ANÁLISIS ARMÓNICO

6-2-2002

EXAMEN FINAL

[1] **(10 puntos) Series de Fourier de funciones en** $L^2(\mathbb{T})$.

Demostrar la desigualdad de Bessel, la igualdad de Parseval, que la transformación $f \longrightarrow \{\hat{f}(k)\}_k$ es un isomorfismo isométrico de $L^2(\mathbb{T})$ en $\ell^2(\mathbb{Z})$, y que las sumas parciales de la serie de Fourier de f, $S_N f$, convergen a f en $L^2(\mathbb{T})$.

[2]

(a) **(3 puntos)** Enunciar el **Teorema de Inversión** para la transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^n)$.

(b) **(4 puntos)** Demostrar el **Teorema de Unicidad** para la transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^n)$.

(c) **(3 puntos)** Estudiar si la transformada de Fourier de la función

$$f(x) = e^{-|x|^2}\chi_B(x),$$

está en $L^1(\mathbb{R}^n)$, siendo B la bola unidad de $\mathbb{R}^n$.

[3] Sea $f(x) = \pi - x$, $x \in (-\pi, \pi)$.

(a) **(5 puntos)** Calcular la serie de Fourier de f.

(b) **(5 puntos)** Estudiar la convergencia puntual, uniforme (global y localmente) y en norma L^2 de la serie anterior.

[4] Estudiar la validez de los siguientes enunciados:

(a) **(3 puntos)** La serie de Fourier de la función impar f definida en $(0,\pi]$ como $f(x) = x^{-1/2}$ converge en todo punto.

(b) **(2 puntos)** La serie de Fourier de la función del apartado (a) converge en $L^2(\mathbb{T})$.

(c) **(2 puntos)** Existe una función $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\hat{f}(x) = |x|^{-1/2}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(d) **(3 puntos)** Existe una función $f \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{F}(f) \notin L^\infty(\mathbb{R})$.