ANÁLISIS ARMÓNICO

14-9-1999

EXAMEN FINAL

[1]

(a) **(6 puntos)** Enunciar y demostrar el Test de Dini.

(b) **(4 puntos)** Demostrar que si $f \in L^1(\mathbf{T})$ satisface

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(t)}{t} \right| dt < \infty,$$

entonces $S_n[f](0) \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$.

[2] **(10 puntos)** Demostrar que la siguiente igualdad es cierta, para $n \in \mathbf{N}$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{4 \sin x}{17 - 8 \cos x} \sin(nx)\, dx = \frac{1}{4^n}.$$

[3] Sean $f \in L^1$ y $g \in L^2$.

(a) **(5 puntos)** Sean $f_k, g_k \in L^1 \cap L^2$ y supongamos que

$$f_k \longrightarrow f \quad \text{en } L^1 \qquad \text{y} \qquad g_k \longrightarrow g \quad \text{en } L^2.$$

Demostrar que $f_k * g_k \longrightarrow f * g$ en L^2.

(b) **(5 puntos)** Demostrar que $\mathcal{F}(f * g)(x) = \hat{f}(x)\, \mathcal{F}g(x)$.

[4]

(a) **(5 puntos)** Demostrar que si $f \in L^2(\mathbf{R^n})$, $\{\tau_h f\}_{h \in \mathbf{R^n}}$ es total en $L^2(\mathbf{R^n})$, si y sólo si, $\hat{f}(x) \neq 0$, a.e. $x \in \mathbf{R^n}$.

(b) **(5 puntos)** Demostrar que para toda $f \in L^2(\mathbf{R})$, existe una sucesión $\{f_k\}_k \subset L^\infty(\mathbf{R})$ tal que $f_k(x)\, \operatorname{sinc} x \longrightarrow f(x)$, en $L^2(\mathbf{R})$.