realitat és, obviament, $\gamma_2' \equiv i$.

- *Teorema 2.1.20. Pàgina 91.*

  L'enunciat del teorema no és correcte. En realitat, com s'extreu de la prova,

  $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi h|x|^2} e^{-2\pi i x\cdot t}\, dx = h^{-n/2} e^{-\pi|t|^2/h}.$$

  També, en el primer pas de la demaostració, falta h a l'exponent del terme $e^{-\pi x_j^2}$.