Treball Final de Grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

Teoria Espectral de Grafs

Autor: Àngel Garcia Vaqué

Director:	Dr. Javier Soria
Realitzat a:	Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 27 de juny de 2017

Índex

Agraïments

Principalment vull donar les gràcies al Dr. Javier Soria de Diego per tota la dedicació i l'interès que ha tingut des del primer moment per dirigir-me aquest treball. Ha estat un gran professor i un gran tutor, ja que m'ha sabut projectar tota la passió que té per la seva feina i, sobretot, per aprendre i descobrir coses noves.

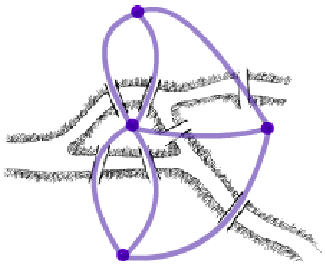
També vull agrair a la meva família i als meus amics tot el suport i la paciència dipositats en mi durant aquests mesos i tota l'etapa universitària.

Finalment vull dedicar aquest treball al meu padrí que, des d'on estigui, m'ha estat ajudant.

Resum/Abstract

Des de la publicació de la solució dels set ponts de Königsberg per Leonard Euler al 1736, la teoria de grafs ha estat una gran branca d'estudi dins de la matemàtica discreta. Königsberg és una ciutat russa per la qual passa el riu Pregolya. Aquest riu tenia dues illes que estaven connectades entre elles i a les vores del riu mitjançant set ponts. El problema plantejava si és possible creuar tots els ponts només una vegada i tornar al punt d'origen.

Leonard Euler



Königsberg

Euler va demostrar que no era possible representant les illes i les vores com a vèrtexs i els ponts com a arestes. Va publicar la solució a *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* [11].

Aquest treball tracta de relacionar la teoria de grafs amb algunes de les propietats algebraiques més conegudes. En particular, un dels objectius d'aquest treball és trobar de quina manera podem identificar els grafs i les seves característiques a partir d'elements pròpiament algebraics. Notem també que un altre objectiu és resoldre els problemes del llibre de J.A. Bondy i U.S.R. Murty, *Graph Theory with Applications*, relacionats amb els valors propis d'un graf [2, Secció 1.1]. Aquest i el llibre de N. Biggs, *Algebraic Graph Theory* [1], han estat els llibres més importants per desenvolupar el treball.

En el primer capítol començarem introduint les definicions més elementals dins la teoria de grafs i l'àlgebra lineal. Cal destacar la importància del Teorema d'Euler per la seva repercussió en els resultats posteriors. També dedicarem una secció al nombre cromàtic i donarem algunes de les cotes ja vistes al curs del Grau. Pel que fa a l'àlgebra lineal, enunciarem alguns dels teoremes i de les proposicions que s'han vist en els primers cursos del Grau per tal d'utilitzar-los com a eines en els següents capítols. Notem que la informació dels tres primers capítols s'ha extret, en gran part, dels apunts de l'assignatura de Grafs [16].

El segon capítol està dividit en dues seccions ben diferenciades. En la primera farem referència al grup d'automorfismes d'un graf, d'on resultarà interessant veure com podem expressar el seu cardinal. La segona secció tractarà de desenvolupar els conceptes més espectrals. Veurem que tot valor propi d'un graf és real i que tot valor propi racional d'un graf és enter. A més, classificarem tots els grafs simples des de 1 fins a 4 vèrtexs amb el seu corresponent polinomi característic i el seu espectre.

Finalment, en el darrer capítol trobarem els resultats més importants de la teoria algebraica de grafs. Començarem amb una primera secció bastant extensa dedicada a estudiar, majoritàriament, l'espectre d'un graf. Mostrarem peculiaritats com expressar el polinomi característic d'un graf a partir del polinomi característic del seu complement o relacionar alguns dels coeficients d'aquest polinomi amb el nombre d'arestes i triangles del graf. Donarem una cota del cardinal del grup d'automorfismes per als grafs connexos diferents del graf complet K_n i amb més de 4 vèrtexs. De fet, demostrarem que és més petit o igual que $(n-1)!$, on la igualtat és certa si, i només si, el graf és una estrella $K_{1,n-1}$. També cal destacar l'última part de la secció, on estudiarem els grafs amb només 1, 2 o 3 valors propis. Posteriorment, trobarem una secció en la que veurem les relacions més directes entre el nombre cromàtic d'un graf i el seu espectre. En particular, trobarem una cota inferior i superior del nombre cromàtic d'un graf en funció dels seus valors propis màxim i mínim. Per acabar de completar el capítol, en la última secció farem una classificació dels grafs més coneguts i trobarem les expressions dels seus polinomis característics, espectres, grups d'automorfismes i nombres cromàtics amb els seus corresponents exemples.

Notem que en aquest treball només utilitzarem i desenvoluparem els coneixements de la teoria espectral de grafs a partir de la matriu d'adjacència, ja que també existeix tota una teoria que prové de la matriu laplaciana i que té molts punts en comú.

Ever since Leonard Euler published the solution to the problem of The Seven Bridges of Königsberg in 1736, Graph Theory has been one of the major fields of study in Mathematics. Königsberg is a Russian city crossed by a river named Pregolya. This river used to have two islands connected with each other and also to the river shores by seven bridges. The problem set out if it was possible to cross all the bridges just one time and go back to the origin point.

Euler proved that it was not possible by representing the island and the shores as vertexes and the bridges as edges. He published the solution in *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* [11].

The aim of this monograph is to relate Graph Theory with some of the most important algebraic properties. Concretely, one of the objectives of this work is to find how we can identify graphs and their characteristics from algebraic elements. We also notice that another goal is to solve the problems of the book, *Graph Theory with applications,* written by J.A. Bondy and U.S.R. Murty, related to the eigenvalues of a graph [2, Section 1.1]. This book and N. Biggs' book *Algebraic Graph Theory* [1],

have been the most important books we have used to develop this work.

In the first chapter we include the most elemental definitions of graphs and lineal algebra and we draw special attention to Euler's Theorem for its repercussion in the later results. On the other hand, we will also mention the chromatic number, as well as some of the inequalities seen along this Bachelor course. As for the lineal algebra, few theorems and propositions studied throughout the Bachelor course are pointed out as tools to be used in the following chapters. Note that the information has been extracted in the first three chapters from the notes [16].

The second chapter is divided in two very different sections. In the first one, we will refer to the group of automorphisms of a graph and bring to notice how its cardinality can be expressed. The second section will develop more spectral concepts. We will see that every eigenvalue of a graph is real and that a rational eigenvalue is integer. Furthermore, we will classify all the simple graphs from 1 up to 4 vertexes with its correspondent characteristic polynomial and its spectrum.

Finally, in the last chapter we will find the most important results to the algebraic Graph Theory. We will start with a wide section potentially based on the study of a graph spectrum. We will show special features such as expressing the characteristic polynomial of a graph from the characteristic polynomial of its complement or relating some of the coefficients with the number of edges and triangles of the graph. We will give a inequality of the cardinality of the automorphism for the connected graphs different from the complete graph K_n and with more than 4 vertexes. In fact, we will prove that it is less than or equal to $(n-1)!$, in which equality is true if, and only if, the graph is a star $K_{1,n-1}$. Furthermore, we will study the graphs with 1, 2 or 3 eigenvalues. We are going to see afterwards, the most direct connections between the chromatic number of a graph and its spectrum. In particular, we will find a lower and upper estimate of the chromatic number of a graph according to its maximum and minimum eigenvalues. In order to complete the chapter, in the last section, we will classify the most popular graphs and also the expression of its characteristic polynomials, spectrums, automorphism groups and chromatic numbers with its correspondent examples.

In this monograph we will only use and develop the knowledge of the spectral Graph Theory from the adjacency matrix, as there is another existent theory that comes from the laplacian matrix and has many aspects in common.

Capítol 1

Introducció

En aquest capítol introduirem els elements bàsics de la teoria de grafs que tindrem en compte a l'hora de desenvolupar la teoria espectral i també alguns dels resultats bàsics de l'àlgebra lineal.

1.1 Grafs

Aquesta secció conté la informació essencial sobre els grafs i el seu entorn.

Definició 1.1.1. Un graf $G = (V, E)$ es un conjunt d'elements $V = V(G)$ que anomenem conjunt de vèrtexs, i un conjunt d'arestes $E = E(G)$ unides per dos vèrtexs. Si dues o més arestes estan unides pel mateix parell de vèrtexs s'anomenen arestes múltiples o arestes paral·leles. Si una aresta està unida amb ella mateixa direm que es tracta d'un llaç. Un graf és simple si no té arestes múltiples ni llaços. En aquest treball sempre considerarem, en general, que els grafs són simples. Si $e \in E(G)$ incideix en $a, b \in V(G)$, escrivim $e = \overline{ab}$.

Definició 1.1.2. Dos grafs G i H són isomorfs si existeix una bijecció φ entre els seus conjunts de vèrtexs que conserva les arestes:

$$\exists \varphi : V(G) \longrightarrow V(H) \text{ tal que, } \overline{xy} \in E(G) \Leftrightarrow \overline{\varphi(x)\varphi(y)} \in E(H).$$

Es dóna per entès que, si hi ha arestes múltiples, aquesta condició s'aplica a totes per separat. En particular, $E(G)$ i $E(H)$ tenen el mateix nombre d'elements.

Definició 1.1.3. Un subgraf de G és un graf en què el seu conjunt de vèrtexs i arestes pertanyen a G.

Definició 1.1.4. El grau d'un vèrtex $v \in V(G)$ és el nombre d'arestes de $E(G)$ que incideixen a v, tenint en compte que els llaços compten el doble. El denotem per $d(v) = d_G(v)$.

Definició 1.1.5. Sigui $G = (V, E)$ un graf. Denotem per:

- $n(G)$ el nombre de vèrtexs de G, és a dir, $n(G) = |V|$.

- $m(G)$ el nombre d'arestes de G, és a dir, $m(G) = |E|$.
- Grau mínim de G: $\delta(G) = \min\{d(v), v \in G\}$.
- Grau màxim de G: $\Delta(G) = \text{màx}\{d(v), v \in G\}$.

Diem que G és un graf regular de grau r (o G és r-regular) si $\delta = \Delta = r$.

Definició 1.1.6. Si $v \in V(G)$, aleshores $G - v$ és el graf que obtenim quan eliminem v a G així com totes les arestes incidents. Similarment, si $e \in E(G)$, $G - e$ és el subgraf obtingut al extreure de G l'aresta e. Vegeu la Figura 1.1.

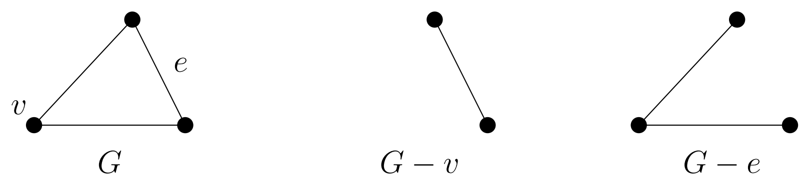


Figura 1.1: Exemple d'un graf menys un vèrtex i d'un graf menys una aresta.

Teorema 1.1.7. ***(Euler, 1736*** *[11]) Per a tot graf G, la suma del grau de tots els seus vèrtexs és igual al doble del nombre d'arestes:*

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m.$$

Demostració. Per demostrar el teorema farem inducció en m:

Si $m = 0$, el resultat és trivial. Si $m = 1$, aleshores tenim que $n = 2$ i aquests dos vèrtexs tenen grau 1 o bé $n = 1$ i l'aresta és un llaç (en els dos casos es compleix la igualtat). Suposem cert el teorema per $m \leq k$ i sigui G un graf amb $m = k + 1$. Considerem e una aresta de G i el graf $H = G - e$. Aleshores, tot vèrtex de H té el mateix grau que en G excepte dos que tenen un grau menys (si e no és un llaç) o excepte un que té 2 graus menys (si e és un llaç). En qualsevol cas, usant la hipòtesi d'inducció, tenim que

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = \sum_{v \in V(H)} d(v) + 2 = 2(m - 1) + 2 = 2m.$$

$\square$

Definició 1.1.8. Un camí de llargada k entre els vèrtexs $v_1 \neq v_{k+1}$ d'un graf donat és una seqüència de k arestes de la forma

$$\overline{v_1 v_2}, \overline{v_2 v_3}, \ldots, \overline{v_k v_{k+1}}.$$

En aquest cas el denotem com un camí entre v_1 i v_{k+1}. Un sender és un camí per al qual totes les arestes són diferents. Una ruta és un sender per al qual tots els vèrtexs també són diferents.

Definició 1.1.9. Un graf és connex si existeix una ruta entre tot parell de vèrtexs. Sigui G un graf, els subgrafs connexos més grans de G s'anomenen components connexes.

Definició 1.1.10. Sigui G un graf connex i $u, v \in V(G)$. Definim $d(u, v)$, distància de u a v, la llargada de la ruta més curta (anomenada geodèsica) entre u i v. Anomenem diàmetre de G la llargada de la geodèsica més llarga de G, la qual denotem per $D(G)$.

Definició 1.1.11. Alguns tipus de grafs són:

- Complet: Grafs simples per als quals tot parell de vèrtex té una aresta que hi incideix. Els denotem per K_n. En particular són grafs $(n-1)$-regulars.

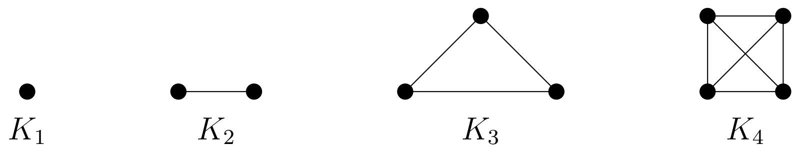


Figura 1.2: Grafs complets per a $n = 1, 2, 3, 4$.

- Bipartit: Grafs en què el seu conjunt de vèrtexs es pot dividir en la unió disjunta de dos subconjunts A i B de manera que les arestes són adjacents amb un vèrtex de A i un altre de B. Un graf bipartit és complet si tot vèrtex de A incideix en tot vèrtex de B. Si $\mathrm{Card}(A) = r$ i $\mathrm{Card}(B) = s$, denotem el graf bipartit complet per $K_{r,s}$.

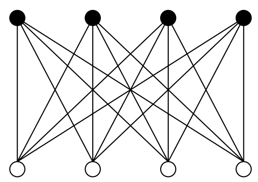


Figura 1.3: Graf bipartit $K_{4,4}$.

El graf bipartit complet $K_{1,n-1}$, on n és el nombre de vèrtexs, s'anomena estrella.

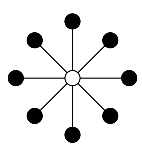


Figura 1.4: Estrella $K_{1,8}$.

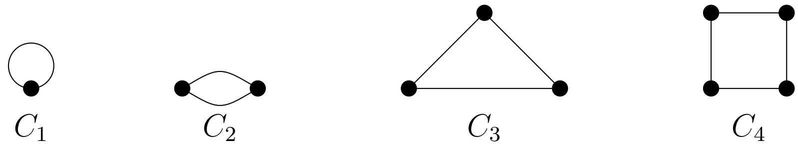


Figura 1.5: Cicles per a $n = 1, 2, 3, 4$.

- Cicle: Els cicles C_n són grafs connexos 2-regulars amb n vèrtexs i n arestes.
- Arbre: Els arbres són grafs connexos que no contenen cicles. En particular, són grafs connexos per als quals només existeix una ruta entre dos vèrtexs qualsevol. Anomenem fulles als vèrtexs de l'arbre que tenen grau 1.

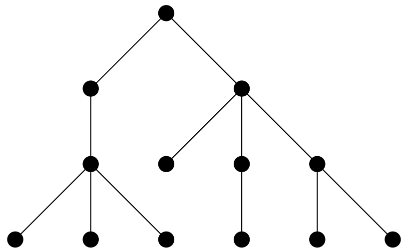


Figura 1.6: Exemple d'un arbre amb 13 vèrtexs i 7 fulles.

Definició 1.1.12. Sigui G un graf, anomenem el complement de G al graf que té el mateix conjunt de vèrtexs de G i el seu conjunt d'arestes són els parells de vèrtexs no adjacents de G. El denotem per $\overline{G}$.

Exemple 1.1.13. Representem un exemple gràfic. Vegeu la Figura 1.7.

Figura 1.7: Exemple del complement d'un graf G.

1.2 Representació amb matrius

En aquesta secció definirem la matriu d'adjacència i d'incidència d'un graf i observarem algunes de les seves propietats.

Definició 1.2.1. Sigui G un graf. La matriu d'adjacència de G és la matriu quadrada $n \times n$

$$A(G) = (a_{i,j})_{i,j \in \{1,\ldots,n\}},$$

on $a_{i,j}$ és el nombre d'arestes unides pels vèrtexs i, j (els llaços compten el doble, si $i = j$). La matriu d'incidència de G és la matriu $n \times m$

$$I(G) = (b_{i,j})_{i \in \{1,\ldots,n\},\, j \in \{1,\ldots,m\}},$$

on $b_{i,j} = 1$, si el vèrtex i és incident amb l'aresta j, i $b_{i,j} = 0$ en cas contrari.

Exemple 1.2.2. Per al graf de la Figura 1.8 s'obtenen les següents matrius:

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; I(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

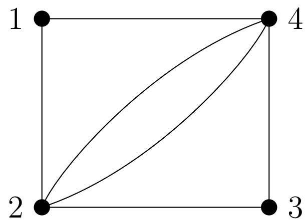


Figura 1.8: Exemple d'una matriu d'adjacència d'un graf G.

Observacions 1.2.3.

- La matriu $A(G)$ dependrà de l'ordre en que enumerem els vèrtexs. Per exemple, les següents matrius d'adjacència representen el mateix graf: Vegeu la Figura 1.9.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- $A(G)$ és una matriu simètrica, i tota matriu simètrica amb zeros a la diagonal genera un graf sense llaços.
- G és un graf simple $\Leftrightarrow a_{j,j} = 0$ i $a_{i,j} \in \{0, 1\}$.
- Per a cada vèrtex $j = 1, \ldots, n$,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = d(j).$$

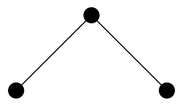


Figura 1.9: Graf lineal amb 3 vèrtexs.

- Per a cada aresta $j \in \{1, \ldots, m\}$,

$$\sum_{i=1}^{n} b_{i,j} = 2.$$

1.3 Nombre cromàtic

En aquesta secció definirem el nombre cromàtic i introduirem algunes de les seves propietats bàsiques.

Definició 1.3.1. El nombre cromàtic d'un graf G connex, denotat per $\chi(G)$, és el mínim nombre de colors que es necessiten per pintar tots els vèrtexs de G de manera que dos vèrtexs adjacents siguin de diferent color. En general, per grafs específics no és trivial trobar aquest nombre, encara que hi ha alguns resultats que ens permetran donar bones estimacions i, en alguns casos, podrem determinar el valor exacte.

Exemple 1.3.2. Considerem el graf G de la Figura 1.10. Si pintem els vèrtexs de manera que dos vèrtexs adjacents no poden tenir el mateix color, aleshores és fàcil calcular el nombre cromàtic del graf.

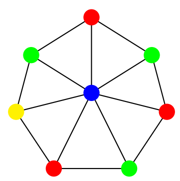


Figura 1.10: $\chi(G) = 4$.

Exemple 1.3.3. Alguns exemples són:

- $\chi(G) \geq 2 \Leftrightarrow m(G) \geq 1$.
- $\chi(K_n) = n$.
- $\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{si } n \text{ és parell} \\ 3, & \text{si } n \text{ és senar} \end{cases}$.
- G és bipartit i $m(G) \geq 1 \Leftrightarrow \chi(G) = 2$.

Observació 1.3.4. El fet que un graf tingui nombre cromàtic $\chi(G) = k$ és equivalent a trobar una partició de $V(G) = V_1 \cup \cdots \cup V_k$, amb el menor k possible, tal que tots els vèrtexs en V_j amb $1 \leq j \leq k$ no són adjacents entre ells dos a dos.

Proposició 1.3.5. *Sigui G un graf connex de n vèrtexs i m arestes, aleshores*

$$\frac{n^2}{n^2 - 2m} \leq \chi(G) \leq n.$$

Demostració. El fet que $\chi(G) \leq n$ és trivial. Considerem ara la partició $V(G) = V_1 \cup \cdots \cup V_k$, amb $k = \chi(G)$. Sigui $x_j = |V_j|$, aleshores

$$\sum_{j=1}^{k} x_j = n.$$

Escollim $v \in V_j$. Clarament, com a molt hi ha $n - x_j$ arestes adjacents a v, i per tant

$$\frac{\sum_{j=1}^{k} x_j(n - x_j)}{2} \geq m. \tag{1.3.1}$$

Utilitzant la desigualtat de Cauchy-Schwarz tenim que:

$$n = \sum_{j=1}^{k} x_j \leq \left(\sum_{j=1}^{k} x_j^2\right)^{1/2} k^{1/2},$$

i per tant

$$\frac{n^2}{k} \leq \sum_{j=1}^{k} x_j^2.$$

Finalment, utilitzant (1.3.1):

$$2m \leq n - \sum_{j=1}^{k} x_j^2 \leq n^2\left(1 - \frac{1}{k}\right),$$

i resolvent per k,

$$\frac{n^2}{n^2 - 2m} \leq k = \chi(G).$$

□

Exemple 1.3.6. El graf de la Figura 1.11 satisfà que $n = 4$ i $m = 5$. Utilitzant la Proposició 1.3.5 tenim que $\chi(G) \geq 16/(16 - 10) = 8/3$. Aleshores, $\chi(G) \geq 3$ i és fàcil veure que, en efecte, $\chi(G) = 3$.

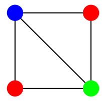


Figura 1.11: $\chi(G) = 3$.

Definició 1.3.7. Diem que un G és un graf crític si, per a tot subgraf $H \subsetneq G$, tenim que $\chi(H) < \chi(G)$, i G és un graf k-crític si és crític i $\chi(G) = k$.

Observació 1.3.8. Es pot estudiar la caracterització dels grafs k-crítics per $k \leq 3$, però per $k \geq 4$ encara és un problema obert.

Proposició 1.3.9. *Si G és k-crític, aleshores $\delta(G) \geq k - 1$.*

Demostració. Suposem que existeix un graf G k-crític amb $\delta(G) < k - 1$. Sigui $v \in V(G)$ tal que $d(v) = \delta(G)$ i sigui $H = G - v$ un subgraf adequat de G. Aleshores, $\chi(H) = k - 1$ (si $\chi(H) < k - 1$ podríem trobar un nou color per v i aconseguir que $\chi(G) < k$, que és una contradicció). Aleshores podem considerar la partició $V(H) = V_1 \cup \cdots \cup V_{k-1}$. Com $\delta(G) < k - 1$, existeix $j \in \{1, \ldots, k-1\}$ tal que v no és adjacent a cap vèrtex de V_j. Per tant, si denotem $V_j^{'} = V_j \cup \{v\}$, també tenim la següent partició per G:

$$V(G) = V_1 \cup \cdots \cup V_j^{'} \cup \cdots \cup V_{k-1},$$

i arribem a una contradicció, ja que $k = \chi(G) \leq k - 1$. □

Corol·lari 1.3.10. *Si $\chi(G) = k$, aleshores G té com a mínim k vèrtexs amb grau almenys $k - 1$.*

Demostració. Sigui H un subgraf k-crític de G. Utilitzant la Proposició 1.3.9 tenim que $\delta(H) \geq k - 1$, i el grau de tot vèrtex de H és almenys $k - 1$. Com $n(H) \geq \chi(H) = k$, aleshores hi ha com a mínim k vèrtexs en H amb grau almenys $k - 1$. És evident que si $v \in V(H)$, aleshores $d_G(v) \geq d_H(v)$ i per tant acabem de veure que en G hi ha com a mínim k vèrtexs amb grau almenys $k - 1$. □

Amb tot això, podem millorar la cota superior del nombre cromàtic de qualsevol graf G:

Corol·lari 1.3.11. *Per a tot graf G, $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Demostració. Si $\chi(G) = k$, pel Corol·lari 1.3.10, G té com a mínim k vèrtexs amb grau almenys $k - 1$, i per tant per alguns $v \in V(G)$, $d(v) \geq k - 1$. Aleshores, $\Delta(G) \geq d(v) \geq k - 1 = \chi(G) - 1$. □

1.4 Àlgebra lineal

En aquesta secció farem referència a les definicions i els resultats d'àlgebra lineal que tindrem en compte en els pròxims capítols.

Definició 1.4.1. Considerem el conjunt $L(E, F)$ de totes les aplicacions lineals de E a F. Hi ha una manera natural de definir una suma i un producte per elements del cos K a $L(E, F)$. Concretament, si $f, g \in L(E, F)$ i $a \in K$ definim la suma $f+g$ per

$$(f + g)(u) = f(u) + g(u),\ \forall u \in E$$

i el producte af per

$$(af)(u) = af(u),\ \forall u \in E.$$

Les aplicacions $f + g$ i af són, clarament, lineals. $L(E, F)$ amb aquestes dues operacions compleix totes les condicions d'espai vectorial [5, Secció IV.1]; en direm espai vectorial de les aplicacions de E a F. Un cas particular és $L(E, E)$, l'espai vectorial dels endomorfismes de E, que denotarem per $\mathrm{End}(E)$.

Definició 1.4.2. Sigui E un espai vectorial de dimensió n i K un cos. Sigui $f \in \mathrm{End}(E)$. Un vector $v \in E$, $v \neq \overrightarrow{0}$, és un vector propi de f si

$$f(v) = kv,\ k \in K.$$

Direm, aleshores, que k és un valor propi de f.

Definició 1.4.3. Siguin E un espai vectorial de dimensió n, $f \in \mathrm{End}(E)$ i A la seva matriu associada en una certa base $e_1, \ldots, e_n$ de E. Llavors,

$$\det(f - k\mathrm{Id}) = \begin{vmatrix} a_1^1 - k & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 - k & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n - k \end{vmatrix} = 0.$$

Aquesta expressió és una equació de grau n en la incògnita k, el costat esquerre de la qual és el valor a k d'un polinomi $p_A(x)$, que anomenarem polinomi característic de A. Notem que $\det(f - k\mathrm{Id}) = \det(A - k\mathrm{Id})$ i, per tant, $p_f(x) = p_A(x)$.

Proposició 1.4.4. *[14] Siguin E un espai vectorial de dimensió n, $f \in \mathrm{End}(E)$ i A la seva matriu associada. Si A és real i simètrica aleshores els seus n valors propis són reals.*

Demostració. Suposem que $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$, aleshores $\exists v \in \mathbb{C}^n$ tal que $Av = \lambda v$. Ara tenim que

$$\begin{aligned} Av = \lambda v &\longrightarrow \overline{v}^t Av = \lambda \overline{v}^t v \\ \overline{v}^t A = \overline{\lambda}\overline{v}^t &\longrightarrow \overline{v}^t Av = \overline{\lambda}\overline{v}^t v \end{aligned}$$

En efecte, observem que $\overline{\lambda} = \lambda$ i, per tant, $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

Definició 1.4.5. Sigui A una matriu simètrica d'ordre n, aleshores:

- A és definida positiva si $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x^t A x > 0$.
- A és semidefinida positiva si $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x^t A x \geq 0$.
- A és definida negativa si $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x^t A x < 0$.
- A és semidefinida negativa si $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x^t A x \leq 0$.

Definició 1.4.6. Sigui E un espai vectorial de dimensió n sobre el cos $\mathbb{R}$ i v un vector de E. Diem que $||\cdot|| : E \to \mathbb{R}$ és un operador que defineix la norma de v, i escrivim $||v||$, si compleix:

1. $||v|| > 0$ si $v \neq 0$ i $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0, \forall v \in E.$
2. $||kv|| = |k| \cdot ||v||, \forall k \in \mathbb{R}, \forall v \in E.$
3. $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||, \forall u, v \in E.$

Exemples 1.4.7. Sigui $v \in E$ tal que $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

- Definim la norma euclidiana per:
$$||v||_2 = \sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2 + \cdots + |v_n|^2}.$$
- Definim la norma-p per:
$$||v||_p = \sqrt[p]{|v_1|^p + |v_2|^p + \cdots + |v_n|^p}.$$
Observem que per $p = 2$ obtenim la norma euclidiana.
- Definim la norma infinit o norma del màxim per:
$$||v||_\infty = \text{màx}(|v_1|, |v_2|, \ldots, |v_n|) = \underset{i \in \{1,2,\ldots,n\}}{\text{màx}} |v_i|.$$

Proposició 1.4.8. *[12, Teorema 4.2.2] Siguin E un espai vectorial de dimensió n, $f \in \text{End}(E)$ i A la seva matriu associada. Si A és real i simètrica i $\lambda_{\text{màx}}$ és el seu valor propi més gran, aleshores:*
$$\lambda_{\text{màx}} = \sup_{x \neq 0} \frac{x^t A x}{x^t x}.$$
A més, si per algun vector x tenim que $x^t A x = \lambda_{\text{màx}} x^t x$, aleshores $Ax = \lambda_{\text{màx}} x$.

Definició 1.4.9. Donada una matriu $A \in M_{m \times n}$, s'anomena menor d'ordre k de A la matriu quadrada d'ordre k formada pels elements de A situats en k files i k columnes prefixades.

Proposició 1.4.10. *[5, Proposició VIII.1.2] El polinomi característic de A és*

$$p_A(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1}(a_1^1 + \cdots + a_n^n)x^{n-1} + \cdots + (-1)^r A_r x^r + \cdots + \det A,$$

on A_r és la suma dels determinants dels menors d'ordre $n-r$ formats pels elements de A de $(n-r)$ files i $(n-r)$ columnes corresponents als mateixos índexs: a_i^j $i = i_1, \ldots, i_{n-r}, j = i_1, \ldots, i_{n-r}$. És a dir, són els menors d'ordre $n-r$ que tenen la diagonal principal sobre la diagonal principal de A.

Definició 1.4.11. Donat un cos K, un ideal de K és un subconjunt I de K tal que

1) $(I, +)$ és un subgrup de $(K, +)$;

2) $ax \in I$, per a tot parell d'elements $a \in K$, $x \in I$.

Teorema 1.4.12. *(**Lagrange** [6, Secció 1.4]) Donats un grup G i un subgrup H de G, el grup G és finit si, i només si, H i $[G : H]$ són finits. En aquest cas*

$$|G| = |H| \cdot [G : H].$$

En particular, $|H|$ i $[G : H]$ són divisors de $|G|$.

Definició 1.4.13. [5, Secció VIII.3] Sigui E un espai vectorial de dimensió n, $f \in \mathrm{End}(E)$ i K un cos. Fixat un vector $u \in E$ considerem ara l'aplicació

$$\begin{array}{rccc} \Phi_u\colon & K[x] & \longrightarrow & E \\ & p(x) & \longmapsto & p(f)(u). \end{array}$$

El nucli de Φ_u és un ideal de $K[x]$

$$\mathrm{Nuc}(\Phi_u) = \{p(x) \in K[x] \mid p(f)(u) = \overrightarrow{0}\} = (m_u(x)).$$

Denotem per $m_u(x)$ el polinomi mínim de f a u o simplement el polinomi mínim de u (si no hi ha confusió sobre què és f); està determinat llevat de factors de K i generalment s'agafa mònic.

Proposició 1.4.14. *[5, Proposició VIII.5.1] Sigui r el grau de $m_f(x)$, aleshores $r \leq n$.*

Proposició 1.4.15. *[5, Proposició VIII.6.1] Sigui $a \in K$, aleshores a és un zero de $m_f(x)$ si, i només si, és un zero de $p_f(x)$.*

Teorema 1.4.16. *[5, Teorema VIII.6.2] Si el polinomi mínim, $m_f(x)$, i el polinomi característic, $p_f(x)$, descomponen en factors lineals, $p_f(x)$ és un anul·lador de f: $p_f(f) = 0$.*

Teorema 1.4.17. *(**Cayley-Hamilton** [5, Teorema VIII.6.3]) El polinomi mínim divideix sempre el polinomi característic.*

Definició 1.4.18. Considerem dues seqüències de nombres reals $\theta_1 \geq \ldots \geq \theta_n$ i $\eta_1 \geq \ldots \geq \eta_m$ amb $m < n$. Aleshores diem que la segona seqüència està entrellaçada amb la primera quan

$$\theta_i \geq \eta_i \geq \theta_{n-m+i}, \ \forall i = 1, \ldots, m.$$

Teorema 1.4.19. *[4, Teorema 2.5.1] Sigui S una matriu real $n \times m$ tal que $S^t S = \mathrm{Id}$. Sigui A una matriu real i simètrica d'ordre n ($n > m$) amb valors propis $\theta_1 \geq \ldots \geq \theta_n$. Definim la matriu $B = S^t AS$ amb valors propis $\eta_i \geq \ldots \geq \eta_m$ i corresponents vectors propis $v_1, \ldots, v_m$. Aleshores:*

(i) Els valors propis de B estan entrellaçats respecte els de A.

(ii) Si $\eta_i = \theta_i$ o $\eta_i = \theta_{n-m+i}$ per algun $i \in [1, m]$, aleshores si v és vector propi de η_i respecte B tenim que Sv és vector propi de η_i respecte A.

(iii) Si $\eta_i = \theta_i$, $\forall i = 1, \ldots, l$ (o $\eta_i = \theta_{n-m+i}$, $\forall i = l, \ldots, m$), amb $l \leq m$, aleshores Sv_i és vector propi de η_i respecte A, $\forall i = 1, \ldots, l$ (respectivament $i = l, \ldots, m$).

Teorema 1.4.20. *(**Perron-Frobenius** [15, Teorema 1.2], [4, Teorema 2.2.1]) Si una matriu $n \times n$ té tots els valors no negatius, aleshores té un valor propi real λ no negatiu amb valor absolut màxim respecte tots els valors propis. Aquest λ té un vector propi amb coeficients reals no negatius. Si, a més, la matriu no conté blocs amb 0's de dimensió $k \times (n-k)$ disjunts de la diagonal, aleshores λ té multiplicitat 1 i el corresponent vector propi té coeficients positius.*

Capítol 2

Teoria Espectral

En aquest capítol desenvoluparem els conceptes teòrics de la teoria espectral de grafs.

2.1 Grup d'automorfismes

Ara definirem i observarem algunes propietats sobre el grup d'automorfismes d'un graf.

Definició 2.1.1. Definim el grup d'automorfismes d'un graf G per:

$$\Gamma(G) = \{\varphi : G \longrightarrow G : \varphi \text{ és un isomorfisme (automorfisme)}\}.$$

Observació 2.1.2. $\Gamma(G)$ és subgrup del grup de permutacions de n elements, S_n.

Exemples 2.1.3.

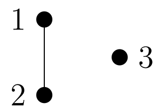


Figura 2.1: $\Gamma(G) = \{\mathrm{Id},\ (1,2)\}$

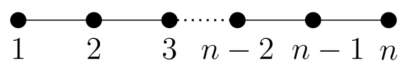


Figura 2.2: $\Gamma(G) = \{\mathrm{Id},\ (1,n)(2,n-1)(3,n-2)\cdots\}$.

Observació 2.1.4. Si dos grafs són isomorfs, és fàcil veure que els seus corresponents grups d'automorfismes també ho són. No obstant, el recíproc no és cert. Els següents grafs són clarament no isomorfs, però en canvi tenen el mateix grup d'automorfismes: Vegeu la Figura 2.3.

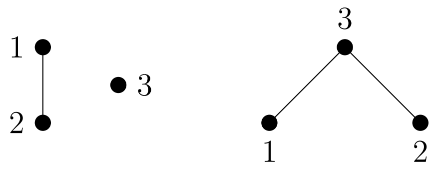


Figura 2.3: $\Gamma(G) = \{\text{Id}, (1,2)\}$.

Proposició 2.1.5. *Sigui G un graf, aleshores $\Gamma(G) = \Gamma(\overline{G})$.*

Demostració. Sigui $\varphi \in \Gamma(G)$ un automorfisme de G. Sabem que φ preserva l'adjacència i la no-adjacència dels vèrtexs de G. Així doncs, com $\overline{G}$ té per vèrtexs adjacents (no-adjacents) els vèrtexs no-adjacents (adjacents) de G, tenim que φ preserva l'adjacència i la no-adjacència dels vèrtexs de $\overline{G}$. En conseqüència, $\varphi \in \Gamma(\overline{G})$. Anàlogament, si $\varphi \in \Gamma(\overline{G})$, aleshores $\varphi \in \Gamma(G)$. Per tant, $\Gamma(G) = \Gamma(\overline{G})$. $\square$

Definició 2.1.6. Diem que un graf G és vèrtex-transitiu si per a tot parell de vèrtexs u i v de G existeix $\varphi \in \Gamma(G)$ tal que $\varphi(u) = v$.

Observació 2.1.7. La vèrtex-transitivitat implica que cada vèrtex tingui el mateix grau k i, en conseqüència, sigui k-regular.

Definició 2.1.8. Sigui G un graf, $v \in V(G)$ i $\Gamma(G)$ el grup d'automorfismes de G. L'estabilitzador de v en $\Gamma(G)$, denotat per Γ_v, és un subgrup de $\Gamma(G)$ que conté tots els automorfismes que deixen fix v, és a dir:

$$\Gamma_v = \{\varphi \in \Gamma(G) : \varphi(v) = v\}.$$

Definició 2.1.9. Sigui G un graf, $v \in V(G)$ i $\Gamma(G)$ el grup d'automorfismes de G. L'òrbita de v sota l'acció de $\Gamma(G)$, denotada per v^Γ, és el conjunt de les imatges avaluades en v donades per automorfismes de $\Gamma(G)$, és a dir:

$$v^\Gamma = \{\varphi(v) : \varphi \in \Gamma(G)\}.$$

Proposició 2.1.10. *Sigui G un graf, aleshores $|\Gamma(G)| = |\Gamma_v| \cdot |v^\Gamma|$, $\forall v \in V(G)$.*

Demostració. Fixat $v \in V(G)$, sabem que Γ_v és un subgrup de $\Gamma(G)$. Definim el grup quocient $\Gamma(G)/\Gamma_v$. Si tenim que $\varphi \in \Gamma(G)$, aleshores $[\varphi] \in \Gamma(G)/\Gamma_v$ si, i només si,

$$[\varphi] = [\psi] \Leftrightarrow \varphi^{-1} \circ \psi \in \Gamma_v, \ \forall \psi \in \Gamma(G).$$

Observem que aquesta relació és una relació d'equivalència. Pel Teorema 1.4.12 sabem que

$$|\Gamma(G)/\Gamma_v| = \frac{|\Gamma(G)|}{|\Gamma_v|}$$

i per tant, només cal provar que $|\Gamma(G)/\Gamma_v| = |v^\Gamma|$. Definim la següent correspondència:

$$\begin{array}{rcl} \Gamma(G)/\Gamma_v & \longrightarrow & v^\Gamma \\ [\varphi] & \longmapsto & \varphi(v). \end{array}$$

Cal veure que està ben definida i que és bijectiva:

(i) Si $[\varphi] = [\psi] \Rightarrow \varphi^{-1} \circ \psi \in \Gamma_v \Rightarrow \varphi^{-1} \circ \psi(v) = v \Rightarrow \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \psi(v) = \psi(v) = \varphi(v)$. Així doncs, està ben definida.

(ii) Per provar que és bijectiva veurem que és injectiva i exhaustiva.

(ii.1) Injectiva: $\varphi(v) = \psi(v) \Rightarrow \varphi^{-1} \circ \psi \in \Gamma_v \Rightarrow [\varphi] = [\psi]$.

(ii.2) Exhaustiva: És trivial ja que, donat $\varphi(v) \in v^\Gamma$, aleshores $[\varphi] \longrightarrow \varphi(v)$.

Així doncs, $|\Gamma(G)/\Gamma_v| = |v^\Gamma| \Rightarrow |v^\Gamma| = \dfrac{|\Gamma(G)|}{|\Gamma_v|} \Rightarrow |\Gamma(G)| = |\Gamma_v| \cdot |v^\Gamma|$. □

2.2 Polinomi característic

Aquesta secció conté la definició del polinomi característic i l'espectre d'un graf, així com algunes de les seves propietats.

Definició 2.2.1. El polinomi característic d'un graf G és el polinomi característic de la seva matriu d'adjacència:

$$P_G(\lambda) = \det(\lambda \cdot \mathrm{Id} - A(G))$$

Notem que invertim l'ordre respecte la Definició 1.4.3 per tal que el coeficient de grau més gran sigui sempre igual a 1.

Definició 2.2.2. L'espectre d'un graf G és el conjunt de valors propis (amb multiplicitat) de P_G. El denotem per $\mathrm{Spec}(G)$.

Exemple 2.2.3.

$$P_{K_3}(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda - 2,$$

i $\mathrm{Spec}(G) = \{2, -1, -1\}$.

Observació 2.2.4. Si A_1 i A_2 són dos matrius d'adjacència diferents d'un graf G, aleshores

$$\det(\lambda \cdot \mathrm{Id} - A_1) = \det(\lambda \cdot \mathrm{Id} - A_2),$$

i per tant, l'espectre de G no depèn de quina matriu escollim.

En efecte, si fem transformacions elementals en la matriu A_1 sabem que el seu determinant continuarà sent el mateix. A més, com la diferència de les matrius ve provocada per una permutació en la enumeració dels vèrtexs, A_1 tindrà els mateixos valors que A_2. Així doncs, fem ús de les transformacions elementals fins tenir $A_1 = A_2$ i obtenim que $\det(\lambda \cdot \mathrm{Id} - A_1) = \det(\lambda \cdot \mathrm{Id} - A_2)$.

Proposició 2.2.5. *Tot valor propi d'un graf G és real.*

Demostració. Sigui $A(G)$ la matriu d'adjacència de G, sabem que $A(G)$ és real i simètrica. Aleshores per la Proposició 1.4.4 els valors propis de G són reals. $\square$

Proposició 2.2.6. *Tot valor propi racional d'un graf G és enter.*

Demostració. Sigui $P_G(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ el polinomi característic de G, on $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$. Suposem que $\frac{p}{q}$ és una arrel racional de $P_G(\lambda)$ on p i q són enters coprimers. Aleshores es compleix que:

$$-a_0 q^{n-1} = \frac{p}{q}(p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \ldots + a_1 q^{n-1}).$$

Observem que $-a_0q^{n-1}$ és divisible per q. Per tant, el factor $\frac{p}{q}(p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \ldots + a_1q^{n-1})$ també ha de ser divisible per q. Com que p i q són enters coprimers, tenim que q no pot dividir $\frac{p}{q}$ i, en conseqüència, q ha de dividir el terme $p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \ldots + a_1q^{n-1}$, fet que no es pot donar ja que q no pot dividir a p^{n-1}. Així doncs, hem arribat a una contradicció i deduïm que p i q no poden ser enters coprimers i $\frac{p}{q}$ ha de ser un enter. Com que les arrels del polinomi característic són els valors propis de G, tenim que tot valor propi racional de G és enter. $\square$

Definició 2.2.7. Siguin G_1 i G_2 dos grafs tals que $\mathrm{Spec}(G_1) = \mathrm{Spec}(G_2)$, aleshores diem que són grafs coespectrals.

Observació 2.2.8. No és cert, en general, que si dos grafs tenen el mateix espectre, aleshores també són isomorfs: Vegeu les Figures 2.4 i 2.5. És fàcil veure que en els dos exemples els grafs no són isomorfs ja que cadascun té una seqüència de graus diferent.

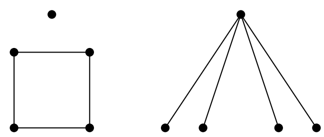


Figura 2.4: $P_G(\lambda) = -\lambda^5 + 4\lambda^3$ i $\mathrm{Spec}(G) = \{-2, 0^3, 2\}$.

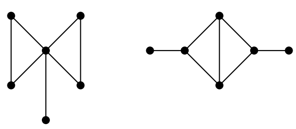


Figura 2.5: $P_G(\lambda) = \lambda^6 - 7\lambda^4 - 4\lambda^3 + 7\lambda^2 + 4\lambda - 1$ i $\mathrm{Spec}(G) = \{-1.90321, -1^2, 0.193937, 1, 2.70928\}$.

Observació 2.2.9. Es pot provar que si G és un graf simple i tots el valors propis de P_G són diferents, aleshores $\Gamma(G)$ és un grup abelià. Per exemple, si $G = K_3$, aleshores $\Gamma(K_3) = S_3$, el qual no és abelià i l'espectre de K_3 és $\{2, -1, -1\}$. Per al graf de la Figura 1.9 sabem que $\Gamma(G) = \{\mathrm{Id}, (1,2)\}$, el qual és abelià i l'espectre és $\{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

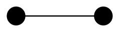
Exemple 2.2.10. Anem a classificar tots els grafs, llevat d'isomorfisme, en funció del nombre de vèrtexs tot indicant el seu polinomi característic i el seu espectre. Si n és el nombre de vèrtexs del graf, considerarem $1 \leq n \leq 4$.

<u>n=1</u>: Només tenim 1 graf.

$$P_G(\lambda) = \lambda \text{ i } \mathrm{Spec}(G) = \{0\}$$

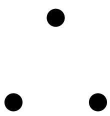
<u>n=2</u>: Tenim 2 grafs.

$P_G(\lambda) = \lambda^2$
$\mathrm{Spec}(G) = \{0^2\}$

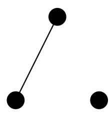


$P_G(\lambda) = \lambda^2 - 1$
$\mathrm{Spec}(G) = \{-1, 1\}$

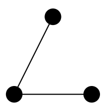
<u>n=3</u>: Tenim 4 grafs.



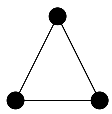
$P_G(\lambda) = \lambda^3$
$\mathrm{Spec}(G) = \{0^3\}$



$P_G(\lambda) = \lambda^3 - \lambda$
$\mathrm{Spec}(G) = \{-1, 0, 1\}$

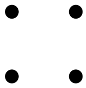


$P_G(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda$
$\mathrm{Spec}(G) = \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$

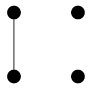


$P_G(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda - 2$
$\mathrm{Spec}(G) = \{-1^2, 2\}$

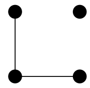
<u>n=4</u>: Tenim 11 grafs.



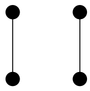
$P_G(\lambda) = \lambda^4$
Spec$(G) = \{0^4\}$



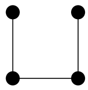
$P_G(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^2$
Spec$(G) = \{-1, 0^2, 1\}$



$P_G(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^2$
Spec$(G) = \{-\sqrt{2}, 0^2, \sqrt{2}\}$

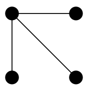


$P_G(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1$
Spec$(G) = \{-1^2, 1^2\}$

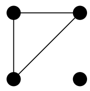


$P_G(\lambda) = \lambda^4 - 3\lambda^2 + 1$

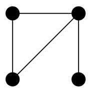
$$\text{Spec}(G) = \left\{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5}), \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}), \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1), \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right\}$$



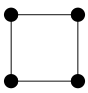
$P_G(\lambda) = \lambda^4 - 3\lambda^2$
Spec$(G) = \{-\sqrt{3}, 0^2, \sqrt{3}\}$



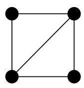
$P_G(\lambda) = \lambda^4 - 3\lambda^2 - 2\lambda$
Spec$(G) = \{-1^2, 0, 2\}$



$P_G(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^2 - 2\lambda + 1$
Spec$(G) = \{-1.48119, -1, 0.311108, 2.17009\}$

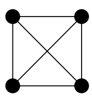


$P_G(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^2$
Spec$(G) = \{-2, 0^2, 2\}$



$P_G(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^2 - 4\lambda$

$$\text{Spec}(G) = \left\{\frac{1}{2}(1-\sqrt{17}), -1, 0, \frac{1}{2}(1+\sqrt{17})\right\}$$



$P_G(\lambda) = \lambda^4 - 6\lambda^2 - 8\lambda - 3$
Spec$(G) = \{-1^3, 3\}$

Capítol 3

Resultats

En aquest capítol estudiarem els resultats més importants de la teoria espectral de grafs.

3.1 Propietats de l'espectre d'un graf

A continuació estudiarem les propietats més interessants sobre l'espectre d'un graf.

Proposició 3.1.1. *Sigui G un graf r-regular de n vèrtexs, aleshores:*

(i) $I(G)I(G)^t = A(G) + r \cdot \mathrm{Id}$,

(ii) *r és un valor propi de la matriu d'adjacència de G; i.e., $r \in \mathrm{Spec}(G)$. A més, $u = (1)_{i=1,\dots,n}$ és un vector propi de r.*

Demostració. (i) Sigui $I(G) = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & \cdots & b_{n,m} \end{pmatrix}$, on n i m són el nombre de vèrtexs i arestes, respectivament, tenim que

$$I(G)I(G)^t = \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,1} & \cdots & c_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Fixada una fila i de $I(G)$ i una columna j de $I(G)^t$, observem que

$$\begin{pmatrix} b_{i,1} & b_{i,2} & \cdots & b_{i,m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{j,1} \\ b_{j,2} \\ \vdots \\ b_{j,m} \end{pmatrix} = c_{i,j} = \begin{cases} \mathrm{Card}\{e \in E(G) : e = \overline{ij}\} & \text{si } i \neq j \\ d(i) & \text{si } i = j \end{cases}.$$

Com G és r-regular, aleshores $d(i) = r$, per a tot $i \in \{1, \ldots, n\}$. Així doncs,

$$\begin{aligned} I(G)I(G)^t &= \begin{pmatrix} r & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & r & \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \cdots & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & 0 & \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \cdots & 0 \end{pmatrix} + r \cdot \mathrm{Id} \\ &= A(G) + r \cdot \mathrm{Id}. \end{aligned}$$

(ii) En efecte, és suficient provar que $u = (1)_{i=1,\ldots,n}$ és un vector propi:

$$(A(G)u)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = d(i) = r = (ru)_i.$$

□

Exemple 3.1.2. Considerem el graf de la Figura 3.1.

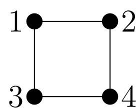


Figura 3.1: Graf C_4.

Calculem les matrius d'adjacència i incidència de C_4 i tenim que

$$A(C_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; I(C_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aleshores,

$$\begin{aligned} I(C_4)I(C_4)^t &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \mathrm{Id} = A(C_4) + 2 \cdot \mathrm{Id}. \end{aligned}$$

A més, $\mathrm{Spec}(C_4) = \{-2, 0^2, 2\}$ i per tant, $2 \in \mathrm{Spec}(C_4)$.

Proposició 3.1.3. *Sigui G un graf, aleshores:*

(a) $A(\overline{G}) = J - Id - A(G)$*, on J és la matriu que té un 1 a totes les components.*

(b) Si suposem que G és r-regular.

(i) $n - r - 1 \in \mathrm{Spec}(\overline{G})$.

(ii) Si λ és un valor propi de G diferent de r, aleshores $-1-\lambda$ és un valor propi de $\overline{G}$. A més, es compleix la següent igualtat:

$$P_{\overline{G}}(x) = (-1)^n \frac{(x-n+r+1)}{(x+r+1)} P_G(-1-x).$$

Demostració. Sigui G un graf:

(a) Com que dos vèrtexs són adjacents a $\overline{G}$ si no ho són a G, tenim que $A(G) + A(\overline{G}) = J - \mathrm{Id}$. Per tant, $A(\overline{G}) = J - \mathrm{Id} - A(G)$.

(b) Suposem ara que G és r-regular:

(i) Sigui $u \in V(G)$, sabem que u és adjacent a r vèrtexs en G. Per tant, u és adjacent a $n-r-1$ vèrtexs en $\overline{G}$. Com que això es compleix per qualsevol vèrtex, tenim que $\overline{G}$ és $n-r-1$-regular i per la Proposició 3.1.1, $n - r - 1 \in \mathrm{Spec}(\overline{G})$.

(ii) Siguin $\lambda_1 = r, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ els valors propis de G i sigui $x_1, x_2, \ldots, x_n$ una base ortogonal de vectors propis. Aleshores per la Proposició 3.1.1 tenim que $x_1 = (1, \ldots, 1)$ i $A(G)x_1 = rx_1$. A més, pels apartats anteriors sabem que $(J - \mathrm{Id} - A(G))x_1 = (n-r-1)x_1$. Ara, com que $x_1 \perp x_j$, $\forall j = 2, \ldots, n$, observem que la suma de les components de cada x_j ha de ser 0 i per tant,

$$(J - \mathrm{Id} - A(G))x_j = -x_j - \lambda_j x_j = (-1-\lambda_j)x_j, \ \forall j = 2, \ldots, n.$$

Així doncs, hem demostrat que els valors propis de $\overline{G}$ són

$$n-r-1, -1-\lambda_2, \ldots, -1-\lambda_n.$$

Provem ara la igualtat. Sabem que

$$P_{\overline{G}}(x) = (x-n+r+1)\prod_{j=2}^{n}(x+1+\lambda_j).$$

En conseqüència:

$$\begin{aligned} P_G(-1-x) &= (-1-x-r)\prod_{j=2}^{n}(-1-x-\lambda_j) \\ &= (-1)^n(x+r+1)\prod_{j=2}^{n}(x+1+\lambda_j). \end{aligned}$$

Per tant,

$$P_{\overline{G}}(x) = (-1)^n \frac{(x-n+r+1)}{(x+r+1)} P_G(-1-x).$$

□

Exemple 3.1.4. Si considerem el grafs de la Figura 1.7, tenim que

$$A(\overline{G}) = J - \mathrm{Id} - A(G) = J - \mathrm{Id} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observem que $\overline{G}$ és 1-regular i $1 = 4 - 2 - 1$. A més, $\mathrm{Spec}(G) = \{-2, 0^2, 2\}$ i $\mathrm{Spec}(\overline{G}) = \{-1^2, 1^2\}$ on $-1 = -1 - 0$ i $1 = -1 - (-2)$.

Lema 3.1.5. *[9] Siguin $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tals que $a, b \geq c > 0$, aleshores*

$$a! \cdot b! \leq (a+b-c)! \cdot c!,$$

amb igualtat si, i només si, $a = c$ o $b = c$.

Demostració. Només cal operar la desigualtat i comprovar que es compleix. Sabem que $c \leq b$, aleshores podem dividir a les dues bandes de la desigualtat per $c!$ i tenim que

$$a! \cdot (c+1) \cdot (c+2) \cdots b \leq (a+b-c)!$$

Utilitzant un altre cop que $c \leq b$, tenim que $a! \leq (a+b-c)!$ i dividint a les dues bandes per $a!$ tenim que

$$(c+1) \cdot (c+2) \cdots b \leq (a+1) \cdot (a+2) \cdots (a+b-c).$$

Ara observem que en cada banda de la desigualtat tenim $b - c$ termes, ja que $b = c + b - c$. Per tant si anem comparant els termes un a un deduïm que $c + j \leq a + j$ $\forall j \in \{1, \ldots, b-c\}$, ja que $c \leq a$. En conseqüència, hem comprovat que la desigualtat és certa. Falta veure que la igualtat es dóna quan $a = c$ o $b = c$. Si $b = c$, la igualtat és trivial ja que

$$(a+b-c)! \cdot c! = a! \cdot b!$$

Si $b \neq c$, utilitzant el procediment anterior tenim que

$$a! \cdot b! = (a+b-c)! \cdot c!$$

si, i només si,

$$(c+1) \cdot (c+2) \cdots b = (a+1) \cdot (a+2) \cdots (a+b-c).$$

Sabem que $c + j > 1$ ja que $c > 0$ i $j \in \{1, \dots, b - c\}$. D'aquesta manera, com que tenim $b - c$ termes a cada banda de la igualtat i cap d'ells és 1, si agafem el terme més gran de cada banda, necessàriament:

$$c + b - c = a + b - c \Rightarrow a = c.$$

$\square$

Teorema 3.1.6. *[9] Si G és un graf connex, diferent de K_n, i $n \geq 5$, aleshores $|\Gamma(G)| \leq (n-1)!$ A més, la igualtat $|\Gamma(G)| = (n-1)!$ es compleix si, i només si, G és una estrella $K_{1,n-1}$.*

Demostració. Sigui un graf connex G amb n vèrtexs i $n \geq 5$. Considerem un vèrtex $v \in G$ de grau mínim. Diferenciem dos casos:

- G és vèrtex transitiu:

  Per la Observació 2.1.7 tenim que G és k-regular per a algun k, on $2 \leq k \leq n-2$, ja que estem suposant que G és diferent de K_n. Si $k = n-2$, aleshores pel Teorema 1.1.7, n és parell. Posem $n = 2t$ i, en conseqüència, $\overline{G} = t \cdot K_2$. Per la Proposició 2.1.5, tenim que $|\Gamma(\overline{G})| = 2^t \cdot t!$ Aquesta igualtat s'extreu del fet que $\overline{G}$ té t fulles disjuntes (tenim $t!$ permutacions entre elles) i podem permutar els 2 vèrtexs de cada fulla entre ells (tenim 2^t permutacions). Ara $2^t \cdot t! < (n-1)!$ ja que $n \geq 5$. Si $2 \leq k \leq n-3$, aleshores

  $$|\Gamma_v| \leq k! \cdot (n-1-k)! \leq 2! \cdot (n-3)!,$$

  on la primera desigualtat és certa ja que $d(v) = k$ en G i $d(v) = n - (k+1) = n-1-k$ en $\overline{G}$ i, per tant, estem considerant la pitjor de les cotes. La segona desigualtat ve donada pel Lema 3.1.5 quan $c = 2$. Així doncs, com $|v^\Gamma| = n$ perquè G és k-regular, per la Observació 2.1.10,

  $$|\Gamma(G)| = n \cdot |\Gamma_v| \leq 2n \cdot (n-3)! < (n-1)!,$$

  on la última desigualtat és certa perquè $n \geq 5$.

- G no és vèrtex-transitiu:

  Aleshores $|v^\Gamma| \leq n-1$ ja que v és de grau mínim i hi ha almenys un parell de vèrtex tals que no existeix cap automorfisme de G que envia un a l'altre. D'altra banda, $|\Gamma_v| \leq d(v)! \cdot (n-1-d(v))! \leq (n-2)!$, on la primera desigualtat és la pitjor de les cotes com en el cas anterior i la darrera desigualtat ve donada pel Lema 3.1.5 quan $c = 1$. Així doncs, per la Observació 2.1.10,

  $$|\Gamma(G)| = |v^\Gamma| \cdot |\Gamma_v| \leq (n-1) \cdot (n-2)! = (n-1)!$$

Es compleix la igualtat si $|v^\Gamma| = n-1, |\Gamma_v| = (n-2)!$ i, per tant, $d(v) = 1$ o $d(v) = n-2$. En el primer cas, com $v^\Gamma = n-1$, tenim que G és un graf connex amb $n-1$ fulles i, en conseqüència, G només pot ser una estrella $K_{1,n-1}$. En el segon cas, G té grau mínim $n-2$ i, per tant, s'obté a partir d'un graf complet mitjançant l'eliminació de a arestes, on $1 \leq a \leq \frac{n}{2}$, ja que si $a = \frac{n}{2}+1$ tindrem com a mínim un vèrtex amb grau més petit que $n-2$, i això és una contradicció. Per la Proposició 2.1.5, $|\Gamma(G)| = (n-2a)! \cdot a! \cdot 2^a < (n-1)!$, ja que $\overline{G}$ està determinat per $n-2a$ punts aïllats i a fulles disjuntes. En conclusió, la igualtat es dóna si, i només si, G és una estrella $K_{1,n-1}$. □

Suposem ara que el polinomi característic d'un graf G és:

$$P_G(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + c_3\lambda^{n-3} + \ldots + c_n.$$

Proposició 3.1.7. *Els coeficients del polinomi característic del graf G satisfan:*

(1) $c_1 = 0$;

(2) $-c_2$ *és el nombre d'arestes de* G*;*

(3) $-c_3$ *és el doble del nombre de triangles de* G*.*

Demostració. Per la Proposició 1.4.10 sabem que per tot $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, el nombre $(-1)^i c_i$ és la suma dels menors principals de A amb i files i columnes, on A és la matriu d'adjacència de G. Així doncs:

(1) Sabem que $-c_1$ és la suma de les arrels de $P_G(\lambda)$, que és la suma dels valors propis i, per tant, la traça de A. Com que estem treballant amb grafs simples tenim que $c_1 = 0$.

(2) Un menor principal amb dues files i columnes amb valor diferent de zero ha de ser de la forma

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Hi ha un menor d'aquesta forma per a cada parell de vèrtexs adjacents de G, i el seu valor es -1. Aleshores, $(-1)^2 c_2 = -|E(G)|$, ens dóna el resultat.

(3) Hi ha essencialment tres possibilitats per a menors principals no trivials amb tres files i columnes:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

i, d'aquests, l'únic que té valor diferent de zero és l'últim, que té valor 2. Aquest menor principal correspon a tres vèrtexs mútuament adjacents de G. Amb això tenim que $(-1)^3 c_3$ és 2 vegades el nombre de triangles de G, fet que ens prova el resultat.

□

Exemples 3.1.8. Observem alguns dels exemples vistos anteriorment:

(1) El graf complet K_3 té polinomi característic $P_{K_3}(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda - 2$. Per tant, en aquests cas tenim que $c_1 = 0$, $-c_2 = 3$ i $-c_3 = 2$. En efecte, podem veure a la Figura 1.2 que K_3 té 3 arestes i 1 triangle.

(2) Els grafs de la Figura 2.4 tenen polinomi característic $P_G(\lambda) = -\lambda^5 + 4\lambda^3$. Per tant, en aquest cas tenim que $c_1 = 0$, $-c_2 = 4$ i $-c_3 = 0$. En efecte, aquests grafs tenen 4 arestes i no tenen cap triangle.

(3) Els grafs de la Figura 2.5 tenen polinomi característic $P_G(\lambda) = \lambda^6 - 7\lambda^4 - 4\lambda^3 + 7\lambda^2 + 4\lambda - 1$. Per tant, en aquest cas tenim que $c_1 = 0$, $-c_2 = 7$ i $-c_3 = 4$. En efecte, aquests grafs tenen 7 arestes i 2 triangles.

Suposem que A és la matriu d'adjacència d'un graf G. Aleshores, el conjunt de polinomis en A, amb coeficients complexos, forma una àlgebra amb les operacions usuals de les matrius. Aquesta àlgebra té dimensió finita com a espai vectorial complex. En efecte, el Teorema 1.4.16 afirma que A satisfà la seva pròpia equació característica, de manera que la dimensió és com a màxim n, el nombre de vèrtexs en G.

Definició 3.1.9. Anomenem àlgebra d'adjacència d'un graf G a l'àlgebra dels polinomis en la matriu d'adjacència $A = A(G)$. La denotarem per $\mathcal{A}(G)$.

Lema 3.1.10. *El nombre de camins de llargada l en G, de v_i a v_j, és el valor en la posició (i, j) de la matriu A^l.*

Demostració. Per demostrar el lema farem inducció en l:

El resultat és cert per $l = 0$ (ja que $A^0 = \mathrm{Id}$) i per $l = 1$ (ja que $A^1 = A$ és la matriu d'adjacència). Suposem que el resultat és cert per $l = L$. El conjunt de camins de llargada $L + 1$ de v_i a v_j té correspondència bijectiva amb el conjunt de camins de llargada L de v_i als vèrtexs v_h adjacents a v_j. Així, el nombre d'aquests camins és:

$$\sum_{\{v_h, v_j\} \in E(G)} (A^L)_{ih} = \sum_{h=1}^{n} (A^L)_{ih} a_{hj} = (A^{L+1})_{ij}.$$

Amb això tenim que el nombre de camins de llargada $L + 1$ de v_i a v_j és $(A^{L+1})_{ij}$, com volíem demostrar. □

Proposició 3.1.11. *Sigui G un graf connex amb àlgebra d'adjacència $\mathcal{A}(G)$ i diàmetre $D(G)$. Aleshores la dimensió de $\mathcal{A}(G)$ és almenys $D(G) + 1$.*

Demostració. Siguin x i y els vèrtexs de G tals que $d(x, y) = D(G)$, i suposem que

$$x = v_0, v_1, \ldots, v_d = y$$

és un camí de llargada $D(G)$. Aleshores, per tot $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$, hi ha almenys un camí de llargada i, que no té perquè ser el camí més curt, de v_0 a v_i. En conseqüència,

A^i té valor no nul en la posició on els corresponents valors de Id,$A, A^2, \dots, A^{i-1}$ són zero. Amb això tenim que A^i no és linealment dependent en $\{\mathrm{Id}, A, \dots, A^{i-1}\}$, i per tant $\{\mathrm{Id}, A, \dots, A^{D(G)}\}$ és un conjunt linealment independent en $\mathcal{A}(G)$. Com aquest conjunt té $D(G)+1$ elements, hem provat el resultat. □

Hi ha una connexió estreta entre l'àlgebra d'adjacència i l'espectre de G. Si la matriu d'adjacència té s valors propis diferents aleshores, com és una matriu real i simètrica, per la Proposició 1.4.15 sabem que el seu polinomi mínim té grau s. En conseqüència, la dimensió de l'àlgebra d'adjacència és igual a s.

Corol·lari 3.1.12. *Un graf G connex amb diàmetre $D(G)$ té almenys $D(G)+1$ valors propis diferents.*

Demostració. Sigui $\mathcal{A}(G)$ l'àlgebra d'adjacència d'aquest graf G, com el seu diàmetre és $D(G)$, per la Proposició 3.1.11 sabem que la dimensió de $\mathcal{A}(G)$ és almenys $D(G)+1$. En conseqüència, si s és el grau del seu polinomi mínim, tenim que $s \geq D(G)+1$. Així doncs, per la Proposició 1.4.15 sabem que G té, com a mínim, $D(G)+1$ valors propis diferents. □

Exemples 3.1.13. Observarem dos exemples per als quals tenim igualtat i desigualtat estricta, respectivament:

(1) Per als grafs de la Figura 2.5, tenim que

$$\mathrm{Spec}(G) = \{-1.90321, -1^2, 0.193937, 1, 2.70928\}$$

i $D(G) = 4$ (considerem la cota més gran dels dos grafs de la Figura 2.5). En efecte, aquest graf té 5 valors propis diferents i $5 = D(G)+1$.

(2) Per al graf de la Figura 1.9, tenim que $\mathrm{Spec}(G) = \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ i $D(G) = 1$. En efecte, aquest graf té 3 valors propis diferents i $3 > D(G)+1 = 2$.

Lema 3.1.14. *[7] Sigui G un graf de n vèrtexs, $A(G)$ la seva matriu d'adjacència i $\lambda_{\text{màx}}$ el seu valor propi més gran, aleshores existeix un vector $v = (v_1, \dots, v_n)$ no nul tal que $A(G)v = \lambda_{\text{màx}} v$ i $v_i \geq 0$, $\forall i = 1, \dots, n$.*

Demostració. Considerem $u = (u_1, \dots, u_n)$ un vector propi de $\lambda_{\text{màx}}$ tal que $||u|| = 1$ i sigui $v = (v_1, \dots, v_n) = (|u_1|, \dots, |u_n|)$, aleshores

$$\frac{v^t A(G) v}{||v||^2} \geq \frac{u^t A(G) u}{||u||^2} = \lambda_{\text{màx}}.$$

Per tant $\dfrac{v^t A(G) v}{||v||^2} = \lambda_{\text{màx}}$ i per la Proposició 1.4.8 $A(G)v = \lambda_{\text{màx}} v$, on $v_i \geq 0$, $\forall i = 1, \dots, n$. □

Proposició 3.1.15. *[7] Sigui G un graf i H un subgraf de G. Si $\lambda_{\text{màx}}(G)$, $\lambda_{\text{màx}}(H)$ són els valors propis més grans de G i H, respectivament, aleshores $\lambda_{\text{màx}}(H) \leq \lambda_{\text{màx}}(G)$.*

Demostració. Siguin $A(G)$ i $A(H)$ les matrius d'adjacència de G i H, respectivament, sabem que pel Lema 3.1.14, existeix un vector propi x_H de $\lambda_{\text{màx}}(H)$ tal que totes les components de x_H són no negatives. Aleshores per la Proposició 1.4.8 tenim que,

$$\lambda_{\text{màx}}(H) = \frac{x_H^t A(H) x_H}{||x_H||^2} \leq \frac{x_H^t A(G) x_H}{||x_H||^2} \leq \sup_{x \neq \vec{0}} \frac{x^t A(G) x}{||x||^2} = \lambda_{\text{màx}}(G),$$

on la primera desigualtat és certa ja que totes les components de x_H són no negatives. En cas que H tingui menys vèrtexs que G, completem x_H amb 0's a les components que corresponen als vèrtexs que falten. El vector obtingut el denotem també per x_H i d'aquesta manera donem sentit a l'operador $x_H^t A(G) x_H$. $\square$

Proposició 3.1.16. *[17, Lema 1.3.1] Sigui G un graf, aleshores $\lambda_{\text{màx}}(G) \geq \overline{d}(G)$, on $\lambda_{\text{màx}}(G)$ i $\overline{d}(G)$ són el valor propi més gran de G i la mitjana dels graus dels vèrtexs de G, respectivament. Notem que es compleix la igualtat si, i només si, G és regular.*

Demostració. Suposem que G té n vèrtexs i considerem el vector $x = (1, \ldots, 1)$. Aleshores,

$$\begin{cases} x^t A(G) x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} = \sum_{i=1}^n d(i) \\ ||x||^2 = n \end{cases}.$$

Per tant, com $\lambda_{\text{màx}}(G) = \sup_{x \neq \vec{0}} \dfrac{x^t A(G) x}{||x||^2}$, tenim que

$$\lambda_{\text{màx}}(G) \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d(i) = \overline{d}(G).$$

Observem que si $\lambda_{\text{màx}}(G) = \overline{d}(G)$, aleshores

$$A(G)x = \lambda_{\text{màx}}(G)x \Leftrightarrow d(j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d(i), \ \forall j = 1, \ldots, n \Leftrightarrow \ G \text{ és regular.}$$

$\square$

Proposició 3.1.17. *Si $\lambda \in \mathrm{Spec}(G)$, aleshores $|\lambda| \leq \Delta(G)$.*

Demostració. Sigui $A(G)$ la matriu d'adjacència de G. Com $\lambda \in \mathrm{Spec}(G)$, considerem $v = (v_1, \ldots, v_n)$ un vector propi de λ. Per la definició de valor propi, sabem que $A(G)v = \lambda v$. En particular, fixat $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$(A(G)v)_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} v_j = \lambda v_i.$$

Si ara considerem la norma infinit del vector v:

$$|\lambda v_i| \leq ||v||_\infty \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \leq ||v||_\infty \cdot \Delta(G),$$

i $||v||_\infty = v_i$, per un cert $i \in \{1, \ldots, n\}$. Per tant, tenim que

$$|\lambda v_i| \leq |\lambda| \cdot |v_i| = |\lambda| \cdot ||v||_\infty \leq ||v||_\infty \cdot \Delta(G) \Rightarrow |\lambda| \leq \Delta(G).$$

□

Exemples 3.1.18. Observem que en els següents exemples es compleix la propietat:

(1) Si $G = K_3$, tenim que $\mathrm{Spec}(G) = \{2, -1, -1\}$. Si observem la Figura 1.2, podem veure que $\Delta(G) = 2$. En efecte, $|\lambda| \leq \Delta(G)$, $\forall \lambda \in \mathrm{Spec}(G)$.

(2) Per als grafs de la Figura 2.4, tenim que $\mathrm{Spec}(G) = \{-2, 0^3, 2\}$ i $\Delta(G) = 2$ (considerem la cota més petita dels dos grafs de la Figura 2.4). En efecte, $|\lambda| \leq \Delta(G)$, $\forall \lambda \in \mathrm{Spec}(G)$.

Proposició 3.1.19. *Si G és un graf connex i $\Delta(G) \in \mathrm{Spec}(G)$, aleshores G és regular.*

Demostració. Sigui $\lambda_{\text{màx}} \in \mathrm{Spec}(G)$ el valor propi més gran de G, per la Proposició 3.1.17 sabem que $|\lambda_{\text{màx}}| \leq \Delta(G)$. Com que estem suposant que $\Delta(G) \in \mathrm{Spec}(G)$, aleshores necessàriament $\Delta(G) = \lambda_{\text{màx}}$. Per tant, si G és regular, aleshores serà $\Delta(G)$-regular. Si n és el nombre de vèrtexs de G, sigui $A(G)$ la matriu d'adjacència de G i sigui $v = (v_1, \ldots, v_n)$ un vector propi de $\lambda_{\text{màx}}$, es compleix que:

$$A(G)v = \lambda_{\text{màx}} v.$$

Considerem $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $v_j > 0$ i $v_j \geq v_k$, $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$. Aleshores

$$(A(G)v)_j = \lambda_{\text{màx}} v_j \Rightarrow \lambda_{\text{màx}} = \frac{(A(G)v)_j}{v_j} = \frac{1}{v_j} \sum_{k \sim j} v_k = \sum_{k \sim j} \frac{v_k}{v_j},$$

on la relació $k \sim j$ significa que el vèrtex k és adjacent al vèrtex j. Ara, com que $v_j \geq v_k$, $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, tenim que

$$\sum_{k \sim j} \frac{v_k}{v_j} \leq \sum_{k \sim j} 1 = d(j) \leq \Delta(G).$$

Així doncs, si $\lambda_{\text{màx}} = \Delta(G)$, aleshores les desigualtats anteriors es converteixen amb igualtats i observem que $d(j) = \Delta(G)$ i $\forall k \sim j$, $d(k) = \Delta(G)$, ja que $v_k = v_j$. Com G és connex, si reiterem aquest procediment per al vèrtex k obtenim que els vèrtexs adjacents a k també tenen grau $\Delta(G)$. D'aquesta manera podem assolir qualsevol vèrtex de G i, en conseqüència, G és $\Delta(G)$-regular. □

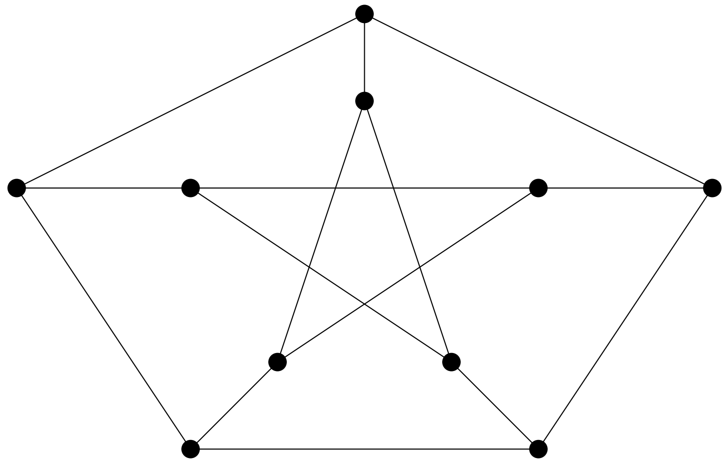


Figura 3.2: Graf de Petersen.

Exemple 3.1.20. Un dels molts exemples per veure aquesta propietat és el graf de Petersen. Per a aquest graf tenim que

$$\operatorname{Spec}(G) = \left\{ -2^3, \frac{1}{2}(-1-\sqrt{5}), \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}), 1^4, 3 \right\}$$

i $\Delta(G) = 3$. Per tant, $\Delta(G) \in \operatorname{Spec}(G)$ i, en efecte, el graf de Petersen és regular. Vegeu la Figura 3.2.

Lema 3.1.21. *Si G és un graf bipartit i $\lambda \in \operatorname{Spec}(G)$, aleshores $-\lambda \in \operatorname{Spec}(G)$.*

Demostració. Com G és bipartit, considerem N i M els dos subconjunts disjunts de vèrtexs i suposem que $|N| = r$ i $|M| = s$. Sigui $A(G)$ la matriu d'adjacència de G, observem que la podem escriure de la forma:

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & B(G)^t \\ B(G) & 0 \end{pmatrix},$$

on $B(G)$ és una matriu amb r files i s columnes. Ara, per la definició de valor propi sabem que

$$A(G)v = \lambda v = \lambda \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix},$$

on v és un vector propi de λ i on v^1 i v^2 són dos vectors columna de s i r components, respectivament. Si operem tenim que

$$\begin{pmatrix} 0 & B(G)^t \\ B(G) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(G)^t v^2 \\ B(G) v^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v^1 \\ \lambda v^2 \end{pmatrix}.$$

Sigui $u = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}$, observem que

$$A(G)u = \begin{pmatrix} B(G)^t u^2 \\ B(G)u^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(G)^t v^2 \\ -B(G)v^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda u^1 \\ -\lambda u^2 \end{pmatrix} = -\lambda u.$$

Així doncs, $-\lambda \in \mathrm{Spec}(G)$. □

Proposició 3.1.22. *Si G és un graf connex i $-\Delta(G) \in \mathrm{Spec}(G)$, aleshores G és regular i bipartit.*

Demostració. Sigui $\lambda_{\min} \in \mathrm{Spec}(G)$ el valor propi més petit de G, per la Proposició 3.1.17 sabem que $|\lambda_{\min}| \leq \Delta(G)$. Com que estem suposant que $-\Delta(G) \in \mathrm{Spec}(G)$, aleshores necessàriament $-\Delta(G) = \lambda_{\min}$. Si n és el nombre de vèrtexs de G, sigui $A(G)$ la matriu d'adjacència de G i sigui $v = (v_1, \ldots, v_n)$ un vector propi de $\lambda_{\min}$, es compleix que:

$$A(G)v = \lambda_{\min} v.$$

Considerem $M = ||v||_\infty$ i siguin $P = \{i : v_i = M\}$ i $N = \{i : v_i = -M\}$ dos subconjunts disjunts de $V(G)$. Si $i \in P$, aleshores

$$-\Delta(G)M = -\Delta(G)v_i = \sum_{j \sim i} v_j,$$

on la última igualtat és certa ja que $-\Delta(G) = \lambda_{\min}$. Ara volem veure que les igualtats anteriors impliquen que $v_j = -M$, $\forall j \sim i$. En efecte, sigui

$$r = \mathrm{Card}\{j \sim i : v_j = -M\},$$

aleshores

$$-\Delta(G)M = \sum_{j \sim i} v_j = \sum_{j : v_j = -M} v_j + \sum_{j : v_j > -M} v_j > -Mr - M(d(i) - r) = -Md(i).$$

Per tant, $-\Delta(G) > -d(i) \Rightarrow \Delta(G) < d(i)$, en contradicció amb la definició de $\Delta(G)$. Així doncs, com $v_j = -M$, $\forall j \sim i$, tenim que $j \in N$, $\forall j \sim i$. Anàlogament, si $i \in N$, aleshores $j \in P$, $\forall j \sim i$. En conseqüència, com G és connex, podem assolir qualsevol vèrtex de G i realitzar aquest raonament de manera inductiva. Per tant, observem que $V(G) = P \cup N$ i $P \cap N = \emptyset$, fet que demostra que G és bipartit. Però si G és bipartit i $-\Delta(G) \in \mathrm{Spec}(G)$, el Lema 3.1.21 ens afirma que $\Delta(G) \in \mathrm{Spec}(G)$, fet que, per la Proposició 3.1.19, implica que G és $\Delta(G)$-regular. □

Exemple 3.1.23. Sigui $G = C_4$, tenim que $\mathrm{Spec}(G) = \{-2, 0^2, 2\}$ i $\Delta(G) = 2$. Per tant, $-\Delta(G) \in \mathrm{Spec}(G)$ i, en efecte, C_4 és regular per definició i bipartit ja que $C_4 = K_{2,2}$. Vegeu la Figura 3.3.

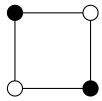


Figura 3.3: $C_4 = K_{2,2}$.

Proposició 3.1.24. *Suposem que T és un graf amb vèrtex v_1 de grau 1, i sigui v_2 el vèrtex adjacent a v_1. Sigui T_1 el subgraf que obtenim eliminant v_1, i $T_{1,2}$ el subgraf que obtenim eliminant $\{v_1, v_2\}$. Aleshores*

$$P_T(\lambda) = \lambda P_{T_1}(\lambda) - P_{T_{1,2}}(\lambda).$$

Demostració. Aquesta fórmula es pot utilitzar principalment per calcular el polinomi característic d'arbres, ja que un arbre sempre té un vèrtex de grau 1. Així doncs, demostrarem aquesta proposició per a qualsevol arbre T. Sigui T un arbre i n el nombre de vèrtexs de T. Suposem que $n \geq 3$, ja que per $n = 1, 2$ el resultat és trivial. Així doncs, $V(T) = \{1, 2, \dots, n\}$. Podem suposar, sense pèrdua de generalitat, que el vèrtex 1 té grau 1 i és adjacent al vèrtex 2. Aleshores la matriu d'adjacència de T és

$$A(T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant, si calculem el polinomi característic de T, tenim que

$$P_T(\lambda) = \det(\lambda \cdot \mathrm{Id} - A(T)) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \lambda & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ 0 & -a_{32} & \lambda & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ -a_{32} & \lambda & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ 0 & \lambda & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -a_{n3} & \cdots & \lambda \end{vmatrix}.$$

Ara observem que

$$P_{T_1}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ -a_{32} & \lambda & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & \lambda \end{vmatrix}$$

i

$$P_{T_{1,2}}(\lambda) = -\begin{vmatrix} -1 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ 0 & \lambda & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -a_{n3} & \cdots & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n3} & \cdots & \lambda \end{vmatrix}.$$

En conseqüència, $P_T(\lambda) = \lambda P_{T_1}(\lambda) - P_{T_{1,2}}(\lambda)$. □

Exemple 3.1.25. Considerem el graf T de la Figura 3.4. Prenem, per exemple, $v_1 = 1$ ja que té grau 1 i per tant, $v_2 = 5$. Així doncs, $T_1 = T - v_1$ i $T_{1,2} = T - \{v_1, v_2\}$. En efecte, $P_T(\lambda) = \lambda P_{T_1}(\lambda) - P_{T_{1,2}}(\lambda) = \lambda(\lambda^7 - 6\lambda^5 + 7\lambda^3) - \lambda^6 + 2\lambda^4 = \lambda^8 - 7\lambda^6 + 9\lambda^4$.

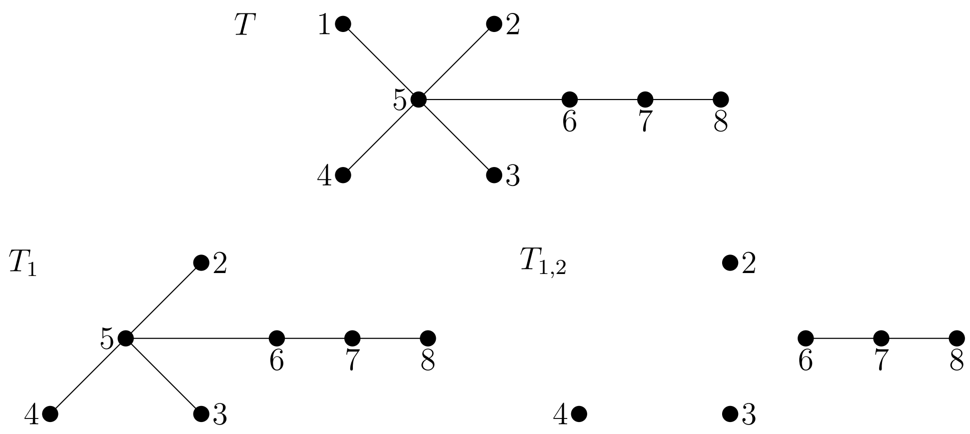


Figura 3.4: $P_T(\lambda) = \lambda^8 - 7\lambda^6 + 9\lambda^4$, $P_{T_1}(\lambda) = \lambda^7 - 6\lambda^5 + 7\lambda^3$ i $P_{T_{1,2}}(\lambda) = \lambda^6 - 2\lambda^4$.

Abans de donar per acabada aquesta secció, anem a veure que passa quan l'espectre dels grafs conté un, dos o tres valors propis [10].

Proposició 3.1.26. *[10, Secció 2] Sigui G és un graf amb només un valor propi, aleshores G és un graf sense arestes.*

Demostració. Sigui $A(G)$ la matriu d'adjacència de G, com $A(G)$ és una matriu real i simètrica, si $A(G)$ només té un valor propi λ, aleshores el polinomi mínim és $m(x) = x - \lambda$. Així doncs, pel Teorema 1.4.16, $A(G) = \lambda \cdot \mathrm{Id}$. Com que $A(G)$ té zeros a la diagonal, aleshores $\lambda = 0$ i tots els valors de $A(G)$ són 0. En conseqüència, G és un graf sense arestes. □

Proposició 3.1.27. *[10, Proposició 2.1] Sigui G un graf de n vèrtexs, aleshores G té dos valors propis diferents λ_1 i λ_2 si, i només si, G és un graf tal que cada component connexa és igual a K_{λ_1+1} i, a més, $\lambda_2 = -1$.*

Demostració. Sigui $A(G)$ la matriu d'adjacència de G, com $A(G)$ és una matriu real i simètrica, si $A(G)$ només té dos valors propis λ_1 i λ_2, aleshores el polinomi mínim és $m(x) = (x - \lambda_1) \cdot (x - \lambda_2)$. Per tant, pel Teorema 1.4.16 tenim que

$$A(G)^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot A(G) + \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \mathrm{Id} = 0.$$

Sigui k un vèrtex arbitrari, el Lema 3.1.10 ens diu que el valor que hi ha a la posició (k, k) de la matriu $A(G)^2$ és $d(k)$. A més, per l'equació del polinomi mínim avaluat en $A(G)$, el valor d'aquesta posició és $-\lambda_1 \cdot \lambda_2$, ja que $A(G)$ té zeros a la diagonal. Per tant, com això és cert per qualsevol vèrtex, aleshores G és regular d'ordre $-\lambda_1 \cdot \lambda_2$. Així doncs, per la Proposició 3.1.1, $-\lambda_1 \cdot \lambda_2$ és un valor propi de G, diguem-li λ_1. Aleshores $\lambda_2 = -1$. En conseqüència, G és λ_1-regular, amb valors propis λ_1 i -1. D'altra banda, si i i j són dos vèrtexs de G no adjacents, aleshores pel Lema 3.1.10 tenim que a la posició (i, j) de la matriu $A(G)^2$ hi ha un 0. Com

$$A(G)^{2+k} - (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot A(G)^{1+k} + \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot A(G)^k = 0, \ \forall k \geq 0,$$

aleshores a la posició (i, j) de la matriu $A(G)^l$ hi ha un 0, $\forall l \geq 1$. És a dir, els vèrtexs i i j estan en diferents components connexes de G. Això implica que cada component connexa de G sigui un subgraf complet de K_n. Com G és λ_1-regular, cada subgraf complet conté $\lambda_1 + 1$ vèrtexs i, en conseqüència, cada component connexa és igual a K_{λ_1+1} i, a més, $\lambda_2 = -1$. □

Proposició 3.1.28. *[10, Proposició 3.1] Sigui G un graf connex, aleshores G té valors propis $\pm\lambda$ i 0 si, i només si, $G = K_{m,n}$, on $mn = \lambda^2$.*

Demostració. Suposem que G és bipartit. Aleshores $A(G)$ és de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ B^t & 0 \end{pmatrix}.$$

En aquest cas, $A(G)^2 = BB^t + B^tB$. Pel Lema 3.1.21, si λ és valor propi de G, aleshores $-\lambda$ també ho és. Per tant, si λ^2 és un valor propi de $A(G)^2$, aleshores λ i $-\lambda$ són valors propis de $A(G)$. Com BB^t i B^tB tenen els mateixos valors propis no nuls, tenim que λ és valor propi de $A(G)$ si, i només si, λ^2 és valor propi de BB^t. Anem a demostrar les dues implicacions.

$\Leftarrow|$ Considerem ara $G = K_{m,n}$. En aquest cas $B = J$ i els valors propis de BB^t són mn i 0. Així doncs els valors propis de G són $\pm\sqrt{mn}$ i 0.

$\Rightarrow|$ Suposem que G és un graf amb valors propis $\pm\lambda$ i 0, on $\lambda = \pm\sqrt{mn}$. Com $A(G)$ és una matriu real i simètrica, aleshores el polinomi mínim és

$$m(x) = x \cdot (x - \lambda) \cdot (x + \lambda),$$

i pel Teorema 1.4.16 tenim que $A(G)^3 - \lambda^2 \cdot A(G) = 0$. Així doncs, si $A(G)$ té un 0 a la posició (i, j), aleshores $A(G)^3$ a la mateixa posició. Si multipliquem aquesta equació per una potència adequada de $A(G)$ resulta que $A(G)^{2k+1}$ té un 0 a la posició (i, j), $\forall k \geq 0$. És a dir, pel Lema 3.1.10 els vèrtexs i i j no estan connectats per camins de llargada senar. Com la matriu $A(G)$ té zeros a la diagonal, aleshores G no pot tenir cicles d'ordre senar i per tant, G es bipartit. Suposem que M i N són els dos subconjunts disjunts de vèrtexs i suposem també que G no és bipartit complet. Aleshores existeixen dos vèrtexs

$i \in M$ i $j \in N$ que no són adjacents. No obstant, com G és connex, aleshores els vèrtexs i i j han d'estar units per un camí de llargada senar i per tant hem arribat a una contradicció. En conseqüència, G ha de ser bipartit complet i per tant, $G = K_{m,n}$.

Així doncs, ja hem demostrat el resultat. $\square$

Exemple 3.1.29. Si observem l'Exemple 2.2.10 podem veure que si G és un graf sense arestes amb $n = 1, \ldots, 4$ vèrtexs, aleshores $\operatorname{Spec}(G) = \{0^n\}$. També podem veure que si G és el graf complet amb $n = 1, \ldots, 4$ vèrtexs, aleshores

$$\operatorname{Spec}(G) = \{-1^{n-1}, n-1\}$$

i, en efecte, G només té per component connexa $K_n = K_{(n-1)+1}$. D'altra banda, si considerem el graf $K_{4,4}$ de la Figura 1.3 i calculem el seu espectre, tenim que

$$\operatorname{Spec}(K_{4,4}) = \{-\sqrt{16}, 0^6, \sqrt{16}\} = \{-4, 0^6, 4\}.$$

3.2 Propietats espectrals del nombre cromàtic d'un graf

En aquesta secció introduirem algunes de les relacions més importants entre el nombre cromàtic i l'espectre d'un graf.

Teorema 3.2.1. *(**Brooks**, [3]) Si G és un graf connex que no sigui complet ni un cicle amb un nombre senar de vèrtexs, aleshores $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Proposició 3.2.2. *Sigui G un graf connex i $\lambda_{\text{màx}}$ el seu valor propi més gran. Aleshores, $\chi(G) \leq 1 + \lambda_{\text{màx}}$ amb igualtat si, i només si, G és complet o un cicle amb un nombre senar de vèrtexs.*

Demostració. Posem $\chi(G) = k$. Com que G no es pot pintar amb $k-1$ colors, ha d'existir un subgraf induït H de G amb $\delta(H) \geq k-1$ ja que, pel Corol·lari 1.3.10, G té com a mínim k vèrtexs amb grau almenys $k-1$. Per tant,

$$\lambda_{\text{màx}} \geq \lambda_{\text{màx}}(H) \geq \delta(H) \geq k-1 = \chi(G) - 1 \Rightarrow \chi(G) \leq 1 + \lambda_{\text{màx}},$$

on la primera desigualtat és certa per la Proposició 3.1.15 i la segona desigualtat és certa per la Proposició 3.1.16 ja que $\overline{d}(H) \geq \delta(H)$. Només ens falta veure quan es compleix la igualtat. Si $\chi(G) = 1 + \lambda_{\text{màx}}$, aleshores les desigualtats anteriors es converteixen amb igualtats i per tant,

$$\lambda_{\text{màx}} = \lambda_{\text{màx}}(H) = \delta(H) = k-1.$$

Així doncs, tenim que $G = H$ i, per la Proposició 3.1.16, G és regular d'ordre $k-1$ ja que $\overline{d}(H) \geq \delta(H)$. Ara sabem que $\chi(G) = 1 + \lambda_{\text{màx}} = 1 + k - 1 = k$ i, a més, $\Delta(G) = k-1$. Com $\chi(G) = k > k-1 = \Delta(G)$, pel Teorema 3.2.1 tenim que G és complet o un cicle amb un nombre senar de vèrtexs. $\square$

Lema 3.2.3. *Sigui A una matriu real i simètrica d'ordre n. Siguin $x_1, \dots, x_m$ vector ortogonals no nuls d'ordre n ($n > m$). Definim la matriu $C = (c_{ij})$ per $c_{ij} = \frac{1}{||x_i||^2} x_i^t A x_j$. Aleshores:*

(i) Els valors propis de C estan entrellaçats respecte els de A.

(ii) Sigui $x = \sum_{j=1}^m x_j$. El nombre $r := \frac{x^t A x}{x^t x}$ està entre el valor propi més petit i més gran de C. Si x és un vector propi de A amb valor propi λ, aleshores C també té valor propi λ (amb vector propi $\mathbf{1}$, on $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$).

Demostració. Sigui K la matriu diagonal amb $K_{ii} = ||x_i||$. Sigui R la matriu $n \times m$ amb columnes x_j i posem $S = RK^{-1}$. Aleshores $S^t S = \mathrm{Id}$. Per tant:

(i) Apliquem el Teorema 1.4.19 a la matriu $B = S^t A S = KCK^{-1}$ i tenim que els valors propis de C estan entrellaçats respecte els de A.

(ii) Amb $x = \sum_{j=1}^m x_j = R\mathbf{1}$ i $y = K\mathbf{1}$, tenim que $\frac{x^t A x}{x^t x} = \frac{y^t B y}{y^t y}$. Així doncs, tot valor propi de A amb vector propi x és valor propi de C amb vector propi $\mathbf{1}$.

Com que hem provat les dues premisses, ja hem acabat la demostració. □

Proposició 3.2.4. *Sigui G un graf connex de n vèrtexs i siguin $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ els seus valors propis. Si $\chi(G) = k$, aleshores*

$$\lambda_1 + \lambda_{n-k+2} + \cdots + \lambda_n \leq 0.$$

Demostració. Sigui $A(G)$ la matriu d'adjacència de G i sigui $u_1, \dots, u_n$ una base ortonormal de vectors propis de manera que $A(G)u_j = \lambda_j u_j$, $\forall j = 1, \dots, n$. Considerem la partició $V(G) = V_1 \cup \cdots \cup V_k$ tal que tots els vèrtexs en V_j amb $1 \leq j \leq k$ no són adjacents entre ells dos a dos. Suposem que $u_1 = (u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1n})$ i sigui x_j el producte puntual entre u_1 i V_j, és a dir, si $V_j = \{r, s\}$, aleshores $x_j = (0, \dots, 0, u_{1r}, 0, \dots, 0, u_{1s}, 0, \dots, 0)$. Observem que $\sum_{j=1}^n x_j = u_1$. Ara apliquem el Lema 3.2.3 als vectors x_j després d'eliminar els que siguin nuls. La matriu C definida satisfà $C\mathbf{1} = \lambda_1 \mathbf{1}$, té zeros a la diagonal i els seus valors propis η_j estan entrellaçats respecte els de A. Per tant,

$$0 = \mathrm{tr}(C) = \eta_1 + \cdots + \eta_k \geq \lambda_1 + \lambda_{n-k+2} + \cdots + \lambda_n.$$

□

Exemple 3.2.5. Considerem els grafs de la Figura 3.5. Analitzem primer el graf G_1. Sabem per l'Exemple 2.2.10 que $\mathrm{Spec}(G) = \{-\sqrt{3}, 0^2, \sqrt{3}\}$. Per tant,

$$\lambda_1 = \sqrt{3},\ \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \text{ i } \lambda_4 = -\sqrt{3}.$$

Ara com $\chi(G) = 2$ tenim que $n - k + 2 = 4 - 2 + 2 = 4$ i, en efecte,

$$\lambda_1 + \lambda_4 = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0.$$

Analitzem ara el graf G_2. Sabem per l'Exemple 2.2.10 que

$$\mathrm{Spec}(G) = \{-1.48119, -1, 0.311108, 2.17009\}.$$

Per tant,

$$\lambda_1 = 2.17009,\ \ \lambda_2 = 0.311108,\ \ \lambda_3 = -1 \text{ i } \lambda_4 = -1.48119.$$

Ara com $\chi(G) = 3$ tenim que $n - k + 2 = 4 - 3 + 2 = 3$ i, en efecte,

$$\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = 2.17009 - 1 - 1.48119 = -0.3111 < 0.$$

Figura 3.5: $\chi(G_1) = 2$ i $\chi(G_2) = 3$.

Teorema 3.2.6. *Sigui G un graf connex amb valors propis $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Si G no és un graf sense arestes, aleshores $\chi(G) \geq 1 - \dfrac{\lambda_1}{\lambda_n}$.*

Demostració. Posem $k = \chi(G)$. Com que G no és un graf sense arestes, aleshores $\lambda_n < 0$. Ara, per la Proposició 3.2.4, tenim que

$$\lambda_1 + (k-1)\lambda_n \leq \lambda_1 + \lambda_{n-k+2} + \cdots + \lambda_n \leq 0 \Rightarrow \chi(G) = k \geq 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_n}.$$

$\square$

Exemple 3.2.7. Considerem el graf G de la Figura 1.11. Observem que $n = 4$ i sabem per l'Exemple 2.2.10 que $\mathrm{Spec}(G) = \left\{\frac{1}{2}(1-\sqrt{17}), -1, 0, \frac{1}{2}(1+\sqrt{17})\right\}$. Així doncs,

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{17}) \text{ i } \lambda_n = \frac{1}{2}(1-\sqrt{17}).$$

En efecte,

$$1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_n} = 1 - \frac{\frac{1}{2}(1+\sqrt{17})}{\frac{1}{2}(1-\sqrt{17})} = 2.6403... \leq 3 = \chi(G).$$

3.3 Classificació dels grafs més coneguts respecte les seves característiques

En aquesta secció classificarem els grafs més coneguts segons les característiques que més hem treballat, és a dir, segons l'espectre, el grup d'automorfismes i el nombre cromàtic. Notem que gran part de la informació d'aquesta secció s'ha extret dels apunts de O. Jones [13].

Graf complet

El graf complet K_n és un graf connex de n vèrtexs tal que tots els vèrtexs tenen grau $n-1$. En altres paraules, hi ha una aresta entre un vèrtex i qualsevol altre vèrtex. El graf complet te $\dfrac{n(n-1)}{2}$ arestes. A la Figura 1.2 podem veure dibuixats els K_n per $n = 1, \dots, 4$. La seva matriu d'adjacència és

$$A(K_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Anem a calcular el seu espectre. Com K_n és regular podem fer servir la fórmula de la Proposició 3.1.3 i tenim que

$$P_{K_n}(\lambda) = (-1)^n \frac{(\lambda - n + r + 1)}{(\lambda + r + 1)} P_{\overline{K_n}}(-1-\lambda),$$

on $r = 0$ ja que $\overline{K_n}$ és un graf sense arestes. A més, tots els valors de la matriu $A(K_n)$ són 0 i per tant, $P_{\overline{K_n}}(\lambda) = \lambda^n$. Així doncs,

$$\begin{aligned} P_{K_n}(\lambda) &= (-1)^n \frac{(\lambda - n + 1)}{(\lambda + 1)} P_{\overline{K_n}}(-1-\lambda) = \frac{(\lambda - n + 1)}{(\lambda + 1)} P_{\overline{K_n}}(\lambda + 1) \\ &= \frac{(\lambda - n + 1)}{(\lambda + 1)} (\lambda + 1)^n = (\lambda - n + 1) \cdot (\lambda + 1)^{n-1}. \end{aligned}$$

En conseqüència, com l'espectre d'un graf ve donat per les arrels del seu polinomi característic, aleshores l'espectre del graf complet K_n és:

$$\mathrm{Spec}(K_n) = \{-1^{n-1}, n-1\}.$$

Calculem ara el seu grup d'automorfismes. Si escollim un vèrtex arbitrari, aleshores existeix un automorfisme que envia aquest vèrtex a qualsevol altre, ja que K_n és $n-1$-regular. Així doncs, $\Gamma(G) = S_n$. Pel que fa al nombre cromàtic, és obvi que hem de pintar cada vèrtex d'un color diferent a la resta, ja que tot vèrtex és adjacent a qualsevol altre. Per tant, $\chi(G) = n$. Vegem-ho per $n = 5$:

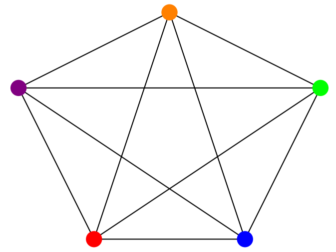


Figura 3.6: $P_{K_5}(\lambda) = (\lambda-4)\cdot(\lambda+1)^4$, $\mathrm{Spec}(K_5) = \{-1^4, 4\}$, $\Gamma(K_5) = S_5$, $\chi(K_5) = 5$.

Graf lineal

El graf lineal P_n és un graf connex de n vèrtexs on 2 vèrtexs tenen grau 1 i els altres $n-2$ vèrtexs tenen grau 2. Per exemple:

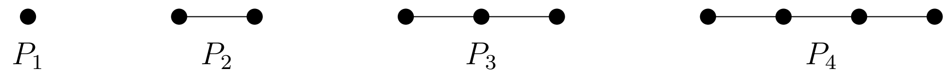


Figura 3.7: Grafs lineals per a $n = 1, 2, 3, 4$.

La seva matriu d'adjacència és

$$A(P_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Anem a calcular el seu espectre. Sabem que $P_{P_n}(\lambda) = \det(\lambda \cdot \mathrm{Id} - A(P_n))$ i tenim que

$$\det(\lambda \cdot \mathrm{Id} - A(P_n)) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda \end{vmatrix}.$$

Si desenvolupem el determinant per la primera fila obtenim la següent expressió:

$$\begin{aligned}
\det(\lambda \cdot \mathrm{Id} - A(P_n)) &= \lambda \cdot \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} \\
&= \lambda \cdot \det(\lambda \cdot \mathrm{Id} - A(P_{n-1})) - (-1)^2 \det(\lambda \cdot \mathrm{Id} - A(P_{n-2})) \\
&= \lambda \cdot \det(\lambda \cdot \mathrm{Id} - A(P_{n-1})) - \det(\lambda \cdot \mathrm{Id} - A(P_{n-2})).
\end{aligned}$$

Així doncs, acabem de veure que $P_{P_n}(\lambda) = \lambda P_{P_{n-1}}(\lambda) - P_{P_{n-2}}(\lambda)$. Ara demostrem que l'expressió del polinomi característic del graf lineal és

$$P_{P_n}(\lambda) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n-k}{k} \lambda^{n-2k}.$$

Fem inducció en n:

- Si $n = 3$, aleshores $P_{P_3}(\lambda) = \lambda P_{P_2}(\lambda) - P_{P_1}(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 1) - \lambda = \lambda^3 - 2\lambda$ i, en efecte,

$$\sum_{k=0}^{[3/2]} (-1)^k \binom{n-k}{k} \lambda^{3-2k} = \lambda^3 - 2\lambda.$$

- Suposem que és cert fins a $n - 1$ i demostrem-ho per n. Sabem que

$$P_{P_n}(\lambda) = \lambda P_{P_{n-1}}(\lambda) - P_{P_{n-2}}(\lambda).$$

  Aleshores per hipòtesi d'inducció tenim que

$$\begin{aligned}
P_{P_n}(\lambda) &= \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^k \binom{n-1-k}{k} \lambda^{n-2k} - \sum_{k=0}^{[(n-2)/2]} (-1)^k \binom{n-2-k}{k} \lambda^{n-2-2k} \\
&= \binom{n-1}{0} \lambda^n - \left(\binom{n-2}{1} + \binom{n-2}{0} \right) \lambda^{n-2} \\
&\quad + \left(\binom{n-3}{2} + \binom{n-3}{1} \right) \lambda^{n-4} - \left(\binom{n-4}{3} + \binom{n-4}{2} \right) \lambda^{n-6} + \cdots \\
&= \lambda^n - \binom{n-1}{1} \lambda^{n-2} + \binom{n-2}{2} \lambda^{n-4} - \binom{n-3}{3} \lambda^{n-6} + \cdots \\
&= \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n-k}{k} \lambda^{n-2k}.
\end{aligned}$$

Així doncs, com que l'espectre de P_n està determinat per les arrels del seu polinomi característic, aleshores

$$\mathrm{Spec}(P_n) = \left\{ 2\cos\left(\frac{\pi j}{n+1}\right),\ j = 1, \dots, n \right\}.$$

Pel que fa al seu grup d'automorfismes, observem que les úniques permutacions de vèrtexs que preserven la seqüència dels graus són la identitat i la que envia el primer vèrtex a l'ultim, el segon vèrtex al penúltim i així successivament. Així doncs, $\Gamma(P_n) = \{\mathrm{Id},\ (1,n)(2,n-1)(3,n-2)\cdots\}$. Respecte el seu nombre cromàtic, és evident que

$$\begin{cases} \chi(P_n) = 1 & \text{si } n = 1 \\ \chi(P_n) = 2 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}.$$

Vegem-ho per $n = 5$:

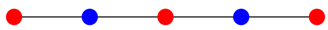


Figura 3.8: $P_{P_5}(\lambda) = \lambda^5 - 4\lambda^3 + 3\lambda$, $\mathrm{Spec}(P_5) = \{-\sqrt{3}, -1, 0, 1, \sqrt{3}\}$, $\Gamma(P_5) = \{\mathrm{Id},\ (1,5)(2,4)\}$, $\chi(P_5) = 2$.

Cicle

El cicle C_n és un graf connex de n vèrtexs on tots els vèrtexs tenen grau 2 i el seu nombre d'arestes és el mateix que el de vèrtexs. A la Figura 1.5 podem veure dibuixats els C_n per $n = 1, \dots, 4$. La seva matriu d'adjacència és

$$A(C_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Anem a calcular el seu espectre. Sigui P una matriu permutació determinada per una permutació de llargada n, observem que $A(C_n) = P + P^{-1}$. Si w és una arrel n-èsima de la unitat, aleshores $(1, w, \dots, w^{n-1})^t$ és un vector propi de P de valor propi w. És a dir,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; P^{-1} = P^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$P \begin{pmatrix} 1 \\ w \\ \vdots \\ w^{n-1} \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} 1 \\ w \\ \vdots \\ w^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ \vdots \\ w^{n-1} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sigui $v = (1, w, \dots, w^{n-1})^t$, com $Pv = wv$, aleshores $P^{-1}v = w^{-1}v$. Per tant, els valors propis de $A(C_n) = P + P^{-1}$ seran els nombres $w + w^{-1}$. Ara notem que

$$\begin{aligned} w^j &= e^{\frac{(2\pi i)j}{n}} = \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi j}{n}\right) \\ (w^{-1})^j &= e^{\frac{(-2\pi i)j}{n}} = \cos\left(\frac{-2\pi j}{n}\right) + i \sin\left(\frac{-2\pi j}{n}\right) \end{aligned}$$

i, a més,

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) &= \cos\left(\frac{-2\pi j}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi j}{n}\right) &= -\sin\left(\frac{-2\pi j}{n}\right), \end{aligned}$$

on $j = 0, \dots, n-1$. En conseqüència, $\operatorname{Spec}(C_n) = \left\{ 2\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right),\ j = 0, \dots, n-1 \right\}$.

Donem ara una expressió del seu polinomi característic. Observem que $\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)$ són les arrels de $T_n(\lambda) - 1$, on $T_n(\lambda)$ és el polinomi de Chebyshev determinat per $\cos(n\theta) = T_n(\cos\theta)$. Explícitament,

$$T_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} 2^{n-2k-1} \lambda^{n-2k}.$$

Aquesta expressió es pot escriure de manera recurrent per la relació

$$T_{k+1}(\lambda) = 2\lambda T_k(\lambda) - T_{k-1}(\lambda),\ \forall k \geq 1.$$

Així doncs, $P_{C_n}(\lambda) = 2(T_n(\lambda/2) - 1)$ i per tant,

$$P_{C_n}(\lambda) = -2 + \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} \lambda^{n-2k}.$$

Notem que podem veure més detalladament el càlcul d'aquest polinomi al llibre de D. Cvetkovic, P. Rowlinson i S. Simic [8]. Calculem ara el seu grup d'automorfismes. Sigui $V(C_n) = \{1, \dots, n\}$ tal que dos vèrtexs i i j són adjacents si $i - j \equiv \pm 1 \bmod n$. Sigui $\varphi \in \Gamma(G)$ i suposem que $\varphi(i) = j$. Aleshores sabem que $\varphi(i+1) = j - 1$ o bé $\varphi(i+1) = j + 1$, és a dir, una permutació entre dos vèrtexs determina totes les permutacions entre els vèrtexs restants. D'aquesta manera observem que el grup d'automorfismes de C_n està generat per una rotació d'ordre n i una simetria d'ordre 2. En conseqüència, $\Gamma(C_n) = D_{2n}$. Pel que fa al nombre cromàtic, tret del cas $\chi(C_1) = 1$, és fàcil veure que

$$\begin{cases} \chi(C_n) = 2 & \text{si } n \text{ és parell} \\ \chi(C_n) = 3 & \text{si } n \text{ és senar} \end{cases}.$$

Vegem-ho per $n = 5$ i $n = 6$:

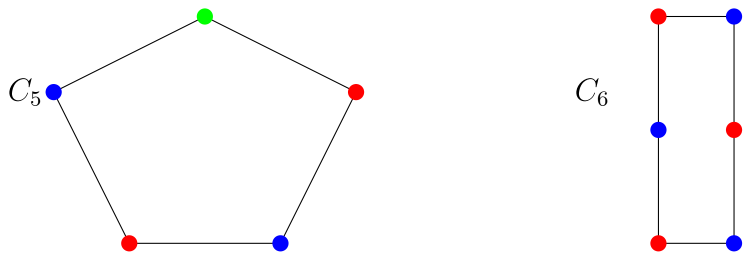


Figura 3.9: $P_{C_5}(\lambda) = \lambda^5 - 5\lambda^3 + 5\lambda - 2$, $\mathrm{Spec}(C_5) = \left\{ \left(\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})\right)^2, \left(\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\right)^2, 2 \right\}$, $\Gamma(C_5) = D_{25}$, $\chi(C_5) = 3$, $P_{C_6}(\lambda) = \lambda^6 - 6\lambda^4 + 9\lambda^2 - 4$, $\mathrm{Spec}(C_6) = \{-2, -1^2, 1^2, 2\}$, $\Gamma(C_6) = D_{26}$, $\chi(C_6) = 2$.

Bipartit complet

El graf bipartit complet $K_{r,s}$ és un graf de n vèrtexs tal que existeix una partició de $V(K_{r,s})$ amb dos subconjunts disjunts A i B de manera que tot vèrtex de A és adjacent a tot vèrtex de B. A més, $\mathrm{Card}(A) = r$, $\mathrm{Card}(B) = s$ i $r + s = n$. A la Figura 1.3 podem veure dibuixat el graf bipartit complet $K_{4,4}$. La seva matriu d'adjacència és

$$A(K_{r,s}) = \begin{pmatrix} 0 & C \\ C^t & 0 \end{pmatrix},$$

on C és una matriu $r \times s$ tal que tots els seus valors són 1. Podem determinar el seu espectre a partir de la Proposició 3.1.28 i tenim que $\mathrm{Spec}(K_{r,s}) = \{-\sqrt{rs}, 0^{r+s-2}, \sqrt{rs}\}$. Com que l'espectre està determinat per les arrels del polinomi característic, aleshores $P_{K_{r,s}}(\lambda) = \lambda^{r+s-2}(\lambda^2 - rs)$. Respecte el seu grup d'automorfismes, podem distingir entre dos casos:

(1) Si $r \neq s$, aleshores no podem permutar els vèrtex de A amb els de B ja que s'ha de conservar la no adjacència entre els vèrtexs d'aquests subconjunts. No obstant, podem permutar els vèrtexs de A entre ells i obtenim $r!$ automorfismes. Anàlogament, permutem els vèrtexs de B i obtenim $s!$ automorfismes. Així doncs, $\Gamma(K_{r,s})$ té $r! \cdot s!$ elements i tenim que $\Gamma(K_{r,s}) = S_r \times S_s$.

(2) Si $r = s$, aleshores podem permutar tots els vèrtexs de A entre ells i tots els vèrtexs de B entre ells. A més, si permutem un vèrtex de A amb un de B, aleshores la resta dels de A els hem de permutar amb els de B i qualsevol permutació és vàlida. Per tant tenim que $|\Gamma(K_{r,r})| = r!(r! + r!) = 2(r!)^2$.

Clarament, com que $V(K_{r,s}) = A \cup B$ amb A i B disjunts, aleshores $\chi(K_{r,s}) = 2$. Vegem-ho per $n = 5$ i $n = 6$:

Figura 3.10: $P_{K_{2,3}}(\lambda) = \lambda^5 - 6\lambda^3$, $\mathrm{Spec}(K_{2,3}) = \{-\sqrt{6}, 0^3, \sqrt{6}\}$, $\Gamma(K_{2,3}) = S_2 \times S_3$, $\chi(K_{2,3}) = 2$, $P_{K_{3,3}}(\lambda) = \lambda^6 - 9\lambda^4$, $\mathrm{Spec}(K_{3,3}) = \{-3, 0^4, 3\}$, $|\Gamma(K_{3,3})| = 2(3!)^2 = 72$, $\chi(K_{3,3}) = 2$.

Estrella

L'estrella S_n és un graf connex de n vèrtexs on un vèrtex té grau $n-1$ i els altres vèrtexs tenen grau 1. L'estrella és un graf bipartit complet on un dels dos conjunts té 1 vèrtex i l'altre en té $n-1$, és a dir, $S_n = K_{1,n-1}$. A la Figura 1.4 podem veure dibuixada l'estrella $S_9 = K_{1,8}$. La seva matriu d'adjacència és

$$A(S_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Anem a calcular el seu espectre. Sabem que $P_{S_n}(\lambda) = \det(\lambda \cdot \mathrm{Id} - A(S_n))$ i tenim que

$$\det(\lambda \cdot \mathrm{Id} - A(S_n)) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}.$$

Si desenvolupem el determinant per la segona fila obtenim la següent expressió:

$$\begin{aligned}\det(\lambda \cdot \mathrm{Id} - A(S_n)) &= -(-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} + \lambda \cdot \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda \cdot \det(\lambda \cdot \mathrm{Id} - A(S_{n-1})) - \lambda^{n-2}.\end{aligned}$$

Així doncs, acabem de veure que $P_{S_n}(\lambda) = \lambda P_{S_{n-1}} - \lambda^{n-2}$. A partir d'ara notem $F_n = P_{S_n}(\lambda)$ i per tant,

$$F_n = \lambda F_{n-1} - \lambda^{n-2}. \tag{3.3.1}$$

Volem una equació per a F_n que només estigui en funció de λ. Anem a veure que passa si substituïm $F_{n-1} = \lambda F_{n-2} - \lambda^{n-3}$ i després $F_{n-2} = \lambda F_{n-3} - \lambda^{n-4}$ a (3.3.1).

$$\begin{aligned}F_n &= \lambda F_{n-1} - \lambda^{n-2} = \lambda(\lambda F_{n-2} - \lambda^{n-3}) - \lambda^{n-2} = \lambda^2 F_{n-2} - 2\lambda^{n-2} \\ &= \lambda^2(\lambda F_{n-3} - \lambda^{n-4}) - 2\lambda^{n-2} = \lambda^3 F_{n-3} - 3\lambda^{n-2}.\end{aligned}$$

Acabem de veure que $F_n = \lambda^k F_{n-k} - k\lambda^{n-2}$ per $k = 1, 2, 3$. Fem inducció en k per veure si és cert $\forall k < n$:

- Si $k = 0$:

$$F_n = \lambda^k F_{n-k} - k\lambda^{n-2} = \lambda^0 F_{n-0} - 0\lambda^{n-2} = F_n.$$

- Suposem que és cert $\forall k < n$. Per tant tenim que

$$F_n = \lambda^k F_{n-k} - k\lambda^{n-2}$$

per hipòtesi i

$$F_{n-k} = \lambda F_{n-k-1} - \lambda^{n-k-2}$$

per la relació de recurrència. Així doncs,

$$\begin{aligned}F_n &= \lambda^k F_{n-k} - k\lambda^{n-2} = \lambda^k(\lambda F_{n-k-1} - \lambda^{n-k-2}) - k\lambda^{n-2} \\ &= \lambda^{k+1} F_{n-k-1} - \lambda^{n-2} - k\lambda^{n-2} = \lambda^{k+1} F_{n-k-1} - (k+1)\lambda^{n-2}.\end{aligned}$$

En conseqüència, hem vist que $F_n = \lambda^k F_{n-k} - k\lambda^{n-2}$, $\forall k < n$.

Calculem ara el polinomi característic de S_3:

$$P_{S_3}(\lambda) = F_3 = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda.$$

Finalment, posem $k = n - 3$ i tenim que

$$\begin{aligned} P_{S_n}(\lambda) = F_n &= \lambda^k F_{n-k} - k\lambda^{n-2} = \lambda^{n-3} F_{n-(n-3)} - (n-3)\lambda^{n-2} \\ &= \lambda^{n-3} F_3 - (n-3)\lambda^{n-2} = \lambda^{n-3}(\lambda^3 - 2\lambda) - (n-3)\lambda^{n-2} \\ &= \lambda^n - 2\lambda^{n-2} - n\lambda^{n-2} + 3\lambda^{n-2} = \lambda^{n-2}(\lambda^2 - (n-1)). \end{aligned}$$

Si fem $P_{S_n}(\lambda) = 0$, aleshores $\mathrm{Spec}(S_n) = \{-\sqrt{n-1}, 0^{n-2}, \sqrt{n-1}\}$. A més, com que l'estrella és un cas particular de graf bipartit complet, ja hem vist que $\Gamma(S_n) = S_{n-1}$ i $\chi(S_n) = 2$. Vegem-ho per $n = 7$:

S_7

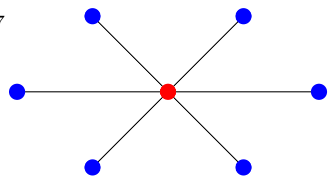


Figura 3.11: $P_{S_7}(\lambda) = \lambda^7 - 6\lambda^5$, $\mathrm{Spec}(S_7) = \{-\sqrt{6}, 0^5, \sqrt{6}\}$, $\Gamma(S_7) = S_6$, $\chi(S_7) = 2$.

Capítol 4

Conclusions

Un cop finalitzat el treball crec que, en termes generals, he pogut assolir els objectius que m'havia proposat i que he explicat a la introducció.

En els primers capítols he pogut repassar els conceptes més bàsics adquirits en les assignatures de Grafs i Àlgebra Lineal. Aquests coneixements m'han servit per desenvolupar el Capítol 3, el qual m'ha suposat una major dedicació per la quantitat de resultats que hi he introduït i per la complexitat en les demostracions d'alguns d'aquests. No obstant, també ha estat el capítol que més m'ha agradat i en el que més he après.

Un dels dubtes que tenia abans de començar a escriure aquest treball era si realment aquesta branca estaria prou desenvolupada com per poder analitzar-la i treure-li partit. Ara puc dir que aquest treball només és una petita part respecte tota la teoria de grafs algebraica que s'ha anat produint durant aquests últims segles i de la qual procuraré seguir aprenent.

Bibliografia

[1] N. Biggs, *Algebraic Graph Theory,* London School of Economics, Cambridge University, 1993.

[2] J.A. Bondy i U.S.R. Murty, *Graph Theory with Applications,* New York, North Holland, 1976.

[3] R.L. Brooks, *On colouring the nodes of a network,* Proc. Cambridge Philosophical Society **37** (1941), 194–197.

[4] A.E. Brouwer i W.H. Haemers, *Spectra of Graphs,* Universitext. Springer, New York, 2012.

[5] M. Castellet i I. Llerena, *Àlgebra Lineal i Geometria,* 4a Edició, Universitat Autònoma de Barcelona, Servei de Publicacions, Bellaterra, 2005.

[6] T. Crespo, *Estructures Algebraiques,* Apunts del curs d'Estructures Algebraiques de la Universitat de Barcelona.

[7] P. Csikvári, *Spectral Graph Theory*, http://math.mit.edu/~csikvari/spectral_graph_theory_V3.5.pdf.

[8] D. Cvetkovic, P. Rowlinson i S. Simic, *An Introduction to the Theory of Graph Spectra*, Cambridge University Press, 2010.

[9] P. Dankelmann, D. Erwin, S. Mukwembi, E. Mwambene, G. B. Rodrigues i G. Sabidussi, *Automorphism group and diameter of a graph*, J. Graph Theory **70** (2012), 80–91.

[10] M. Doob, *Graphs with a small numbers of distinct eigenvalues*, Ann. New York Academy of Sciences **175** (1970), 104–110.

[11] L. Euler, *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis,* Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae **8** (1741), 128–140.

[12] R.A. Horn i C.R. Johnson, *Matrix Analysis,* Cambridge University Press, 1985.

[13] O. Jones, *Spectra of Simple Graphs,* Whitman College, 2013 https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/Jones.pdf.

[14] À. Jorba, *Mètodes Numèrics II,* Apunts del curs de Mètodes Numèrics II de la Universitat de Barcelona.

[15] L. Lovász, *Eigenvalues of graphs*, Apunts 2007 http://www.cs.elte.hu/~lovasz/eigenvals-x.pdf.

[16] J. Soria, *Graphs,* Apunts del curs de Grafs de la Universitat de Barcelona.

[17] E.R. van Dam, *Graphs with few eigenvalues*, Apunts 1996 https://cage.ugent.be/geometry/Theses/30/evandam.pdf.