Treball Final de Grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

Teoria de Diferenciació d'Integrals

Autor: Joan Martínez Bernadàs

Director: Dr. F. Javier Soria de Diego
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 17 de gener de 2017

Índex

Agraïments

Voldria agrair, en primer lloc, a en Javier Soria per les hores que m'ha dedicat i el guiatge que m'ha procurat durant tota l'elaboració del treball. També m'agradaria donar les gràcies a tots aquells que m'han aguantat al llarg d'aquests anys, en especial a la Laura, en Joan Carles, en Pau, en Gerard i la Maria.

Abstract

The theory of differentiation of integrals comes from the widely known theorem of Lebesgue. One could think that taking on this theorem euclidean balls instead of other type of sets might well be irrelevant. But it's not true. It became a difficult problem to find out whether the replacement of euclidean balls by other type of sets in the Lebesgue theorem would lead to a true statement or not.

The aime of this work is to present the theory of differentiation of integrals as an interaction between covering properties of families of sets in $\mathbb{R}^n$, estimations for an adequate extension of the maximal operator of Hardy and Littlewood and differentiation properties. First chapter is devoted to the main covering theorems that are used in the subject. The second one introduces the notions of a differentiation basis and the maximal operator associated to it. Third chapter shows how closely related are the properties of the maximal operator and the differentiation properties of a basis. Finally, in the fourth chapter we solve some classical problems: the Perron tree, the Kakeya problem and the Nikodym set.

Introducció

Una forma d'introduir la *Teoria de diferenciació d'integrals* és mitjançant el *Teorema fonamental del càlcul*:

Teorema (Teorema fonamental del càlcul). *Sigui* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una funció contínua, i sigui* $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. *Aleshores,*

$$F \in \mathcal{C}^1([a,b]) \text{ i } F'(x) = f(x), \text{ per tot } x \in (a,b).$$

Demostració. Fixem $c \in (a,b)$. Suposem, sense pèrdua de generalitat, $h > 0$ i calculem la derivada de $F(c)$

$$\left| \frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) \right| \leq \frac{1}{h} \int_c^{c+h} |f(t) - f(c)| \, dt.$$

Com f és contínua a c, donat $\varepsilon > 0$ podem trobar $\delta > 0$ tal que si $|t - c| < \delta$, aleshores $|f(t) - f(c)| < \varepsilon$. Així,

$$\left| \frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) \right| \leq \frac{1}{h} \int_c^{c+h} |f(t) - f(c)| \, dt < \frac{\varepsilon}{h} \int_c^{c+h} dt = \varepsilon.$$

Per tant, podem concloure que

$$F'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c).$$

□

La única hipòtesis de la que es serveix el teorema, és la continuïtat de f. Així, de forma natural sorgeix la pregunta: què passa si modifiquem la hipòtesis de continuïtat?

Observem que podem reescriure, amb major generalitat, el final de la demostració prenent una família d'intervals $\{I_k\}_k$, amb $c \in I_k$ per a tot k, i tals que el seu diàmetre tendeix a 0 quan $k \to \infty$ així:

$$F'(c) = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{|I_k|} \int_{I_k} f(t)dt = f(c).$$

D'aquesta manera, podem modificar la hipòtesis del teorema suposant que f és una funció (localment) integrable Lebesgue a $\mathbb{R}^n$. El *Teorema de Lebesgue* (1910) mostra un resultat en aquesta línia:

Teorema (Teorema de Lebesgue). *Sigui* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *i sigui* $\{B_{r_k}(x)\}_k$ *una família de boles centrades en* $x \in \mathbb{R}^n$ *i radi* r_k *tal que* $\lim_{k\to\infty} r_k = 0$. *Aleshores,*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{|B_{r_k}(x)|} \int_{B_{r_k}(x)} f(t)dt = f(x), \text{ quasi per tot } x \in \mathbb{R}^n.$$

Però, és vàlid aquest resultat si, enlloc de fer servir boles, usem un altre tipus de conjunt que també es contregui cap a x? Així va esdevenir un problema difícil esbrinar si reemplaçar les boles en el teorema de Lebesgue conduiria a un resultat cert o no. Això va dur a tenir en compte situacions més generals i intentar trobar una caracterització per les famílies de conjunts que, com les boles, poden tenir un teorema de diferenciació similar al de Lebesgue. D'aquesta manera va sorgir la Teoria de diferenciació d'integrals.

El treball que aquí es presenta és un estudi de les diverses relacions geomètriques i analítiques que existeixen entre les propietats de cobriment de conjunts, acotacions d'operadors maximals i el teorema de diferenciació de Lebesgue. Així doncs, s'ha estructurat al voltant d'aquests tres eixos.

En el primer capítol es presenten tres resultats sobre propietats de cobriment. Un primer de trivial, però de gran utilitat, seguidament dos teoremes de Besicovitch i finalment el clàssic Teorema de Vitali. Per acabar es demostra el Teorema de Lebesgue usant el Teorema de Vitali.

En el segon capítol s'introdueix l'operador maximal de Hardy-Littlewood i les bases de diferenciació de boles, cubs, intervals i rectangles. Es donen unes primeres acotacions per a boles, cubs i intervals, amb l'ajuda de les propietats de cobriment introduïdes. Finalment es demostra novament el Teorema de Lebesgue usant l'acotació obtinguda en boles, connectant així els tres pilars de la Teoria de diferenciació d'integrals.

En el tercer capítol es tracte el concepte de derivada d'una integral d'una funció respecte una base i es mostren diferents caracteritzacions de les bases de diferenciació en termes de l'operador maximal.

En el darrer capítol, s'estudien en major profunditat la base d'intervals i la de rectangles, i es resolen alguns problemes clàssics: el problema de Kakeya, l'arbre de Perron i el conjunt de Nikodym.

La major part dels resultats que es mostren en aquest treball han estat trets del llibre de M. de Guzmán *Differentiation of Integrals in* $\mathbb{R}^n$ [8].

Capítol 1

Teoremes de cobriment

La teoria de diferenciació d'integrals és una combinació entre propietats de cobriment i diferenciació de famílies de conjunts. D'aquestes propietats, les de cobriment són potser les més bàsiques, doncs en molts casos només calen elements geomètrics per establir-les i no de teoria de la mesura.

Comencem el capítol amb un resultat trivial, però de molta utilitat. Continuem amb uns teoremes presentats per Besicovitch (1945, 1946) [2] [3] purament geomètrics. Per acabar, es mostra el clàssic teorema de Vitali.

1.1 El peix gran es menja el petit

El primer resultat que es mostra, tot i ser molt senzill, és molt útil. En la demostració fem ús del següent lema:

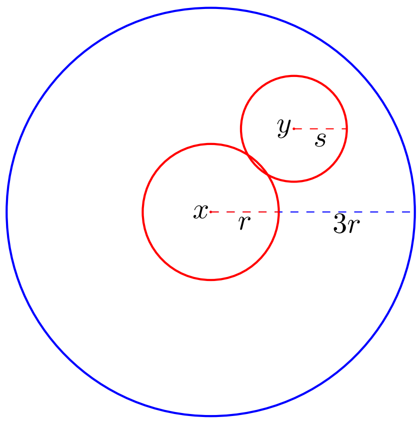


Figura 1.1: El peix gran es menja el petit.

Lema 1.1 (El peix gran es menja el petit)**.** *Donades dues boles* $B(x,r)$ *i* $B(y,s)$*, amb* $B(x,r)\bigcap B(y,s)\neq\emptyset$ *i* $r\geq s$*, es té*

$$B(x,r)\bigcup B(y,s)\subset B^*(x,r),\ \ on\ B^*(x,r)=B(x,3r)$$

Demostració. En el pitjor dels casos tindrem que $r = s$ i que les dues boles són tangents. És evident que $B(x,r) \subset B^*(x,r)$. A més, trivialment, $d(x,z) \leq 3r$, on $z \in B(y,s)$. (Figura 1.1) $\square$

Amb aquest resultat podem ja presentar i demostrar el següent teorema:

Teorema 1.2. *Sigui $\mathcal{F}$ un conjunt finit de boles a $\mathbb{R}^n$; i.e.,*

$$\mathcal{F} = \{B_j \ : \ B_j \ \textit{bola}, \ j = 1, \cdots, N\}$$

aleshores existeix un subconjunt $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$; i.e.,

$$\mathcal{F}' = \{C_k \ : \ C_k \ \textit{bola}, \ k = 1, \cdots, M\} \subset \mathcal{F}, \quad \textit{amb} \ M \leq N$$

tal que:

(i) Per a tot $C_1, C_2 \in \mathcal{F}'$, amb $C_1 \neq C_2$, $C_1 \bigcap C_2 = \emptyset$.

(ii) $\bigcup_{j=1}^{N} B_j \subset \bigcup_{k=1}^{M} C_k^*$.

Demostració. Donat que $\mathcal{F}$ és un conjunt finit, existeix una bola B_1 amb el radi màxim. Prenem aquesta bola i traiem de $\mathcal{F}$ totes les boles que la intersequen, ja que el Lema 1.1 ens assegura que aquestes estan contingudes a B_1^*. Repetim el procés amb les boles que queden, escollint sempre la de major radi, fins que no quedi cap bola que no haguem usat en algun pas.

És obvi que la subcol·lecció de boles que han quedat a $\mathcal{F}$ és finit i que són disjuntes dos a dos. A més, usant el Lema 1.1 ens hem assegurat la segona condició del teorema. $\square$

1.2 Teoremes de cobriment de Besicovitch

El següent resultat presentat és de molta utilitat en la teoria de diferenciació d'integrals. De naturalesa purament geomètrica, resulta essencial per demostrar altres teoremes de cobriment, com el de Vitali. El teorema original de Besicovitch s'ocupa de boles euclidianes a $\mathbb{R}^n$; el que aquí es presenta és una versió més simple i elemental.

Teorema 1.3 (Teorema de Besicovitch)**.** *Sigui A un conjunt acotat de $\mathbb{R}^n$. Per a cada $x \in A$, sigui Q_x un cub tancat centrat en x. Aleshores existeix una successió $\{Q_k\}_k$ tal que:*

(i) La successió cobreix el conjunt A; i.e., $A \subset \bigcup_k Q_k$.

(ii) Cap punt de $\mathbb{R}^n$ no pertany en més de θ_n cubs de la successió $\{Q_k\}_k$; i.e., per a cada $z \in \mathbb{R}^n$,

$$\sum_k \chi_{Q_k}(z) \leq \theta_n.$$

(iii) La successió $\{Q_k\}_k$ es pot distribuir en ξ_n famílies de cubs disjunts.

Per tal de fer més clara la demostració d'aquest teorema, veiem primer una versió més elemental, la prova del qual conté la idea principal del teorema.

Teorema 1.4. *Sigui $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ una successió decreixent de cubs tancats centrats a l'origen de $\mathbb{R}^n$. Suposem $\bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k = \{0\}$. Sigui A un conjunt acotat de $\mathbb{R}^n$. Per a cada $x \in A$ prenem un enter positiu $i(x)$ i escrivim $Q(x) = x + Q_{i(x)}$. Aleshores existeix una successió $\{x_k\}_k \subset A$ (que pot ser finita) tal que:*

(i) $\{Q(x_k)\}_k$ cobreix el conjunt A; i.e., $A \subset \bigcup_k Q(x_k)$.

(ii) Cada $z \in \mathbb{R}^n$ pertany com a molt a 2^n dels conjunts $Q(x_k)$; i.e., per a cada $z \in \mathbb{R}^n$,

$$\sum_k \chi_k(z) \leq 2^n,$$

on χ_k denota la funció característica de $Q(x_k)$.

(iii) La successió $\{Q(x_k)\}_k$ es pot distribuir en $4^n + 1$ successions disjuntes.

Demostració. Comencem prenent x_1 tal que $Q(x_1)$ sigui de grandària màxima. Suposem que $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ja han estat triats. Si

$$A \setminus \bigcup_{k=1}^{m} Q(x_k) = \emptyset,$$

aleshores el procés de selecció ja ha acabat. Si no és així, prenem $x_{m+1} \in A \setminus \bigcup_{k=1}^{m} Q(x_k)$ de forma que $Q(x_{m+1})$ sigui de grandària màxima. La successió $\{Q(x_k)\}_{k=1}^{m+1}$ que hem obtingut, satisfà les següents propietats:

(a) Si $i \neq j$, aleshores $x_i \notin Q(x_j)$.

(b) La successió $\{\delta(Q(x_k))\}_k$ de diàmetres dels conjunts $Q(x_k)$ és, o bé finita, o bé tal que $\lim_{k\to\infty} \delta(Q(x_k)) = 0$, ja que que els conjunts $x_k + \frac{1}{2} Q_{i(x_k)}$ són disjunts.

Si el procés de selecció s'acaba, la propietat (i) és trivial. Si $\{Q(x_k)\}_k$ és una successió infinita i hi ha un $x \in A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} Q(x_k)$, aleshores existeix j_0 tal que el diàmetre de $Q(x)$ és més gran que el de $Q(x_{j_0})$. Això vol dir que hauríem d'haver pres x a la nostra selecció. Per tant, $A \subset \bigcup_k Q(x_k)$.

Per veure (ii) prenem, a través de z, n hiperplans paral·lels als n hiperplans coordinats i considerem els 2^n "hiperquadrants" tancats a través de z determinats per ells. En cada hiperquadrant com a molt hi ha un punt x_j tal que $z \in Q(x_j)$. En efecte, si n'hi hagués dos, x_i i x_j, el cub més gran entre $Q(x_i)$ i $Q(x_j)$ contindria el centre del més petit i això no pot ser per construcció.

Per provar (iii) fixem un element $Q(x_j)$ de la successió $\{Q(x_k)\}_k$. Per (ii), com a màxim 2^n elements de la successió contenen un vèrtex fixat de $Q(x_j)$. Cada cub $Q(x_k)$ amb $k > j$ és d'una mida igual o major que $Q(x_j)$ i, per tant, si

$$Q(x_k) \bigcap Q(x_j) \neq \emptyset,$$

amb $k < j$, aleshores $Q(x_k)$ conté almenys un dels 2^n vèrtex de $Q(x_j)$. Així doncs, per cada $Q(x_j)$ hi ha com a màxim $2^n \times 2^n$ conjunts de la col·lecció

$$\{Q(x_1), Q(x_2), \ldots, Q(x_{j-1})\}$$

amb intersecció diferent del buit amb el cub $Q(x_j)$. Aquest fet ens permet distribuir els cubs $Q(x_k)$ en $4^n + 1$ successions disjuntes de la següent forma: establim $Q(x_i) \in I_i$ per $i = 1, 2, \ldots, 4^n + 1$. Donat que $Q(x_{4^n+2})$ és disjunt amb $Q(x_{k_0})$ per algun $k_0 \leq 4^n + 1$ podem prendre $Q(x_{4^n+2}) \in I_{k_0}$. De la mateixa manera prenem $Q(x_{4^n+3}) \in I_{k^*}$. Etcètera. La successió $\{x_k\}_k \subset A$ que hem construït satisfà les tesis del teorema. $\square$

Ara ja disposem de les eines necessàries per demostrar el teorema que havíem deixat pendent.

Demostració del Teorema de Besicovitch 1.3. El procés de selecció consistirà, tal com hem fet en el teorema anterior, en escollir primer els conjunts més grans possibles i excloure de A la part que aquests cobreixen. El fet que el suprem dels diàmetres dels cubs pot ser inassolible ens obliga a escollir els cub de major grandària. Una qüestió purament tècnica. Sigui

$$a_0 = \sup \left\{ \delta(Q(x)) \ : \ x \in A \right\}.$$

Si $a_0 = \infty$, aleshores un sol cub $Q(x)$ convenientment triat és suficient per cobrir A. Si $a_0 < \infty$, escollim $Q_1 \in \left\{ Q(x) \right\}_{x \in A}$ amb centre a $x_1 \in A$ tal que $\delta(Q_1) > a_0/2$. Sigui ara

$$a_1 = \sup \left\{ \delta(Q(x)) \ : \ x \in A \setminus Q_1 \right\}.$$

Seguidament escollim Q_2 amb centre $x_2 \in A \setminus Q_1$ tal que $\delta(Q_2) > a_1/2$. Etcètera.

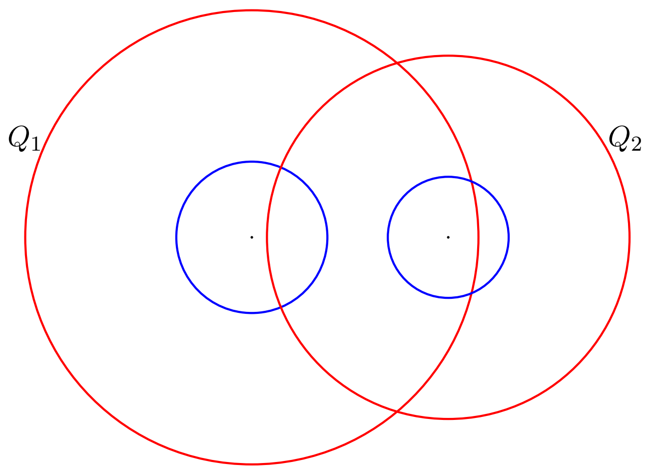


Figura 1.2: Amb un terç de la seva mida la intersecció és buida.

Observem que no podem assegurar que si $i \neq j$, aleshores $x_i \notin Q(x_j)$. Això és cert si $i > j$, però no necessàriament si $i < j$. Tot i així sempre podem garantir que la intersecció $\frac{1}{3}Q_i \bigcap \frac{1}{3}Q_j$ és buida, on $\frac{1}{3}Q_k$ és un cub amb el mateix centre que Q_k i amb un terç de la seva mida, tal com es mostra a la Figura 1.2. De fet, si per exemple $i > j$, aleshores $x_i \notin Q_j$ i $\delta(Q_j) > \delta(Q_i)/2$, i això implica l'afirmació anterior. Així obtenim (i) tal com hem fet en la demostració precedent.

La demostració de (ii) i (iii) és essencialment igual que en el Teorema 1.4 usant la mateixa observació que hem fet servir per provar (i). $\square$

1.3 Teorema de cobriment de Vitali

El teorema de cobriment més clàssic en la teoria de diferenciació d'integrals és el de Vitali (1908) [13], el qual ha estat tradicionalment l'eina mitjançant la qual obtenir el teorema de diferenciació de Lebesgue a $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.5 (Teorema de Vitali)**.** *Sigui $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunt qualsevol. Per a cada $x \in A$ considerem una successió $\big\{Q_k(x)\big\}_{k=1}^{\infty}$ de cubs tancats centrats a x i que es contrauen a x. Aleshores podem extreure de $T = \big\{Q(x)\big\}_{x\in A}$ una successió disjunta $\{S_k\}_k$ tal que*

$$\Big|A \setminus \bigcup_k S_k\Big| = 0.$$

Demostració. Suposem primer que A és a l'interior del cub unitat Q amb un vèrtex a l'origen i un altre al punt $(1, 1, \ldots, 1)$. Podem suposar, sense pèrdua de generalitat, que tots els cubs de T estan continguts a l'interior de Q.

Per començar, escollim $S_1 \in T$ tal que

$$\big|S_1\big| \geq \frac{1}{2} \sup\big\{|I| \ : \ I \in T\big\}.$$

Seguidament escollim $S_2 \in T$ tal que $S_1 \bigcap S_2 = \emptyset$ i

$$\big|S_2\big| \geq \frac{1}{2} \sup\Big\{|I| \ : \ I \in T,\ I \bigcap S_1 = \emptyset\Big\}.$$

Escollim $S_3 \in T$ tal que $S_3 \bigcap \big(\bigcup_{i=1}^{2} S_i\big) = \emptyset$ i

$$\big|S_3\big| \geq \frac{1}{2} \sup\left\{|I| \ : \ I \in T,\ I \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^{2} S_i\right) = \emptyset\right\}.$$

I així successivament. Aquest procés de selecció pot ser finit o no. Si és finit, aleshores clarament $A \subset \bigcup_i S_i$, ja que de no ser així el procés de selecció no hauria acabat. Suposem doncs que el procés descrit a dalt és infinit i que hem obtingut la successió $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Veiem ara que per a cada $I \in T$ tenim que

$$I \bigcap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k\right) \neq \emptyset.$$

Efectivament, ja que de no ser així tindríem que existeix $S \in T$ tal que

$$S \bigcap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k\right) = \emptyset$$

i

$$|S| > \frac{1}{2} \sup\left\{|I| \ : \ I \in T, I \bigcap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k\right) = \emptyset\right\}.$$

Donat que els conjunts S_k són disjunts i estan continguts a Q, tenim que $\lim_{k\to\infty} \big|S_k\big| = 0$ i, per tant, existeix j_0 tal que $\big|S_{j_0}\big| < \big|S\big|/2$. Tenint en compte la manera en que hem escollit S_{j_0}, obtenim

$$\frac{1}{2}\big|S\big| > \big|S_{j_0}\big| \geq \frac{1}{2} \sup\left\{|I| \ : \ I \in T,\ I \bigcap \left(\bigcup_{k=1}^{j_0-1} S_k\right) = \emptyset\right\} \geq \frac{1}{2}\big|S\big|.$$

Arribant a aquesta contradicció, podem afirmar que per a cada $I \in T$ tenim

$$I \bigcap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k \right) \neq \emptyset.$$

Per demostrar que

$$\left| A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k \right| = 0$$

n'hi ha prou de veure que per a cada $\epsilon > 0$ existeix h tal que

$$\left| A \setminus \bigcup_{k=1}^{h} S_k \right| \leq \varepsilon.$$

Donat qualsevol $\eta > 0$, triem h tal que

$$\sum_{k=h+1}^{\infty} |S_k| \leq \eta.$$

Així doncs, podem escriure

$$\begin{aligned}
A \setminus \bigcup_{k=1}^{h} S_k &\subset \bigcup \left\{ S \ : \ S \in T, S \bigcap \left(\bigcup_{k=1}^{h} S_k \right) = \emptyset \right\} \\
&= \bigcup \left\{ S \ : \ S \in T, S \bigcap \left(\bigcup_{k=1}^{h} S_k \right) = \emptyset, S \bigcap \left(\bigcup_{k=h+1}^{\infty} S_k \right) \neq \emptyset \right\} \\
&= \bigcup_{j=h}^{\infty} \left(\bigcup \left\{ S \ : \ S \in T, S \bigcap \left(\bigcup_{k=1}^{j} S_k \right) = \emptyset, S \bigcap S_{j+1} \neq \emptyset \right\} \right) \\
&\subset \bigcup_{j=h}^{\infty} \left(\bigcup \left\{ S \ : \ S \in T, |S| \leq 2|S_{j+1}|, S \bigcap S_{j+1} \neq \emptyset \right\} \right).
\end{aligned}$$

La primera inclusió és clara ja que, com $\bigcup_{k=1}^{h} S_k$ és compacte, per a cada $x \in A \setminus \bigcup_{k=1}^{h} S_k$ existeix un $Q_j(x) \in T$ tal que

$$Q_j(x) \bigcap \left(\bigcup_{k=1}^{h} S_k \right) = \emptyset.$$

La següent igualtat la obtenim amb la propietat que hem vist de que per a cada $S \in T$ tenim que

$$S \bigcap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k \right) = \emptyset.$$

La última igualtat és obvia i la inclusió final la justifiquem pel procés seguit alhora d'escollir els conjunts S_k. Per tant,

$$\left| A \setminus \bigcup_{k=1}^{h} S_k \right| \leq \sum_{j=h+1}^{\infty} 9^n |S_j| \leq 9^n \eta.$$

Fent $9^n\eta \leq \varepsilon$ obtenim el resultat. En el cas que A no estigui inclòs a l'interior de Q, apliquem el resultat obtingut a la intersecció de A amb l'interior de cada cub de $\mathbb{R}^n$ de costat 1 i vèrtexs en punts de coordenades enteres. $\square$

A continuació presentem el Teorema de Lebesgue com una conseqüència directe del Teorema de Vitali 1.5, connectant d'aquesta forma les propietats de cobriment i la teoria de diferenciació.

Teorema 1.6 (Teorema de Lebesgue). *Sigui $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Sigui $\{Q_k(x)\}_k$ una successió de cubs tancats centrats en x i que es contrauen a x. Aleshores per a quasi tot $x \in \mathbb{R}^n$, tenim*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{|Q_k(x)|} \int_{Q_k(x)} f(y)dy = f(x).$$

Demostració. Per provar-ho veurem que el conjunt de $x \in \mathbb{R}^n$ per als quals no es compleix el teorema, és un conjunt nul. Per $\alpha > 0$ i $H > 0$, definim el conjunt

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq H, \exists \{Q_k(x)\}_k, Q_k(x) \to x, \lim_{k\to\infty} \sup \left| \frac{1}{|Q_k(x)|} \int_{Q_k(x)} f - f(x) \right| > \alpha \right\}.$$

Serà suficient veure que $|A| = 0$. Sigui $\varepsilon > 0$ i considerem $f = g + h$, amb g contínua i $\|h\| < \varepsilon$. Com g és contínua, tenim que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{|Q_k(x)|} \int_{Q_k(x)} g(y)dy = g(x).$$

Per tant,

$$\begin{aligned} A &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq H, \exists \{Q_k(x)\}_k, Q_k(x) \to x, \lim_{k\to\infty} \sup \left| \frac{1}{|Q_k(x)|} \int_{Q_k(x)} h - h(x) \right| > \alpha \right\} \\ &\subset A_1 \bigcup A_2, \end{aligned}$$

on

$$A_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq H, \exists \{Q_k(x)\}_k, Q_k(x) \to x, \frac{1}{|Q_k(x)|} \int_{Q_k(x)} |h| > \frac{\alpha}{2} \right\}$$

i

$$A_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |h(x)| > \frac{\alpha}{2} \right\}.$$

Fàcilment veiem que

$$|A_2| = \int_{A_2} dx \leq \int \frac{|h(x)|}{\alpha/2} dx \leq \frac{2\varepsilon}{\alpha}.$$

Obtenim una successió disjunta $\{S_k\}_k \subset \{Q_k(x)\}_{x\in A}$ aplicant el Teorema de Vitali 1.5 a A_1, per $k \geq 1$, tal que $|A_1 \setminus \bigcup_k S_k| = 0$ i

$$\frac{1}{|S_k|} \int_{S_k} |h| > \frac{\alpha}{2}.$$

D'aquesta manera obtenim que

$$|A_1| \leq \sum_k |S_k| \leq \frac{2}{\alpha} \sum_k \int_{S_k} |h| \leq \frac{2\varepsilon}{\alpha}.$$

A més, $|A| \leq \frac{4\varepsilon}{\alpha}$. Com $\varepsilon > 0$ és arbitrari, $|A| = 0$. $\square$

Capítol 2

L'operador maximal de Hardy-Littlewood

Per a una funció f (localment) integrable Lebesgue, Hardy i Littlewood (1930) [10] van introduir una nova funció Mf la qual té un paper fonamental en la teoria d'una variable real.

Definició 2.1. Per a tota $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ definim l'*operador maximal de Hardy-Littlewood* M com

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy.$$

Què passa però, si enlloc de boles fem ús de cubs, o de si aquests estan centrats o no, en la definició de Mf? Denotem per $M_{\text{b}}f$ i $M_{\text{c}}f$ la definició amb boles i cubs no centrats respectivament, i per $M^*_{\text{b}}f$ i $M^*_{\text{c}}f$ en el cas de boles i cubs centrats en x.

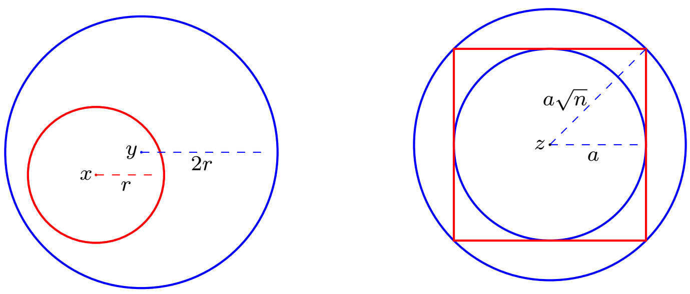


Figura 2.1: Observem l'equivalència de fer servir boles o cubs, centrats o no.

Proposició 2.2. *Sigui $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Aleshores quasi per a tot $x \in \mathbb{R}^n$*

$$M_{\text{c}}f(x) \approx M_{\text{b}}f(x) \approx M^*_{\text{c}}f(x) \approx M^*_{\text{b}}f.$$

Demostració. Observem que per a tot $y \in B(x,r)$, $B(x,r) \subset B(y,2r)$ i que, per tant, és equivalent usar boles centrades en x o no. A més, per a tot cub Q de costat $2a$ centrat en z tenim que $B(z,a) \subset Q \subset B(z,a\sqrt{n})$, tal com es mostra a la Figura 2.1. Per tant, és equivalent definir M amb boles o cubs, amb centre a x o no. $\square$

La següent pregunta natural que podem fer-nos és si la nova funció Mf és o no mesurable.

Proposició 2.3. *Sigui $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Aleshores Mf és mesurable; i.e., $Mf \in \mathcal{M}\big(\mathbb{R}^n\big)$.*

Demostració. En el cas no centrat el resultat és obvi, doncs per a tot $\lambda > 0$ el conjunt $\big\{x : Mf(x) > \lambda\big\} = M_\lambda$ és obert. Veiem-ho:

Si $x \in M_\lambda$, aleshores existeix $r > 0$ tal que $|B(x,r)|^{-1} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy > \lambda$. Observem que si $y \in B(x,r)$, aleshores $Mf(y) > \lambda$ i, per tant, $B(x,r) \subset M_\lambda$.

Per resoldre el cas centrat comencem per reescriure la definició de M^*f:

$$M^*f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy = \sup_{r\in\mathbb{Q}^+} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy.$$

És a dir [5], tenim una funció que és el suprem d'una successió de funcions reals mesurables; i.e., $M^*f(x) = \sup_{r\in\mathbb{Q}} g_r$, on $g_r = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy$. És suficient observar que $\{\sup_{r\in\mathbb{Q}} g_r > \lambda\} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \{g_r > \lambda\}$. □

Observació 2.4. L'operador maximal de Hardy-Littlewood està definit a

$$M : L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}^n).$$

En la següent proposició veiem algunes propietats de l'operador:

Proposició 2.5. *L'operador maximal de Hardy-Littlewood M compleix les següents propietats:*

(i) És positiu; i.e., per a cada $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ i $x \in \mathbb{R}^n$, $Mf(x) \geq 0$.

(ii) És subadditiu; i.e., per a cada $f_1, f_2 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $M(f_1+f_2)(x) \leq Mf_1(x) + Mf_2(x)$.

(iii) És positivament homogeni; i.e., per a cada $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, tenim que $M(\lambda f)(x) = |\lambda| Mf(x)$.

(iv) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i $f \not\equiv 0$, aleshores $Mf \notin L^1(\mathbb{R}^n)$. En particular observem que $M : L^1(\mathbb{R}^n) \nrightarrow L^1(\mathbb{R}^n)$.

Demostració. Les tres primeres propietats són trivials i s'obtenen directament de la definició d'operador maximal. Per veure (iv) serà suficient veure que $M^*_{\mathrm{b}}f \notin L^1(\mathbb{R}^n)$ gràcies a la Proposició 2.2.

Com $f \not\equiv 0$, tenim que $|f| \geq 0$. Així doncs, existeix una bola centrada a l'origen i de radi $\varepsilon > 0$ tal que

$$\int_{B(0,\varepsilon)} |f(y)|dy = c > 0,$$

on c és una constant. Prenem ara un $x \in \mathbb{R}^n$ que no pertanyi a la bola $B(0,\varepsilon)$ i considerem la bola $B(x, |x| + \varepsilon) \supset B(0,\varepsilon)$, representada a la Figura 2.2. D'aquesta manera veiem que

$$\begin{aligned} M^*_{\mathrm{b}}f(x) &\geq \frac{1}{|B(x,|x|+\varepsilon)|} \int_{B(x,|x|+\varepsilon)} |f(y)|dy \\ &\geq \frac{c_n}{\big(|x|+\varepsilon\big)^n} \int_{B(0,\varepsilon)} |f(y)|dy \gtrsim \frac{1}{|x|^n}. \end{aligned}$$

Així doncs, amb $|x| > \varepsilon$ hem obtingut la desigualtat $M_{\mathrm{b}}^* f(x) \gtrsim |x|^{-n}$. Per tant, com $|x|^{-n} \notin L^1(\mathbb{R}^n)$ tenim que $M_{\mathrm{b}}^* f$ tampoc. I, en conseqüència, l'operador M no és integrable Lebesgue.

$\square$

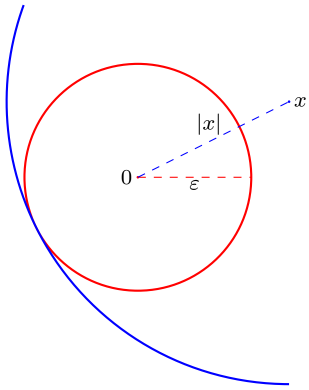


Figura 2.2: Prenem un $x \notin B(0,\varepsilon)$ i considerem la bola $B\big(x, |x| + \varepsilon\big) \supset B(0,\varepsilon)$.

2.1 Operador maximal de tipus dèbil $(1,1)$

A la Proposició 2.5 hem vist que l'operador maximal de Hardy-Littlewood no està acotat a $L^1(\mathbb{R}^n)$. L'objectiu d'aquesta secció serà trobar alguna acotació més dèbil.

Definició 2.6. Definim l'*espai de tipus dèbil* p com $L^{p,\infty} := \big\{ f : \sup_{t>0} t\lambda_f(t)^{1/p} < \infty \big\}$, per $1 \leq p < \infty$, on $\lambda_f(t) := \big|\{|f| > t\}\big|$ i s'anomena *funció de distribució* de f. Al conjunt $\{|f| > t\}$ l'anomenem *conjunt de nivell.*

Definició 2.7. Sigui $T : L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ un operador subadditiu; i.e., tal que per a cada $f_1, f_2 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ i per quasi tot $x \in \mathbb{R}^n$ tenim $|T(f_1 + f_2)(x)| \leq |Tf_1(x)| + |Tf_2(x)|$. Diem que T és de *tipus dèbil* (p,p), on $1 \leq p \leq \infty$, quan per a cada $\lambda > 0$ es compleix

$$\big|\{x : |Tf(x)| > \lambda\}\big| \leq \left(\frac{c\|f\|_p}{\lambda} \right)^p,$$

on c és una constant, independent de f i λ. És a dir,

$$T : L^p \longrightarrow L^{p,\infty}.$$

Diem que T és de *tipus fort* (p,p), on $1 \leq p \leq \infty$, si per a tota funció $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tenim

$$\|Tf\|_p \leq c\|f\|_p,$$

on c és una constant independent de f. És a dir,

$$T : L^p \longrightarrow L^p.$$

Observació 2.8. Observem que si T és de tipus fort (p,p), on $1 \leq p \leq \infty$, aleshores T és de tipus dèbil (p,p), doncs per a cada $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ i $\lambda > 0$,

$$|A_\lambda| = \big|\{x : |Tf(x)| > \lambda\}\big| = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{A_\lambda}(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|Tf(x)|^p}{\lambda^p} dx \leq \left(\frac{c\|f\|_p}{\lambda}\right)^p.$$

Així doncs $L^p \subsetneq L^{p,\infty}$. Per veure que la inclusió és estricte n'hi ha prou d'observar que, per exemple, $|x|^{-n/p} \in L^{p,\infty} \setminus L^p$.

Observació 2.9. L'operador maximal de Hardy-Littlewood M és de tipus fort (∞,∞) doncs clarament satisfà

$$\|Mf\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

Amb el següent teorema veiem que l'operador maximal de Hardy-Littlewood sí que està acotat a $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 2.10 (Teorema de Hardy-Littlewood)**.** *L'operador maximal de Hardy-Littlewood és de tipus dèbil* $(1,1)$.

Demostració. Sigui $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $\lambda > 0$ i K un conjunt acotat i mesurable de $\mathbb{R}^n$. Considerem el conjunt $A = \big\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\big\}$. Per a cada $x \in A \bigcap K$ escollim un cub obert $Q(x)$ centrat en x tal que

$$\frac{1}{|Q(x)|} \int_{Q(x)} |f(y)|dy > \lambda.$$

Amb el Teorema de Besicovitch 1.3 obtenim la successió de cubs oberts $\{Q_k(x)\}_k$ centrats en $x \in A \bigcap K$ tal que $A \bigcap K \subset \bigcup_k Q_k$ i, si χ_k denota la funció característica de Q_k, tenim $\sum_k \chi_k \leq \theta_n$, on θ_n és la constant del Teorema de Besicovitch 1.3. Aplicant això, juntament amb la desigualtat de Txebixov, obtenim

$$\begin{aligned} \Big|A \bigcap K\Big| &\leq \Big|\bigcup_k Q_k\Big| \leq \sum_k |Q_k| \leq \frac{1}{\lambda} \sum_k \int_{Q_k} |f(x)|dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_{\bigcup_k Q_k} |f(x)| \sum_k \chi_k dx \leq \frac{\theta_n}{\lambda} \int_{\bigcup_k Q_k} |f(x)|dx = \frac{\theta_n}{\lambda}\|f\|_1. \end{aligned}$$

Com aquesta estimació és independent de K, tenim que

$$|A| \leq \frac{\theta_n}{\lambda}\|f\|_1.$$

□

A continuació introduïm una proposició amb una important millora en l'acotació obtinguda en el Teorema 2.10 de l'operador maximal de Hardy-Littlewood, que ens permetrà veure que aquest operador és de tipus fort (p,p).

Proposició 2.11. *Si* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *aleshores*

$$\big|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}\big| \leq \frac{c}{t} \int_{\{|f(x)| > \frac{t}{2}\}} |f(y)|dy.$$

Demostració. Reescrivim $f = f_1 + f_2$, on $f_1 = f\chi_{\{|f|>t/2\}}$ i $f_2 = f\chi_{\{|f|\leq t/2\}}$. D'aquesta manera tenim que

$$\{x : Mf(x) > t\} \subset \left\{x : Mf_1(x) > \frac{t}{2}\right\} \bigcup \left\{x : Mf_2(x) > \frac{t}{2}\right\}.$$

Observem que $\|Mf_2\|_\infty \leq \|f_2\|_\infty \leq t/2$. Així doncs, usant el Teorema de Hardy-Littlewood 2.10 tenim que

$$\begin{aligned} \left|\{x : Mf(x) > t\}\right| &\leq \left|\left\{x : Mf_2(x) > \frac{t}{2}\right\}\right| \\ &\leq \frac{c}{t} \int_{\{|f_1(x)|>\frac{t}{2}\}} |f_1(y)|dy = \frac{c}{t} \int_{\{|f(x)|>\frac{t}{2}\}} |f(y)|dy. \end{aligned}$$

□

Tal com havíem anunciat, d'aquest resultat es desprèn que l'operador maximal de Hardy-Littlewood està acotat a L^p, per $1 < p \leq \infty$. Abans però, ens cal el següent resultat que ens facilitarà la demostració.

Proposició 2.12. *Sigui* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. *Aleshores*

$$\|f\|_p^p = p \int_0^\infty t^{p-1} \lambda_f(t)dt,$$

per tot $0 < p < \infty$.

Demostració. Veiem que

$$\begin{aligned} p \int_0^\infty t^{p-1} \lambda_f(t)dt &= p \int_0^\infty t^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{|f|>t\}}(x)dxdt \\ &= p \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{|f(x)|} t^{p-1} dtdx = \|f\|_p^p. \end{aligned}$$

□

Corol·lari 2.13. *L'operador maximal de Hardy-Littlewood és de tipus fort* (p, p), *per* $1 < p \leq \infty$; *i.e.,*

$$M : L^p \to L^p.$$

Demostració. Sigui $f \in L^p$. El cas $p = \infty$ ja l'hem vist en la Observació 2.9. Així doncs, suposem $1 < p < \infty$. Aplicant les Proposicions 2.11 i 2.12 tenim que

$$\begin{aligned} \|Mf\|_p^p &= p \int_0^\infty t^{p-1} \lambda_{Mf}(t)dt \\ &\leq p \int_0^\infty t^{p-2} c \int_{\{|f(x)|>t/2\}} |f(y)|dydt \leq c' \|f\|_p^p. \end{aligned}$$

□

Una aplicació del Teorema de Hardy-Littlewood 2.10 és el Teorema de Diferenciació de Lebesgue:

Teorema 2.14 (Teorema de Diferenciació de Lebesgue)**.** *Sigui $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Aleshores per a quasi tot $x \in \mathbb{R}^n$, tenim*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|Q(x,r)|} \int_{Q(x,r)} f(y)dy = f(x),$$

on $Q(x,r)$ denota el cub obert centrat x i de costat $2r$.

Demostració. Per demostrar aquest resultat n'hi ha prou de veure que per a cada $\lambda > 0$ el conjunt

$$P_\lambda = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \limsup_{r\to 0} \left| \frac{1}{|Q(x,r)|} \int_{Q(x,r)} f(y)dy - f(x) \right| > \lambda \right\}$$

té mesura 0.

Donat un $\varepsilon > 0$ prenem una funció contínua g tal que la funció $h = f - g$ compleix $\|h\|_1 \leq \varepsilon$. Com g és contínua, tenim que per a cada $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|Q(x,r)|} \int_{Q(x,r)} g(y)dy = g(x)$$

i també

$$\begin{aligned} P_\lambda &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \limsup_{r\to 0} \left| \frac{1}{|Q(x,r)|} \int_{Q(x,r)} h(y)dy - h(x) \right| > \lambda \right\} \\ &\subset \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \limsup_{r\to 0} \left| \frac{1}{|Q(x,r)|} \int_{Q(x,r)} h(y)dy \right| > \frac{\lambda}{2} \right\} \\ &= P_\lambda^1 \bigcup P_\lambda^2. \end{aligned}$$

Com

$$\limsup_{r\to 0} \left| \frac{1}{|Q(x,r)|} \int_{Q(x,r)} h(y)dy \right| \leq Mh(x),$$

tenim que

$$|P_\lambda^1| \leq \left| \left\{ x : Mh(x) > \frac{\lambda}{2} \right\} \right| \leq \frac{2\theta_n}{\lambda} \|h\|_1 \leq \frac{2\theta_n \varepsilon}{\lambda}$$

i també

$$|P_\lambda^2| = \left| \left\{ x : |h(x)| > \frac{\lambda}{2} \right\} \right| \leq \frac{2\|h\|_1}{\lambda} \leq \frac{2\varepsilon}{\lambda}.$$

Donat que hem pres un $\varepsilon > 0$ arbitrari, podem concloure que $|P_\lambda| = 0$. □

D'aquesta manera veiem com connecten els tres pilars de la Teoria de Diferenciació d'Integrals:

$$\boxed{\text{Propietats de cobriments} \Longrightarrow \text{Operadors Maximals} \Longrightarrow \text{Teoremes de Diferenciació}}$$

D'aquí podem deduir-ne el següent resultat interessant, que ens durà a definir el conjunt de punts de Lebesgue L_f:

Proposició 2.15. *Sigui $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Aleshores, quasi per a tot $x \in \mathbb{R}^n$ tenim*

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy = 0. \tag{2.1}$$

.

Demostració. Sigui $\alpha \in \mathbb{Q}$. Definim $f_\alpha(y) = |f(y) - \alpha| \in L^1_{\text{loc}}$. Aleshores, aplicant el Teorema de Diferenciació de Lebesgue 2.14, tenim que

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f_\alpha(y) dy = |f(x) - \alpha|,$$

quasi per a tot $x \in \mathbb{R}^n$.

Sigui T_α el conjunt de x que compleixen l'anterior igualtat, i C_α el seu complementari. Observem que $|\mathbb{R}^n \setminus T_\alpha| = 0$ i que, per tant, $\left| \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Q}} C_\alpha \right| = 0$. Sigui $x \in \bigcap_{\alpha \in \mathbb{Q}} T_\alpha$. Aleshores existeix una successió $\{\alpha_j\}_j$, on $\alpha_j \in \mathbb{Q}$ per a tot j, convergent a $f(x)$. Així doncs,

$$\begin{aligned} \lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy &\leq \lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - \alpha_j| dy + |\alpha_j - f(x)| \\ &= |f(x) - \alpha_j| + |\alpha_j - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

$\square$

Definició 2.16. Sigui $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Anomenem *conjunt de Punts de Lebesgue* al conjunt format per tots els punts de $\mathbb{R}^n$ que compleixen (2.1). El denotem per L_f.

Corol·lari 2.17. *Per a tot conjunt E mesurable, amb $|E| > 0$*

$$\lim_{r \to 0} \frac{|B(x,r) \bigcap E|}{|B(x,r)|} = 1,$$

quasi per a tot $x \in E$.

Demostració. N'hi ha prou de veure que

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} \chi_E(y) dy = \chi_E(x),$$

quasi per a tot $x \in E$. $\square$

2.2 Bases de diferenciació i l'operador maximal associat

Presentem ara una generalització de l'operador maximal de Hardy-Littlewood que ens serà molt útil en els problemes de diferenciació que es presenten més endavant.

Definició 2.18. Per a cada $x \in \mathbb{R}^n$, sigui $\mathcal{B}(x)$ una col·lecció de conjunts acotats mesurables i amb mesura positiva que contenen x i tal que hi ha almenys una successió $\{R_k\}_k \subset \mathcal{B}(x)$ amb $\lim_{k \to \infty} \delta(R_k) = 0$. La col·lecció $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{B}(x)$ s'anomena *Base de Diferenciació.*

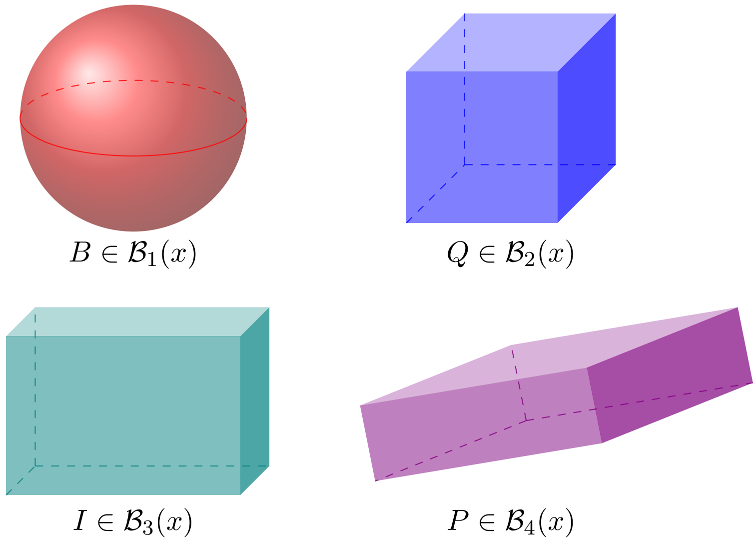


Figura 2.3: Representació d'una bola euclidiana, un cub, un interval i un rectangle a $\mathbb{R}^3$.

Definició 2.19. Sigui $\mathcal{B}_1$ la base de diferenciació tal que $\mathcal{B}_1(x)$ és la col·lecció de totes les boles euclidianes que contenen x. Anàlogament, siguin $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$ i $\mathcal{B}_4$ les bases tals que $\mathcal{B}_2(x)$ és la col·lecció de tots els cubs acotats i oberts que contenen x, $\mathcal{B}_3(x)$ és la col·lecció de tots els interval acotats i oberts que contenen x, és a dir, producte cartesià d'intervals paral·lels als eixos de coordenades contenint x, i $\mathcal{B}_4(x)$ és la col·lecció de tots els rectangles acotats i oberts que contenen x, és a dir, producte cartesià d'intervals no necessàriament paral·lels als eixos de coordenades. I siguin $\mathcal{B}_1^*$, $\mathcal{B}_2^*$, $\mathcal{B}_3^*$ i $\mathcal{B}_4^*$ les corresponents bases en els casos centrats.

Definició 2.20. Per a una base de diferenciació $\mathcal{B}$ i una funció $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ definim per a cada $x \in \mathbb{R}^n$ l'*operador maximal* M *associat a* $\mathcal{B}$, que va de l'espai $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ a l'espai de totes les funciones definides a $\mathbb{R}^n$ amb valors a $[0, \infty]$

$$Mf(x) = \sup_{R \in \mathcal{B}(x)} \frac{1}{|R|} \int_R |f(y)| dy.$$

Observació 2.21. De la Proposició 2.2, del Teorema de Hardy-Littlewood 2.10 i del Corol·lari 2.13 se'n dedueix que l'operador maximal associat a les bases $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_1^*$, $\mathcal{B}_2$ i $\mathcal{B}_2^*$ és de tipus dèbil $(1, 1)$ i de tipus fort (p, p), per $1 < p \leq \infty$.

Definició 2.22. Una base $\mathcal{B}$ de conjunts oberts s'anomena *base de Busemann-Feller* (base B-F) si per a cada $R \in \mathcal{B}$ i $x \in R$ tenim que $R \in \mathcal{B}(x)$.

Les bases $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$ i $\mathcal{B}_4$ són bases B-F, en canvi, les corresponents bases $\mathcal{B}_1^*$, $\mathcal{B}_2^*$, $\mathcal{B}_3^*$ i $\mathcal{B}_4^*$ no ho són. Alguns problemes de la teoria de diferenciació són molt fàcils de resoldre amb bases B-F però molt difícils amb d'altres. Si $\mathcal{B}$ és una base B-F, aleshores és fàcil de veure que el conjunt $\{Mf > \lambda\}$ és obert per a cada $\lambda > 0$ i que, per tant, M és un operador de $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ a $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. La mesurabilitat de Mf pot ser molt difícil de resoldre en altres casos. Tampoc és complicat veure que aquest operador compleix les propietats de la Proposició 2.5 que hem introduït en la secció anterior.

Definició 2.23. Direm que una base $\mathcal{B}$ satisfà la *propietat de Besicovitch* quan donat un conjunt acotat A de $\mathbb{R}^n$ i per a cada $x \in A$ un conjunt $R(x) \in \mathcal{B}(x)$, podem extreure de $\{R(x)\}_{x\in A}$ una successió $\{R_k\}_k$ tal que:

(i) $A \subset \bigcup_k R_k$.

(ii) Cap punt de $\mathbb{R}^n$ és en més de θ conjunts R_k; i.e., $\sum_k \chi_{R_k} \leq \theta$.

(iii) La successió $\{R_k\}_k$ es pot distribuir en ξ successions disjuntes.

2.3 L'operador maximal associat a un producte de bases de diferenciació

L'objectiu d'aquesta secció és establir per a $\mathcal{B}_3$ i el seu operador maximal associat M_3 una acotació de tipus dèbil tal com hem fet per a les base $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$, i les corresponents bases centrades. El següent resultat ens dóna una acotació una mica més dèbil que la de tipus $(1,1)$. Aquest teorema és degut a Jessen, Marcinkiewicz i Zygmund (1935) [12].

Teorema 2.24 (Teorema de Jessen-Marcinkiewicz-Zygmund)**.** *Sigui M_3 l'operador maximal associat a la base de diferenciació $\mathcal{B}_3$. Aleshores per a cada $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ i per a cada $\lambda > 0$ tenim*

$$\big|\{M_3 f > \lambda\}\big| \leq c \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{\lambda}\big(1 + \log^+ |x|\big)dx,$$

on c és una constant positiva independent de f i de λ, i $\log^+ a = 0$, si $0 \leq a \leq 1$ i $\log^+ a = \log a$, si $a > 1$.

Demostració. Per simplicitat resolem el cas per $n = 2$. Sigui $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ positiva; i.e., $f(x) \geq 0$ per a tot $x \in \mathbb{R}^2$. Per a tot $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ definim

$$T_1 f(x_1, x_2) = \sup\left\{\frac{1}{|J|}\int_J f(y_1, x_2)dy_1 : J \text{ és un interval de } \mathbb{R}, x_1 \in J\right\}$$
$$T_2 f(x_1, x_2) = \sup\left\{\frac{1}{|H|}\int_H \chi_A(x_1, y_2)dy_2 : H \text{ és un interval de } \mathbb{R}, x_2 \in H\right\},$$

i per a cada $\lambda > 0$ considerem el conjunt

$$A = \left\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : T_1 f(y_1, y_2) > \frac{\lambda}{2}\right\}.$$

Veiem ara que es compleix la següent relació

$$B = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : M_3 f(x_1, x_2) > \lambda\big\} \subset \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : T_2 f(x_1, x_2) > \frac{\lambda}{2}\right\} = C.$$

Fixem un punt $(x_1, x_2) \in B$, i veiem que $(x_1, x_2) \in C$. Com $(x_1, x_2) \in B$, existeix un interval $I = J \times H \subset \mathbb{R}^2$ tal que $x_1 \in J$, $x_2 \in H$ i

$$\frac{1}{|I|}\int_I f > \lambda.$$

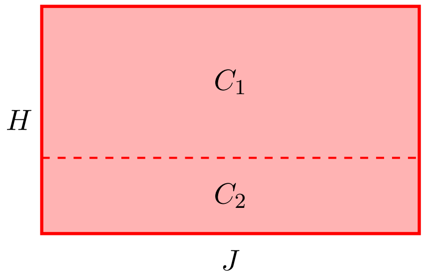


Figura 2.4: Particionem l'interval $I = C_1 \bigcup C_2$.

A continuació particionem l'interval I en dos conjunts C_1 i C_2, cadascun dels quals és la unió de segments de la mida de J paral·lels a l'eix Ox_1 de la següent manera. Sigui $J \times \{y_2\}$ un d'aquests segments. Si per a cada punt $(z_1, y_2) \in J \times \{y_2\}$ tenim que $T_1 f(z_1, y_2) > \lambda/2$, aleshores establim $J \times \{y_2\} \subset C_1$. Altrament, és a dir, si hi ha algun punt $(z_1, y_2) \in J \times \{y_2\}$ tal que $T_1 f(z_1, y_2) \leq \lambda/2$, aleshores prenem $J \times \{y_2\} \subset C_2$. Observem que $J \times \{y_2\} \subset C_2$ implica, en particular, que

$$\frac{1}{|J|} \int_J f(y_1, y_2) dy_1 \leq \frac{\lambda}{2}.$$

A més, integrant aquesta desigualtat sobre el conjunt G format per tot $y_2 \in H$ tal que $J \times \{y_2\} \subset C_2$, tenim que

$$\int_{C_2} f = \int_G \int_J f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \leq \int_G \frac{\lambda}{2} |J| dy_2 = \frac{\lambda}{2} |C_2| \leq \frac{\lambda}{2} |I|.$$

I donat que

$$\int_{C_1} f + \int_{C_2} f = \int_I f > \lambda,$$

obtenim que

$$\int_{C_1} f > \frac{\lambda}{2} |I|.$$

En virtut de les definicions de T_1 i T_2, també podem escriure

$$\begin{aligned} T_2 f(x_1, x_2) &\geq \frac{1}{|H|} \int_H \chi_A(x_1, y_2) T_1 f(x_1, y_2) T_1 f(x_1, y_2) dy_2 \\ &\geq \frac{1}{|H|} \int_H \chi_A(x_1, y_2) \frac{1}{|J|} \int_J f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \\ &\geq \frac{1}{|I|} \int_H \chi_A(x_1, y_2) \int_J f(y_1, y_2) dy_1 dy_2. \end{aligned}$$

Per la definició de C_1 i A, si $(y_1, y_2) \in C_1$, aleshores $(x_1, y_2) \in A$ i

$$T_2 f(x_1, x_2) \geq \frac{1}{|I|} \int_{C_1} f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 > \frac{\lambda}{2}.$$

Amb això hem provat que $B \subset C$.

Demostrem ara que C satisfà la desigualtat que estem buscant. Podem suposar, sense pèrdua de generalitat, que $f \in L(1 + \log^+ L)$, doncs de no ser així no hi ha res a demostrar.

En les següents argumentacions, c serà una constant, no sempre la mateixa, independent de f i de λ. Usant que la base de diferenciació unidimensional d'intervals $\mathcal{B}_2$ és de tipus dèbil $(1,1)$, quasi per a tot $x_1 \in \mathbb{R}$ fixat, podem escriure

$$\left|\left\{y_2 \in \mathbb{R} : T_2 f(x_1, y_2) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \leq \frac{c}{\lambda}\int_{\mathbb{R}} \chi_A(x_2, y_2) T_1 f(x_1, y_2) dy_2.$$

Per tant, si integrem sobre tot $x_1 \in \mathbb{R}$ que ho compleixi i canviem l'ordre d'integració, obtenim que

$$\begin{aligned}
|C| &= \left|\left\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : T_2 f(y_1, y_2) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \\
&\leq c \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{\chi_A(y_1, y_2) T f_1(y_1, y_2)}{\lambda/2} dy_1 dy_2 \\
&= c \int_{\mathbb{R}}\int_0^{\infty} \left|\left\{y_1 \in \mathbb{R} : \frac{\chi_A(y_1, y_2) T f_1(y_1, y_2)}{\lambda/2} > \sigma\right\}\right| d\sigma dy_2 \\
&= c \int_{\mathbb{R}}\int_0^1 + c\int_{\mathbb{R}}\int_1^{\infty} = S_1 + S_2.
\end{aligned}$$

Si $(y_1, y_2) \in A$, aleshores $T_1 f(y_1, y_2) > \lambda/2$, i si $0 < \sigma \leq 1$, tenim que

$$\left|\left\{y_1 \in \mathbb{R} : \frac{\chi_A(y_1, y_2) T f_1(y_1, y_2)}{\lambda/2} > \sigma\right\}\right| = \left|\left\{y_1 \in \mathbb{R} : T_1 f(y_1, y_2) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|.$$

Per tant, per ser la base unidimensional $\mathcal{B}_2$ de tipus dèbil $(1,1)$, tenim que

$$S_1 = c\int_{\mathbb{R}} \left|\left\{y_1 \in \mathbb{R} : t_1 f(y_1, y_2) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| dy_2 \leq c\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(y_1, y_2)}{\lambda} dy_1 dy_2.$$

Per tal d'estimar S_2 definim, per un $\sigma > 0$ fixat,

$$f_*(y_1, y_2; \sigma) = \begin{cases} f(y_1, y_2), & \text{si } f(y_1, y_2) \leq \lambda\sigma/4 \\ 0, & \text{si } f(y_1, y_2) > \lambda\sigma/4 \end{cases}$$

i $f^*(y_1, y_2; \sigma)$ tal que

$$f(y_1, y_2) = f^*(y_1, y_2; \sigma) + f_*(y_1, y_2; \sigma).$$

Per simplificar la notació denotem $f = f_\sigma^* + f_*^\sigma$. Trivialment tenim que $T_1 f \leq T_1 f_\sigma^* + T_1 f_*^\sigma$ i que $T_1 f_*^\sigma \leq \lambda\sigma/4$. Per tant,

$$\begin{aligned}
S_2 &\leq c\int_{\mathbb{R}}\int_1^{\infty} \left|\left\{y_1 \in \mathbb{R} : T_1 f_\sigma^*(y_1, y_2) > \frac{\lambda\sigma}{4}\right\}\right| d\sigma dy_2 \\
&\leq c\int_{\mathbb{R}}\int_1^{\infty}\int_{\mathbb{R}} \frac{f_\sigma^*(y_1, y_2)}{\lambda\sigma/4} dy_1 d\sigma dy_2 \\
&\leq c\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \left(\int_1^{\frac{4f(y_1,y_2)}{\lambda\sigma}} \frac{4f(y_1, y_2)}{\lambda} d\sigma\right) dy_1 dy_2 \\
&= c\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(y_1, y_2)}{\lambda} \log^+ \frac{4f(y_1, y_2)}{\lambda} dy_1 dy_2.
\end{aligned}$$

Sumant obtenim que

$$|C| \leq c\int \frac{f}{\lambda}\left(1 + \log^+ \frac{f}{\lambda}\right),$$

que implica la desigualtat del teorema. □

Nota 2.25. El teorema original es refereix a $\mathbb{R}^n$ i a una base de diferenciació $\mathcal{B}_3^s$ tal que $\mathcal{B}_3^s(x)$ és la col·lecció de tots els intervals oberts i acotats que contenen x tals que tenen s de n costats paral·lels als eixos. El resultat per $s = 1$ fou presentat per Jessen, Marcinkiewicz i Zygmund (1935), i per s arbitrari per Zygmund (1967) [14].

Observació 2.26. Per a $1 < p \leq \infty$ tenim

$$L^p_{\mathrm{loc}} \subsetneq L_{\mathrm{loc}}(1 + \log L) \subsetneq L^1_{\mathrm{loc}}$$

i, per interpolació, l'operador maximal M_3 és de tipus fort (p,p); i.e.,

$$M_3 : L^p \longrightarrow L^p.$$

Per la Proposició 2.2 obtenim un resultat del mateix tipus per la corresponent base centrada $\mathcal{B}_3^*$ i el seu operador maximal associat M_3^*.

Capítol 3

Propietats de diferenciació d'una base

La noció de derivada d'una integral d'una funció respecte d'una base de diferenciació $\mathcal{B}$ és una extensió natural de la derivada local en el sentit del Teorema de Lebesgue 2.14.

Definició 3.1. Sigui $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Definim, per a cada $x \in \mathbb{R}^n$ la *derivada superior* de f respecte $\mathcal{B}$ a x com

$$\overline{D}\Big(\int f, x\Big) = \sup\left\{\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{|B_k|}\int_{B_k} f : B_k \subset \mathcal{B}(x), B_k \to x\right\}$$

i la *derivada inferior* com

$$\underline{D}\Big(\int f, x\Big) = \inf\left\{\liminf_{k\to\infty} \frac{1}{|B_k|}\int_{B_k} f : B_k \subset \mathcal{B}(x), B_k \to x\right\}.$$

Diem que $\mathcal{B}$ *diferencia* f quan

$$\overline{D}\Big(\int f, x\Big) = \underline{D}\Big(\int f, x\Big) = f(x)$$

quasi per a tot $x \in \mathbb{R}^n$. Ho denotem per $\overline{D}\big(\int f, x\big) = D\big(\int f, x\big) = \underline{D}\big(\int f, x\big)$. Quan $\mathcal{B}$ diferencia tota $f \in X$ diem, no del tot adequadament, que $\mathcal{B}$ diferencia X.

Observació 3.2. En virtut dels resultats vistos fins ara tenim que:

(i) De la Observació 2.21 deduïm que les bases $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ i les corresponents centrades $\mathcal{B}_1^*$ i $\mathcal{B}_2^*$ diferencien $L^{p,\infty}$, per $1 \le p < \infty$ i L^p, per $1 \le p \le \infty$.

(ii) Per la Observació 2.26 tenim que les bases $\mathcal{B}_3$ i $\mathcal{B}_3^*$ diferencien L^p, per $1 < p \le \infty$.

L'objectiu principal d'aquest capítol és estudiar les propietats de l'operador maximal associat a una base $\mathcal{B}$ a través de la seves propietats de diferenciació.

Proposició 3.3. *Sigui $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ i $\mathcal{B}$ una base de Busemann-Feller. Aleshores la derivada superior i inferior de f respecte $\mathcal{B}$ és mesurable.*

Demostració. En efecte, per a tot $a \in \mathbb{R}^n$ tenim que

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \overline{D}\left(\int f, x \right) > a \right\} = \bigcup_{r=1}^{\infty} \bigcap_{s=1}^{\infty} A_{rs},$$

on per a cada r, s,

$$A_{rs} = \left\{ B \in \mathcal{B}(x) : \delta(B) < \frac{1}{s}, \frac{1}{|B|} \int_B f \geq a + \frac{1}{r} \right\}.$$

Com $B \in \mathcal{B}(x)$ és obert, A_{rs} també ho és i, per tant, $\overline{D}\left(\int f, \cdot \right)$ és mesurable. I donat que $\underline{D}\left(\int f, \cdot \right) = -\overline{D}\left(\int -f, \cdot \right)$, també ho és la derivada inferior. □

3.1 Bases de densitat. Teoremes de Busemann-Feller

Definició 3.4. Diem que una base de Busemann-Feller $\mathcal{B}$ és una *base de densitat* quan per a tot conjunt mesurable A i quasi per a tot $x \in \mathbb{R}^n$ es té

$$D\left(\int \chi_A, x \right) = \chi_A.$$

Veiem ara dos teoremes, essencialment deguts a Busemann i Feller (1934), que caracteritzen les bases de densitat en termes de l'operador maximal. La referència explícita a l'operador maximal es deu a Guzmán i Welland (1971) [9].

Teorema 3.5 (Primer Teorema de densitat de Busemann-Feller)**.** *Sigui $\mathcal{B}$ una base B-F. Aleshores són equivalents:*

(i) $\mathcal{B}$ és una base de densitat.

(ii) Per a cada $\lambda \in (0,1)$, per a cada successió no creixent $\{A_k\}_k$ de conjunts acotats i oberts tal que $\lim_{k\to\infty} |A_k| = 0$ i per a cada successió no creixent $\{r_k\}_k$ de nombres reals tal que $\lim_{k\to\infty} r_k = 0$ tenim

$$\lim_{k\to\infty} \left| \left\{ M_k \chi_k > \lambda \right\} \right| = 0,$$

on per a cada k, h, es té $\chi_h = \chi_{A_h}$ i

$$M_k \chi_h(x) = \sup \left\{ \frac{1}{|B|} \int_B \chi_h : \delta(B) < r_k, B \in \mathcal{B}(x) \right\}.$$

Demostració. Comencem provant que (i) implica (ii). Sigui $0 < \lambda < 1$ i sigui $\{A_k\}_k$ una successió com la descrita a (ii). Fixem un A_h. Com $\mathcal{B}$ és una base densitat, tenim que $D(\int \chi_h, x) = 0$ i també, per un k suficientment gran, $M_k \chi_h(x) \leq \lambda$, quasi per a tot $x \notin A_h$. Per tant,

$$\lim_{k\to\infty} \left| \{ M_k \chi_k > \lambda \} \right| \leq |A_h|.$$

Per la definició de $M_k \chi_h$ tenim que, per a tot $k \geq h$,

$$\{ M_k \chi_k > \lambda \} \subset \{ M_k \chi_h > \lambda \}.$$

Així doncs,

$$\lim_{k\to\infty} \big|\{M_k\chi_h > \lambda\}\big| \leq |A_h|.$$

I com $\lim_{k\to\infty} |A_h| = 0$, obtenim (ii).

Per demostrar la implicació contrària, veiem que si $\mathcal{B}$ no és una base de densitat, aleshores no és cert (ii). Suposem doncs que $\mathcal{B}$ no és una base de densitat. Per tant, existeix un conjunt mesurable A, amb $|A| > 0$, tal que

$$\left|\left\{x \notin A : \overline{D}\left(\int \chi_A, x\right) > 0\right\}\right| > 0.$$

En conseqüència existeix un conjunt $C \subset A'$, on A' denota el complementari de A, amb $|C| > 0$, tal que per a tot $x \in C$, $\overline{D}(\int \chi_A, x) > \lambda$. Sigui $\{G_k\}_k$ una successió no creixent de conjunts oberts tals que $G_k \supset C$ i $\lim_{k\to\infty} |G_k \setminus C| = 0$, i sigui $A_k = G_k \bigcap A$. Com $A_k \subset G_k \setminus C$, clarament $\{A_k\}_k$ és no creixent i $\lim_{k\to\infty} |A_k| = 0$. Prenem una successió no creixent de nombres reals $\{r_k\}_k$ tal que $\lim_{k\to\infty} r_k = 0$. Hem de veure doncs, que $\{M_k\chi_k > \lambda\} \supset C$ per a tot k. En efecte, sigui $x \in C$ i fixem un k. Com $\overline{D}(\int \chi_A, x) > \lambda$, existeix una successió $\{R_h\}_h \subset \mathcal{B}(x)$ amb $\lim_{h\to\infty} R_h = 0$ tal que $R_h \subset G_k$

$$\frac{|R_h \bigcap A|}{|R_h|} > \lambda.$$

Per tant,

$$\frac{|R_h \bigcap A_k|}{|R_h|} > \lambda$$

i $M_k\chi_{A_k}(x) > \lambda$. Això prova que $C \subset \{M_k\chi_k(x) > \lambda\}$ per a tot k i, com $|C| > 0$, tenim que (ii) no és cert. □

Presentem a continuació una simplificació del criteri anterior en el cas que $\mathcal{B}$ sigui una base B-F invariant per homotècies, és a dir, quan $\mathcal{B}$ és tal que si $R \in \mathcal{B}$ aleshores qualsevol homotècia de R pertany també a $\mathcal{B}$. Per a la demostració ens cal el següent lema:

Lema 3.6. *Sigui G un conjunt acotat i obert de $\mathbb{R}^n$ i sigui K un conjunt compacte amb mesura positiva. Sigui $r > 0$. Aleshores existeix una successió disjunta $\{K_k\}_k$ d'homotècies de K contingudes a G i tal que $|G \setminus \bigcup_k K_k| = 0$ i $\delta(K_k) < r$.*

Demostració. Aquest lema és conseqüència del fet que la base $\mathcal{B}_K$ de totes les homotècies de K satisfan el Teorema de Vitali 1.5 □

Teorema 3.7 (Segon Teorema de densitat de Busemann-Feller)**.** *Sigui $\mathcal{B}$ una base B-F invariant per homotècies. Aleshores són equivalents:*

(i) $\mathcal{B}$ és una base de densitat.

(ii) Per a cada $\lambda \in (0,1)$, existeix una constant positiva $c(\lambda) < \infty$ tal que per a tot conjunt acotat i mesurable A tenim

$$\big|\{M\chi_A > \lambda\}\big| \leq c(\lambda)|A|.$$

Demostració. Pel Teorema 3.5 tenim que (ii) implica (i), doncs la segona condició del Teorema 3.5 implica la segona d'aquest.

Per veure que (i) implica (ii), suposem que la segona condició no és certa. Així doncs, si (ii) no es compleix, aleshores existeix $\lambda \in \mathbb{R}$ positiu, és a dir, $\lambda > 0$, tal que per a tot enter $k > 0$ hi ha un conjunt acotat i obert A_k tal que

$$\left|\{M\chi_k > \lambda\}\right| > 2^{k+1}A_k,$$

on $\chi_k = \chi_{A_k}$. I també un nombre positiu r_k tal que

$$\left|\{M_k\chi_k > \lambda\}\right| > 2^{k+1}A_k,$$

on $M_k = M_{r_k}$. Sigui $C_k \subset \{M_k\chi_j > \lambda\}$ compacte tal que $|C_k| > 2^{k+1}|A_k|$. Pel Lema 3.6 podem cobrir el cub unitat Q quasi completament per una successió disjunta $\{C_k^j\}_j$ d'homotècies de C_k tal que si α_{kj} és la raó de la homotècia P_{kj} que porta C_k a C_k^j, aleshores $\alpha_{kj}r_k < 2^{-k}$ per a tot j i k. Sigui $P_{kj}A_k = A_k^j$ i sigui $A = \bigcup_{j,k} A_k^j$. Així doncs,

$$|A| \leq \sum_{j,k} |A_k^j| < \sum_{k,j} 2^{-(k+1)}|C_k^j| = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-(k+1)} \sum_j |C_k^j| = \frac{1}{2}.$$

Veiem ara que, quasi per a tot $x \in Q$, tenim que $\overline{D}(\int \chi_A, x) \geq \lambda > 0$. Per això, veurem que $|A| < 1/2$ implica que A no compleix la propietat de densitat. Fixem k i sigui $x \in C_k$. Aleshores hi ha un $R \in \mathcal{B}(x)$, amb $\delta(R) < r_k$, tal que

$$\frac{\left|R \bigcap A_k\right|}{|R|} > \lambda.$$

Per a tot j, la imatge R^* de R per la homotècia P_{k_j} és tal que $\delta(R^*) < 2^{-k}$ i

$$\frac{|R^* \bigcap A|}{|R^*|} > \lambda.$$

Donat que per a tot k fixat, tenim que quasi tot $x \in Q$ és en algun C_k^j, aleshores per quasi tot $x \in Q$ existeix una successió $\{R_k\}_k$ d'elements de $\mathcal{B}(x)$ que es contrau a x tal que

$$\frac{|R_k \bigcap A|}{|R_k|} > \lambda.$$

Per tant, $\overline{D}(\chi_A, x) \geq \lambda$ quasi en tot Q. □

Amb el següent teorema veiem que la propietat de densitat és, de fet, equivalent a una altra propietat aparentment més forta, la diferenciabilitat de L^∞. Aquest resultat és de Busemann i Feller (1934).

Teorema 3.8. *Sigui $\mathcal{B}$ una base de densitat. Aleshores $\mathcal{B}$ diferencia L^∞.*

Demostració. Suposem, sense pèrdua de generalitat, que per tot x, $0 \leq f(x) \leq H < \infty$. Com la diferenciabilitat de $\int f$ a x és una propietat local, és a dir, només depèn del comportament de f en un entorn de x, podem suposar també que f té un entorn compacte A. Pel Teorema de Luzin [7], donat $\varepsilon > 0$, existeix un compacte $K \subset A$ tal que $|A \setminus K| \leq \varepsilon$ i f és contínua en tal compacte. Sigui $f_K = f_{\chi_K}$ i $f_{A\setminus K} = f_{\chi_{A\setminus K}}$.

Comencem provant que $D(\int f_K, x) = f_K(x)$ quasi per a tot $x \in \mathbb{R}^n$. En efecte, amb $R_k \in \mathcal{B}(x)$ tal que $\lim_{k\to\infty} R_k = x$, tenim que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{|R_k|}\int_{R_k} f_K(y)dy - f_K(x)\right| &\leq \frac{1}{|R_k|}\int_{R_k} |f_K(y) - f_K(x)|dy \\
&= \frac{1}{|R_k|}\left(\int_{R_k\bigcap K} |f_K(y) - f_K(x)|dy + \int_{R_k\setminus K} |f_K(y) - f_K(x)|dy\right) \\
&\leq \frac{1}{|R_k|}\int_{R_k\bigcap K} |f_K(y) - f_K(x)|dy + H\frac{|R_k\setminus K|}{|R_k|}.
\end{aligned}$$

Si $x \in K$, aleshores $f_K(y) \to f_K(x)$ si $y \to x$, $y \in K$ i també l'expressió anterior tendeix a 0 si $k \to \infty$. Si $x \notin K$, aleshores $f_K(x) = 0$ i

$$\frac{1}{|R_k|}\int_{R_k\bigcap K} |f_K(y) - f_K(x)|dy \leq \frac{|R_k\bigcap K|}{|R_k|}.$$

Això, per la propietat de densitat, tendeix a 0 quasi per tots aquests x. Per tant, $D(\int f_K, x) = f_K(x)$ quasi a tot $\mathbb{R}^n$.

Per un $\alpha > 0$ qualsevol, tenim que

$$\begin{aligned}
\left|\left\{x : \left|\overline{D}\left(\int f, x\right) - f(x)\right| > \alpha\right\}\right| &= \left|\left\{x : \left|\overline{D}\left(\int f_{A\setminus K}, x\right) - f_{A\setminus K}(x)\right| > \alpha\right\}\right| \\
&\leq |A\setminus K| + \left|\left\{x : \overline{D}\left(\int f_{A\setminus K}, x\right) > \alpha\right\}\right|.
\end{aligned}$$

Però $|A\setminus K| \leq \varepsilon$ i quasi per a tot $x \in K$ i per a tot $R_k \in \mathcal{B}(x)$, amb $R_k \to x$, tenim que

$$\frac{1}{|R_k|}\int_{R_k} f_{A\setminus K}(y)dy \leq H\frac{|R_k\bigcap(A\setminus K)|}{|R_k|} \to 0$$

per la propietat de densitat. Així doncs, $\overline{D}(\int f, x) = f(x)$ quasi per a tot $x \in \mathbb{R}^n$. Anàlogament es resol $\underline{D}(\int f, x) = f(x)$, quasi per tot $x \in \mathbb{R}^n$. $\square$

3.2 Propietats individuals de diferenciació

Sabent que una base de densitat $\mathcal{B}$ diferencia la integral d'una funció $f \in L^1$, aleshores podem afirmar que l'operador maximal associat a $\mathcal{B}$ satisfà alguna propietat de tipus dèbil. Això és essencialment el contingut del teorema principal d'aquesta secció. Per a poder-ho demostrar ens cal un altre resultat important que afirma que la diferenciació d'integrals de funcions per una base $\mathcal{B}$ es transmet a funcions menors. Aquests resultats els devem a Hayes i Pauc (1955) [11].

Teorema 3.9. *Sigui $\mathcal{B}$ una base de densitat i $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ positiva. Suposem que $\mathcal{B}$ diferencia $\int f$. Sigui g una funció mesurable tal que $0 \leq |g(x)| \leq f(x)$ per a tot $x \in \mathbb{R}^n$. Aleshores $\mathcal{B}$ diferencia $\int g$.*

Demostració. Per un $N > 0$ fixat definim

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) < N \\ 0, & \text{si } f(x) \geq N \end{cases}$$

i sigui f^N tal que $f(x) = f^N(x) + f_N(x)$ per a tot $x \in \mathbb{R}^n$. Per hipòtesis tenim que $D(\int f, x) = f(x)$ quasi per a tot $x \in \mathbb{R}^n$ i també, com $\mathcal{B}$ és una base de densitat, pel Teorema 3.8, $D(\int f_N, x) = f_N(x)$ quasi per a tot $x \in \mathbb{R}^n$. Així doncs tenim que gairebé per a tot $x \in \mathbb{R}^n$, $D(\int f^N, x) = f^N(x)$.

Definim ara
$$g_*(x) = \begin{cases} g(x), & \text{si } f(x) < N \\ 0, & \text{si } f(x) \geq N \end{cases}$$
i g^* tal que $g(x) = g^*(x) + g_*(x)$ per a tot $x \in \mathbb{R}^n$. Per tant, $|g_*(x)| < N$ per a tot $x \in \mathbb{R}^n$ i també, altre cop pel Teorema 3.8, $D(\int g_*, x) = g_*(x)$ quasi per a tot $x \in \mathbb{R}^n$. Donat que $|g^*| \leq f^N$, tenim quasi per a tot x i tota successió $\{R_k(x)\}_k \subset \mathcal{B}(x)$ que es contrau a x
$$\left|\frac{1}{|R_k(x)|}\int_{R_k(x)} g^*(y)dy\right| \leq \frac{1}{|R_k(x)|}\int_{R_k(x)} f^N(y)dy.$$
Aleshores podem escriure per a tot $\alpha > 0$
$$\begin{aligned}\left|\left\{x : \left|\overline{D}\Big(\int g, x\Big) - g(x)\right| > \alpha\right\}\right| &= \left|\left\{x : \left|\overline{D}\Big(\int g^*, x\Big) - g^*(x)\right| > \alpha\right\}\right| \\ &\leq \left|\left\{x : \left|\overline{D}\Big(\int g^*, x\Big)\right| > \frac{\alpha}{2}\right\}\right| + \left|\left\{x : |g^*(x)| > \frac{\alpha}{2}\right\}\right| \\ &\leq \left|\left\{x : \overline{D}\Big(\int f^N, x\Big) > \frac{\alpha}{2}\right\}\right| + \left|\left\{x : f^N(x) > \frac{\alpha}{2}\right\}\right| \\ &= 2\left|\left\{x : f^N(x) > \frac{\alpha}{2}\right\}\right| \leq \frac{4}{\alpha}\int_{\{f\geq N\}} f.\end{aligned}$$
Fent $N \to \infty$ tenim que
$$\frac{4}{\alpha}\int_{\{f\geq N\}} f \longrightarrow 0.$$
Així obtenim que $\overline{D}(\int g, x) = g(x)$ quasi a tot x. Procedint de forma anàloga també tenim que $\underline{D}(\int g, x) = g(x)$, quedant provat així el teorema. $\square$

El següent teorema caracteritza la diferenciació de la integral d'una funció per una base $\mathcal{B}$ en termes similars als del Primer Teorema de densitat de Busemann-Feller 3.5. És vàlid per a qualsevol base $\mathcal{B}$.

Teorema 3.10. *Sigui $\mathcal{B}$ una base de densitat i $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ positiva. Aleshores són equivalents:*

(i) La base $\mathcal{B}$ diferencia $\int f$.

(ii) Per a tot $\lambda > 0$, tota successió $\{f_k\}_k$, amb$f_k \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f_k \leq f$, $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0$ quasi per a tot $x \in \mathbb{R}^n$, i per a tota successió numèrica $\{r_k\}_k$ amb $\lim_{k\to\infty} r_k = 0$, tenim que
$$\lim_{k\to\infty} \left|\{M_k f_k > \lambda\}\right| = 0.$$

(iii) Per a tot $\lambda > 0$, tota no creixent successió de conjunts mesurables $\{A_k\}_k$ amb $\lim_{k\to\infty} |A_k| = 0$ i per a tota successió numèrica $\{r_k\}_k$ amb $\lim_{k\to\infty} r_k = 0$, tenim que
$$\lim_{k\to\infty} \left|\{M_k f_{\chi_{A_k}} > \lambda\}\right| = 0.$$

Demostració. Que (ii) implica (iii) és trivial, prenent $f_k = f_{\chi_{A_k}}$. Veiem que (i) implica (ii). Sigui Q un cub qualsevol obert i $\varepsilon > 0$. Tenim que $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0$ puntualment a Q i també, pel teorema d'Egorov [6], existeix un conjunt mesurable A, amb $|A| < \varepsilon$, tal que $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0$ uniformement a $Q \setminus A$. Per tant, donat $\lambda > 0$, existeix un enter positiu h tal que si $k \geq h$ i $x \in Q \setminus A$, aleshores $f_k(x) < \lambda$. Com hem suposat que $\mathcal{B}$ diferencia $\int f$, pel Teorema 3.9, tenim que $\mathcal{B}$ diferencia $\int f_k$ per a tot k. Per tant, per a tot $x \in Q \setminus A$ i per a tota successió $\{R_j(x)\}_j \subset \mathcal{B}(x)$ que es contrau a x tenim que

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{|R_j(x)|} \int_{R_j(x)} f_h(y)dy = f_h(x) < \lambda.$$

A més,

$$\lim_{k\to\infty} \big\{x \in Q : M_k f_h(x) > \lambda\big\} \subset A.$$

Clarament, si $k \geq h$, com $f_k \leq f_h$, aleshores

$$\big\{x \in Q : M_k f_k(x) > \lambda\big\} \subset \big\{x \in Q : M_k f_h(x) > \lambda\big\}$$

i també

$$\lim_{k\to\infty} \big|\big\{x \in Q : M_k f_k(x) > \lambda\big\}\big| \leq |A| \leq \varepsilon.$$

Com hem pres un cub Q arbitrari, queda demostrat (ii).

Finalment provem que (iii) implica (i). Sigui $A_k = \{f \geq k\}$, per $k = 1, 2, \ldots$ Com $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, tenim que $\lim_{k\to\infty} |A_k| = 0$. Sigui $f_k = f_{\chi_{A_k}}$ i $f^k = f_{\chi_{A'_k}}$, on A'_k denota el complementari de A_k, de forma que $f = f_k + f^k$. Donat que $\mathcal{B}$ és una base de densitat, quasi per a tot x, $D(\int f_k, x) = f_k(x)$. Així doncs, per a tot $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned}
\left|\left\{x : \left|\overline{D}\Big(\int f, x\Big) - f(x)\right| > 2\lambda\right\}\right| &= \left|\left\{x : \left|\overline{D}\Big(\int f^k, x\Big) - f^k(x)\right| > 2\lambda\right\}\right| \\
&\leq \left|\left\{x : \left|\overline{D}\Big(\int f^k, x\Big)\right| > \lambda\right\}\right| + \left|\left\{x : |f^k(x)| > \lambda\right\}\right| \\
&\leq \left|\left\{x : Mf^k(x) > \lambda\right\}\right| + \left|\left\{x : f^k(x) > \lambda\right\}\right|
\end{aligned}$$

Per hipòtesis tenim que

$$\lim_{k\to\infty} \left|\left\{x : Mf^k(x) > \lambda\right\}\right| = 0$$

i, donat que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{k\to\infty} \left|\left\{x : f^k(x) > \lambda\right\}\right| = 0.$$

D'aquesta manera podem concloure que $\overline{D}(\int f, x) = f(x)$ quasi a tot x. Per tant, el teorema és cert, doncs anàlogament obtenim que $\underline{D}(\int f, x) = f(x)$. $\square$

3.3 Propietats de diferenciació per a classes de funcions

En el capítol anterior hem vist exemples de com es poden deduir propietats de diferenciació a partir de desigualtats de tipus dèbil. En aquesta secció veurem resultats en la direcció contrària. El primer d'aquests teoremes caracteritza les bases que diferencien $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 3.11. *Sigui $\mathcal{B}$ una base de diferenciació a $\mathbb{R}^n$. Aleshores són equivalents:*

(i) *La base $\mathcal{B}$ diferencia $L^1(\mathbb{R}^n)$.*

(ii) *Per a tot $\lambda > 0$, tota successió no creixent $\{f_k\}_k$ de funcions de $L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f_k\| \to 0$, i per a tota successió numèrica $\{r_k\}_k$ amb $\lim_{k\to\infty} r_k = 0$, tenim que*

$$\lim_{k\to\infty} \big|\{M_k f_k > \lambda\}\big| = 0.$$

(iii) *Per a tot $\lambda > 0$, tota funció $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, tota successió no creixent de conjunts mesurables $\{A_k\}_k$ tal que $|A_k| \to 0$, i per a tota successió numèrica $\{r_k\}_k$ amb $\lim_{k\to\infty} r_k = 0$, tenim que*

$$\lim_{k\to\infty} \big|\{M_k f_{\chi_{A_k}} > \lambda\}\big| = 0.$$

Demostració. Pel Primer Teorema de densitat de Busemann-Feller 3.5 tenim que si es compleix qualsevol de les tres condicions del teorema, aleshores $\mathcal{B}$ és una base de densitat. Aplicant el Teorema 3.10 obtenim directament el resultat. □

Suposant que la base $\mathcal{B}$ és una base de Busemann-Feller invariant per homotècies, obtenim una simplificació de la condició (ii) de l'anterior teorema.

Teorema 3.12. *Sigui $\mathcal{B}$ una base B-F invariant per homotècies. Aleshores són equivalents:*

(i) *La base $\mathcal{B}$ diferencia L^1.*

(ii) *L'operador maximal M associat a $\mathcal{B}$ és de tipus dèbil; i.e., existeix una constant $c > 0$ tal que per a tota $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i tot $\lambda > 0$ tenim que*

$$\big|\{Mf > \lambda\}\big| \leq c \int \left|\frac{f}{\lambda}\right|.$$

Demostració. Que (ii) implica (i) és conseqüència directa del Teorema 3.11. Demostrem la implicació contrària per reducció a l'absurd. Suposem doncs que $\mathcal{B}$ diferencia L^1 i que no es compleix la condició (ii). Per tant, per a tot $c_k > 0$ existeix una funció $f_k \in L^1$ i un $\lambda_k > 0$ tals que

$$\big|\{Mf_k > \lambda\}\big| > c_k \int \left|\frac{f_k}{\lambda_k}\right|.$$

Sigui $g_k = f_k/\lambda_k$. Prenem una successió $\{c_k\}_k$, tal que

$$\sum_k \frac{1}{c_k} < \frac{1}{2}.$$

Així, existeix una successió numèrica $\{r_k\}_k$, $r_k \to 0$, $r_k > 0$, tal que

$$\big|\{M_{r_k} g_k > 1\}\big| > c_k \int |g_k|.$$

També existeix un compacte $E_k \subset \{M_{r_k} g_k > 1\}$ tal que $|E_k| > c_k \int |g_k|$. Considerem ara el cub unitat Q i un k fixat. Pel Lema 3.6, podem cobrir quasi completament el cub Q mitjançant una successió disjunta $\{E_k^h\}_{h\geq 1}$ d'homotècies de E_k contingudes a Q

i de diàmetre menor que $1/k$. Sigui ρ_k^h l'homotècia que transporta E_k a E_k^h. Definim $g_k^h(\rho_k^h x) = g_k(x)$, $S_k = \sum_{h>1} g_k^h$ i $f = \sup_k S_k$. Tenim que $f \in L^1$ i, clarament,

$$\int |f| < \frac{1}{2}.$$

Però $\overline{D}(\int f, x) \geq 1$ quasi per a tot $x \in Q$. Com $\mathcal{B}$ diferencia L^1, tenim que $f(x) \geq 1$ quasi per a tot $x \in Q$ i, per tant,

$$\frac{1}{2} > \int |f| \geq 1.$$

Arribant a aquesta contradicció queda provat el teorema. $\square$

Capítol 4

La base d'intervals $\mathcal{B}_3$ i la base de rectangles $\mathcal{B}_4$

En els capítols anteriors hem vist algunes propietats importants de la base de diferenciació $\mathcal{B}_3$. A la Secció 2.3 hem demostrat que l'operador maximal M_3 associat a la base $\mathcal{B}_3$ satisfà una desigualtat de tipus dèbil, obtenint que aquesta base diferencia l'espai $L(1+\log^+ L)(\mathbb{R}^n)$. Comencem aquest capítol es presentant algunes propietats importants d'aquesta base.

4.1 La base d'intervals $\mathcal{B}_3$ no satisfà la propietat de Vitali

A Caratheodory [4] apareix un primer contraexemple de Bohr demostrant que la base $\mathcal{B}_3$ no satisfà el Teorema de Vitali 1.5. El següent resultat és una simplificació d'aquell contraexemple.

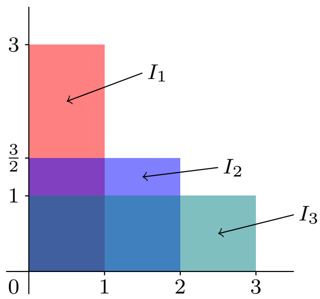


Figura 4.1: Construcció auxiliar per $H = 3$.

Teorema 4.1. *Sigui Q el cub unitat obert a $\mathbb{R}^2$. Aleshores existeix un subconjunt $F \subset Q$, amb $|F| = 1$, tal que per a cada $x \in F$ hi ha una successió $\{I_k(x)\}_k$ d'intervals oberts que contenen i es contrauen a x de forma que per a cada successió disjunta $\{R_k\}_k$ extreta de $\{I_k(x)\}_{x\in F}$ es té*

$$\left| F \setminus \bigcup_k R_k \right| > \frac{1}{2}.$$

Demostració. Comencem la demostració presentant una construcció auxiliar que ens serà de força utilitat més endavant. Sigui H un enter més gran que 1 i considerem a $\mathbb{R}^2$ la col·lecció d'intervals oberts $I_1, I_2, \ldots, I_H$ obtinguts de la següent manera: cada I_j és un interval obert amb un vèrtex a l'origen, un costat paral·lel a l'eix Ox i de llargada j, i un altre paral·lel a l'eix Oy i de llargada H/j. Així l'àrea de I_j és H, la de la intersecció $E = \bigcap_{j=1}^{H} I_j$ és 1, i la de la unió $J_H = \bigcup_{j=1}^{H}$ és $H \cdot (1 + 1/2 + 1/3 + \ldots 1/H) = H\alpha(H)$. A la Figura 4.1 s'exemplifica el cas per $H = 3$.

Considerem una successió decreixent $\{H_k\}_k$ de nombres naturals i fixem un H_i. Pel Lema 3.6 podem cobrir quasi completament el cub unitat Q amb una successió disjunta $\{S_k^i\}_k$ d'homotècies de J_{H_i} de la construcció auxiliar, amb tots els conjunts S_k^i continguts a Q i amb un diàmetre menor que $1/2^i$.

Sigui $\{I_{k,j}^i\}_j$, amb $j = 1, 2, \ldots, H_i$, la successió dels H_i intervals oberts constituint S_k^i homòlegs als intervals I_j de J_{H_i}. Sigui A^i la família de tots els intervals $\{I_{k,j}^i\}_{k,j}$, per $k \geq 1$ i $j = 1, 2, \ldots, H_i$. La unió dels intervals A^i és F^i, amb $|F^i| = |Q| = 1$. Observem que $\{R_h^i\} = \{I_{k_h,j_h}^i\}$ és qualsevol successió disjunta d'intervals de A_i. Aleshores, com tenim que $I_{k,j}^i \bigcap I_{k,m}^i \neq \emptyset$, per $1 \leq j \leq m \leq H_i$, $\{R_h^i\}$ pot contenir com a molt un interval $I_{k,j}^i$ de S_k^i. A més, com per a cada k i cada $j = 1, 2, \ldots, H_i$ tenim

$$\frac{\left|I_{k,j}^i\right|}{\left|S_k^i\right|} = \frac{1}{\alpha(H_i)}$$

i també $\sum_k \left|S_k^i\right| = 1$, podem escriure

$$\sum_{h=1}^{\infty} \left|R_h^i\right| = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\left|I_{k_h,j_h}^i\right|}{\left|S_{k_h}^i\right|} \left|S_{k_h}^i\right| \leq \frac{1}{\alpha(H_i)}.$$

Sigui $F = \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$. Observem que $|F| = 1$. Considerem la família $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Assignem a cada $x \in F$ els intervals $I_k(x) \in A$ que contenen x. Si ara traiem de A una successió disjunta $\{R_k\}_k$, aleshores clarament tenim que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |R_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha(H_k)}.$$

Com

$$\alpha(H_k) = \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{H_k}\right) > \frac{1}{2} \log H_k,$$

podem escollir $\{H_i\}$ de forma que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha(H_i)} < \frac{1}{2},$$

i també

$$\left| F \setminus \bigcup_k R_k \right| > \frac{1}{2}.$$

□

Proposició 4.2. *La base $\mathcal{B}_3$ no diferencia L^1.*

Demostració. La construcció auxiliar usada en l'anterior demostració condueix immediatament a aquest resultat, amb l'ajuda del Teorema 3.12. De la construcció auxiliar, amb les definicions dels conjunts E i J_H i donat que

$$\frac{\left|E \bigcap I_j\right|}{|I_j|} = \frac{1}{H},$$

obtenim que

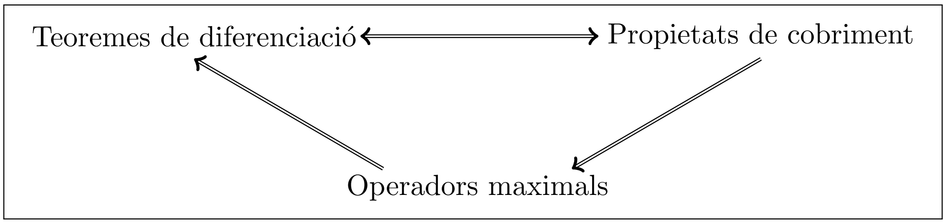
$$\left\{M_2\chi_E > \frac{1}{2H}\right\} \supset J_H.$$

Per tant, per a tot H tenim que

$$\left|\left\{M_2\chi_E > \frac{1}{2H}\right\}\right| \geq H_\alpha(H)|E| \geq H \log H|E|.$$

A més, M_3 no és de tipus dèbil $(1,1)$ i, pel Teorema 3.12, $\mathcal{B}_3$ no diferencia L^1. $\square$

Observació 4.3. Aquest resultat demostra, alhora, que la base $\mathcal{B}_3$ no pot acomplir el Teorema de Vitali 1.5, pel Teorema 1.6. D'aquesta manera tanquem el cercle:



Observació 4.4. En virtut de la Proposició 2.2, els resultats obtinguts en aquesta secció també són certs per a la base de diferenciació $\mathcal{B}_3^*$.

Nota 4.5. Tal com hem vist, la base $\mathcal{B}_3$ no diferencia $L^1(\mathbb{R}^n)$, però sí $L(1+\log^+ L)^{n-1}(\mathbb{R}^n)$. Saks (1935) va demostrar un resultat més fort. Per a "quasi tota" funció $f \in L^1$, "quasi tota" en el sentit de la categoria de Baire [1], es té que $\overline{D}(\int f, x) = +\infty$ per a tot $x \in \mathbb{R}^n$.

4.2 El problema de Kakeya i l'arbre de Perron

La base $\mathcal{B}_4$ dels rectangles oberts de $\mathbb{R}^2$ permet abordar nombrosos problemes interessants de la teoria de diferenciació. La base $\mathcal{B}_4$ inclou a tots els conjunts de la base $\mathcal{B}_3$ i, per tant, aquesta no satisfà el Teorema de Vitali 1.5. Més complicat és demostrar que la base de rectangles no és una base de densitat. Zygmund fou el primer en provar-ho, com a conseqüència d'un conjunt construït per Nikodym (1927). Busemann i Feller (1935) van demostrar-ho també basant-se en una construcció de Besicovitch (1928) per a la solució d'un problema proposat per Kakeya (1917). El problema de Kakeya consisteix en trobar quina és l'àrea mínima d'entre els tots conjunts de $\mathbb{R}^2$ que es poden dibuixar mitjançant el moviment d'una agulla de longitud 1 de forma que al final aquesta ocupi el mateix lloc que a l'inici però en posició inversa. Habitualment se l'anomena el problema de l'agulla i, a la construcció que en dóna la solució, l'arbre de Perron.

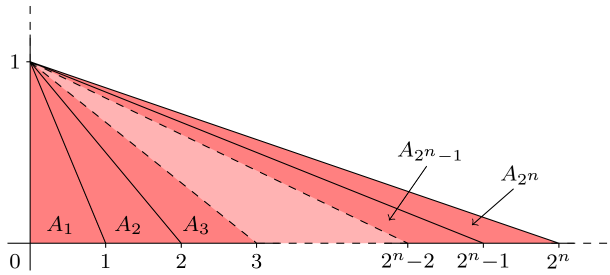


Figura 4.2: Representació del conjunt de triangles oberts $\{A_h\}_{h=1}^{2^n}$.

Teorema 4.6. *Considerem a* $\mathbb{R}^2$ *els* 2^n *triangles oberts* $\{A_h\}_{h=1}^{2^n}$*, on* A_h *és el triangle de vèrtexs* $(0,1)$*,* $(h-1,0)$ *i* $(h,0)$ *(Figura 4.2). Sigui* $1/2<\alpha<1$*. Aleshores existeix una translació per a tot* A_h *paral·lela a l'eix* Ox *a una nova posició* $\overline{A}_h$ *de forma que*

$$\left|\bigcup_{h=1}^{2^n}\overline{A}_h\right| \leq \left(\alpha^{2^n}+2(1-\alpha)\right)\left|\bigcup_{h=1}^{2^n}A_h\right|.$$

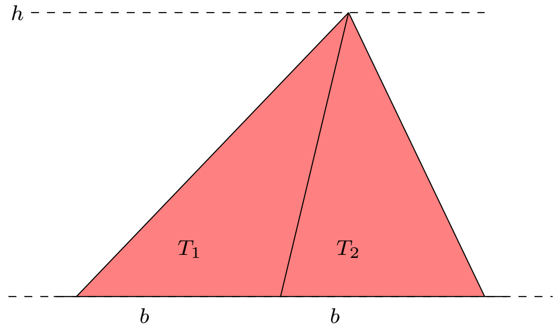


Figura 4.3: Dos triangles adjacents d'alçada h i base b.

Demostració. Considerem el procés següent, el qual anomenarem construcció bàsica: siguin T_1 i T_2 dos triangles adjacents amb base sobre l'eix Ox i longitud b, i alçada h, tal com es mostra a la Figura 4.3. Sigui $0<\alpha<1$ fixat. Mantenint estàtic el triangle T_1, desplacem el triangle T_2 sobre l'eix Ox cap al triangle T_1 a una nova posició T_2^*, fins que els costats no paral·lels dels triangles es tallen en un punt a distància αh de l'eix Ox. La figura resultant està formada per un triangle S, homotècia de la unió de T_1 i T_2, i els dos "triangles sobrants" $\Delta_1 = T_1 \setminus S$ i $\Delta_2 = T_2^* \setminus S$, representada a la Figura 4.4. És fàcil veure que

$$|S| = \alpha^2\left|T_1\bigcup T_2\right|,$$

$$|\Delta_1|+|\Delta_2| = 2(1-\alpha)^2\left|T_1\bigcup T_2\right|$$

i també que

$$\left|T_1\bigcup T_2^*\right| = |\alpha^2+2(1-\alpha)^2|\left|T_1\bigcup T_2\right|.$$

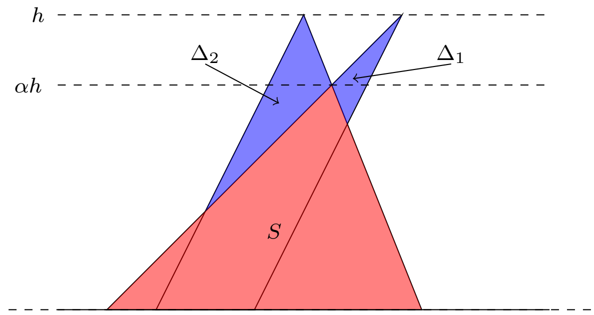


Figura 4.4: Desplacem el triangle T_2.

Amb el α donat a l'enunciat del teorema, apliquem la construcció bàsica a les 2^{n-1} parelles de triangles adjacents $(A_1, A_2), (A_3, A_4), \dots, (A_{2^n-1}, A_{2^n})$. D'aquesta manera obtenim els triangles $S_1, S_2, \dots, S_{2^{n-1}}$ i els triangles sobrants $\Delta_1^1, \Delta_2^1, \Delta_1^2, \Delta_2^2, \dots, \Delta_1^{2^n-1}, \Delta_2^{2^n-1}$. Desplacem ara el triangle S_2 sobre l'eix Ox cap al triangle S_1 a una nova posició $\widetilde{S}_2$, de forma que els triangles S_1 i $\widetilde{S}_2$ siguin adjacents, tal com es pot veure a les Figures 4.5 i 4.6. Fem el mateix desplaçant el triangle S_3 a una nova posició $\widetilde{S}_3$ adjacent a $S_1 \bigcup \widetilde{S}_2$. I així successivament. A cada moviment del triangle S_h, desplacem també els corresponents triangles sobrants Δ_1^h i Δ_2^h. Observem que, de fet, estem movent els triangles $A_2, A_3, \dots, A_{2^n}$ a unes noves posicions $\widetilde{A}_2, \widetilde{A}_3, \dots, \widetilde{A}_{2^n}$. Considerem ara la unió $A_1 \bigcup \widetilde{A}_2 \bigcup \widetilde{A}_3 \bigcup \dots \bigcup \widetilde{A}_{2^n}$. Aquesta figura està formada pels 2^{n-1} triangles $S_1, \widetilde{S}_2, \dots, \widetilde{S}_{2^{n-1}}$, la unió dels quals té una àrea de

$$\alpha^2 \Big| A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3 \bigcup \dots \bigcup A_{2^n} \Big|,$$

més la dels triangles sobrants, la unió dels quals no és major que

$$2(1-\alpha)^2 \Big| A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3 \bigcup \dots \bigcup A_{2^n} \Big|.$$

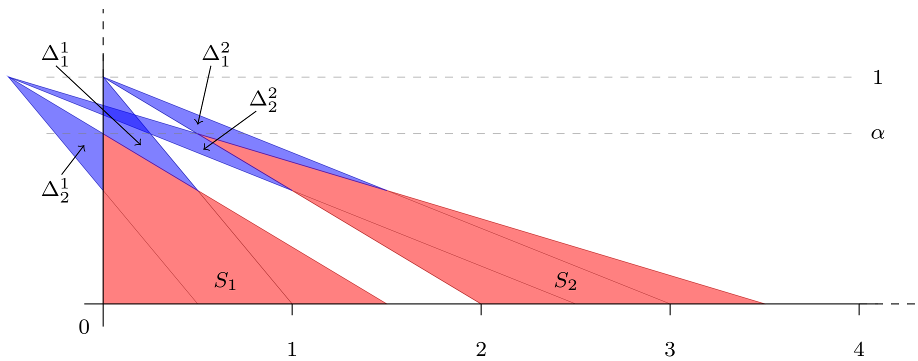


Figura 4.5: Construcció dels triangles S_1, S_2 i els corresponents triangles sobrants.

Els 2^{n-1} triangles $S_1, \widetilde{S}_2, \widetilde{S}_3, \dots, \widetilde{S}_{2^{n1}}$ es troben en la mateixa situació en la que es trobaven els triangles $A_1, A_2, \dots, A_{2^n}$. Així doncs, podem repetir el mateix procés. Iterant

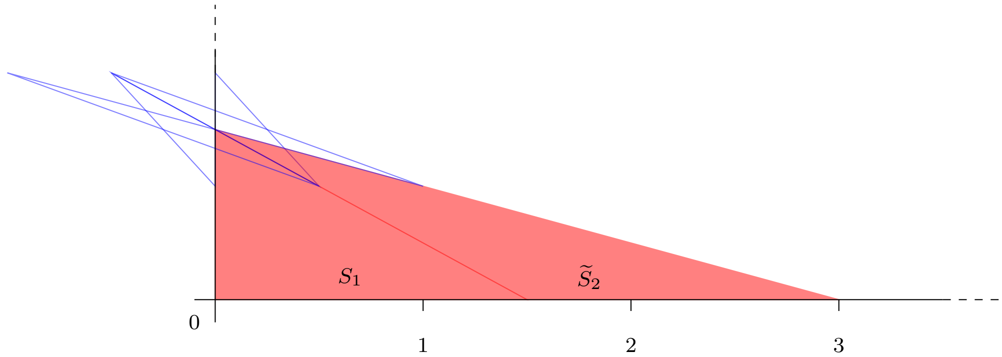


Figura 4.6: Desplacem el triangle S_2.

n vegades obtenim la figura $A_1 \bigcup \overline{A}_2 \bigcup \overline{A}_3 \bigcup \ldots \bigcup \overline{A}_{2^n}$. Aquesta està formada per una homotècia H del conjunt $A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3 \bigcup \ldots \bigcup A_{2^n}$ d'àrea

$$\alpha^{2^n} \left| A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3 \bigcup \ldots \bigcup A_{2^n} \right|$$

més uns triangles addicionals, la unió dels quals té una àrea no superior a

$$\left| \bigcup_{h=1}^{2^n} A_h \right| \Big(2(1-\alpha)^2 + 2\alpha^2(1-\alpha)^2 + 2\alpha^4(1-\alpha)^2 + \ldots + 2\alpha^{2(n-1)}(1-\alpha)^2 \Big).$$

Per tant, si prenem $A_1 = \overline{A}_1$, aleshores

$$\left| \bigcup_{h=1}^{2^n} \overline{A}_h \right| \leq \left(\alpha^{2n} + 2(1-\alpha)^2 \frac{1}{1-\alpha^2} \right) \left| \bigcup_{h=1}^{2^n} A_h \right| < |\alpha^{2^n} + 2(1-\alpha)| \left| \bigcup_{h=1}^{2^n} A_h \right|.$$

□

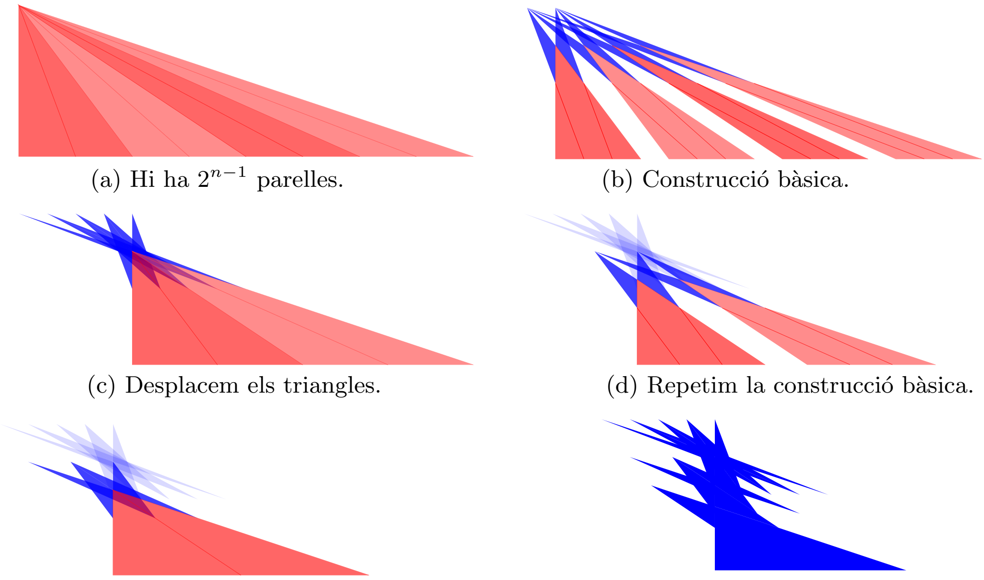
Observem que podem usar una transformació afí en la situació del Teorema 4.6 de manera que tinguem una estructura més flexible.

Teorema 4.7 (Arbre de Perron)**.** *Considerem un triangle de vèrtexs A, B i C i àrea H. Donat un $\varepsilon > 0$ qualsevol, existeix una partició de la base del triangle BC en 2^n parts $I_1, I_2, I_3, \ldots, I_{2^n}$, de forma que els triangles $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_{2^n}$ de bases $I_1, I_2, I_3, \ldots, I_{2^n}$ i vèrtex comú A, es poden moure al llarg de BC a unes noves posicions $\overline{T}_1, \overline{T}_2, \overline{T}_3, \ldots, \overline{T}_{2^n}$ tals que*

$$\left| \overline{T}_1 \bigcup \overline{T}_2 \bigcup \overline{T}_3 \bigcup \ldots \bigcup \overline{T}_{2^n} \right| < \varepsilon H.$$

Demostració. Prenem α tal que $0 < \alpha < 1$, $2(1-\alpha) < \varepsilon/2$, i n tal que $\alpha^{2n} < \varepsilon/2$. Obtenim el resultat aplicant el Teorema 4.6 amb aquest n i α, i una transformació afí ρ que transporta $(0,1)$ a A, $(0,0)$ a B i $(2^n, 0)$ a C. Així $\rho(A_h) = T_h$ i $\rho(\overline{A}_h) = \overline{T}_h$, per $h = 1, 2, \ldots, 2^n$. □

Anomenem *Arbre de Perron* al conjunt $\bigcup_{h=1}^{2^n} \overline{T}_h$, degut a les ramificacions produïdes pels triangles sobrants. A la Figura 4.7 està representada la construcció de l'arbre de Perron per $n = 3$. Amb l'anterior resultat obtenim fàcilment la solució al problema de l'agulla.



(a) Hi ha 2^{n-1} parelles.

(b) Construcció bàsica.

(c) Desplacem els triangles.

(d) Repetim la construcció bàsica.

(e) Desplacem els triangles altre cop.

(f) Última iteració.

Figura 4.7: Construcció de l'arbre de Perron per $n = 3$ i $\alpha = 0.75$.

Teorema 4.8 (L'agulla de Kakeya)**.** *Donat $\eta > 0$ i un segment rectilini AB de longitud 1 a $\mathbb{R}^2$, és possible construir una figura F d'àrea menor que η tal que podem moure el segment per dins de F de forma que al final el segment ocupi el mateix lloc però en posició inversa.*

Demostració. Veiem primer que podem moure de forma contínua un segment des d'una recta a una altra de paral·lela, escombrant al seu pas una àrea tan petita com desitgem. Tal com es mostra a la Figura 4.8 és possible moure el segment AB a una nova posició $\widetilde{A}\widetilde{B}$ escombrant el tros d'àrea de color vermell, i que aquesta àrea es pot fer tan petita com vulguem prenent el segment AB_3 suficientment llarg.

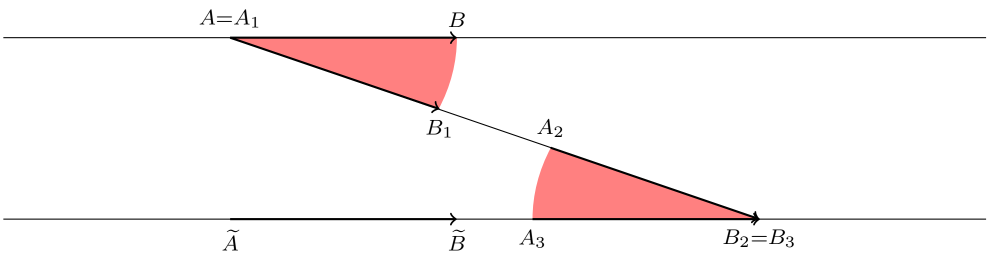


Figura 4.8: Transportem el segment AB a una recta paral·lela.

Veiem ara com el segment AB es pot moure a una recta formant un angle de 60° dins d'una figura amb àrea menor que $\eta/6$. Amb sis repeticions obtenim la figura F del teorema. Sigui MNP un triangle equilàter d'àrea igual a 10 situat de tal manera que el segment AB es troba a l'interior de MN. Observem que l'alçada de MNP és major que 1. Apliquem el Teorema 4.7 al triangle MNP prenent com a base NP i amb ε tal que $10\varepsilon < \eta/12$. Obtenim els triangles $\overline{T}_1, \overline{T}_2, \ldots, \overline{T}_{2^n}$. Així, podem moure el segment AB de forma contínua dins de $\overline{T}_1$ des de MN a l'altre costat de $\overline{T}_1$, que no és NP. D'aquí, el podem moure al costat paral·lel a aquest de $\overline{T}_2$ escombrant una àrea menor que $\eta/(12 \cdot 2^n)$. Anàlogament movem de forma contínua el segment dins de $\overline{T}_2$ cap al costa que no és NP, i d'aquí al triangle $\overline{T}_3$. Etcètera. L'àrea escombrada en aquest procés és menor que $\eta/6$, i l'agulla és al final sobre una recta que forma un angle de $60°$ respecte la posició original. □

4.3 La base de rectangles $\mathcal{B}_4$ no és una base de densitat

Amb els resultats obtinguts a la secció anterior es dedueix de forma immediata que la base $\mathcal{B}_4$ no és una base de densitat. Veurem, però, un resultat una mica més fort.

Teorema 4.9. *Existeix una base de diferenciació $\mathcal{B}$ de Busemann-Feller invariant per homotècies generada per una successió de rectangles $\{R_k\}_k$, que no és de densitat.*

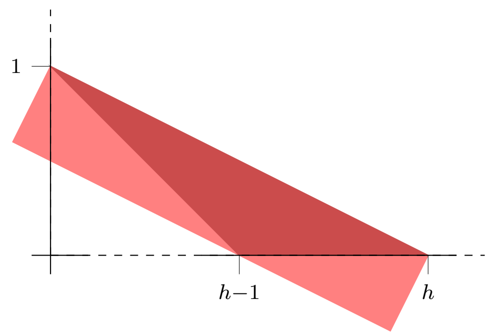


Figura 4.9: Construcció del rectangle obert R_h.

Demostració. Comencem la demostració construint la base $\mathcal{B}$. Si A_h és el triangle descrit al Teorema 4.6, sigui R_h el rectangle obert que té un dels costats al segment que uneix els punts $(0,1)$ i $(h,0)$, i tal que el costat paral·lel a aquest conté el punt $(h-1)$, tal com es mostra a la Figura 4.9.

Considerem ara la mínima base B-F $\mathcal{B}$ invariant per homotècies que conté tots els rectangles R_h, amb $h = 1, 2, \ldots$ Juntament amb $\mathcal{B}$ considerem ara la mínima base B-F $\overline{\mathcal{B}}$ invariant per homotècies que conté tots els triangles A_h, amb $h = 1, 2, \ldots$ Si M és l'operador maximal associat a $\mathcal{B}$ i $\overline{M}$ l'associat a $\overline{\mathcal{B}}$, com $|R_h| = 2|A_h|$, per a tota $f \in L^1$ i per a tot h tenim que

$$\frac{1}{|A_h|}\int_{A_h}|f| \leq \frac{2}{|R_h|}\int_{R_h}|f|.$$

Així doncs, per a tot $x \in \mathbb{R}^2$ es compleix que

$$\overline{M}f(x) \leq 2Mf(x).$$

Com $\mathcal{B}$ és una base de diferenciació invariant per homotècies, podem aplicar el criteri donat al Teorema 3.7. D'aquesta manera serà suficient provar que existeix un $0 < \lambda < 1$

tal que per a tota constant positiva N, podem construir un conjunt acotat i mesurable K tal que

$$\left|\{M\chi_K > \lambda\}\right| > N|K|.$$

Com $M\chi_K \geq \overline{M}\chi_K/2$, n'hi haurà prou de construir K de forma que

$$\left|\{\overline{M}\chi_K > 2\lambda\}\right| > N|K|.$$

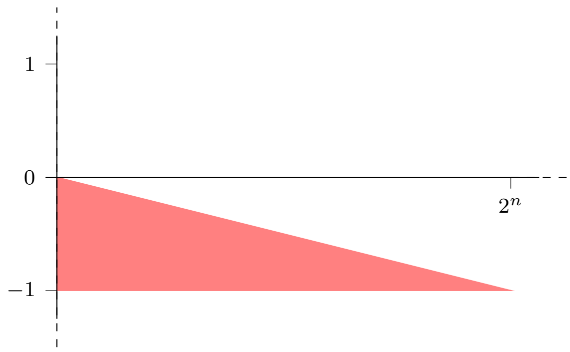


Figura 4.10: Triangle V.

Prenem $\lambda = 1/16$, fixem un N qualsevol i considerem la construcció feta en el Teorema 4.6. Sigui $K = \bigcup_{h=1}^{2n} \overline{A}_h$. A continuació veiem que tots els punts del triangle V delimitat pels punts $(0,0)$, $(0,-1)$ i $(2^n,-1)$ (Figura 4.10), pertanyen al conjunt $\{\overline{M}\chi_K > 1/8\}$. Un cop haguem demostrat això, podrem escriure

$$\left|\left\{M\chi_K > \frac{1}{16}\right\}\right| \geq \left|\left\{\overline{M}\chi_K > \frac{1}{8}\right\}\right| \geq |V| = \left|\bigcup_{h=1}^{2^n} A_h\right| \geq \left(\alpha^{2n} + 2(1-\alpha)\right)^{-1}|K|,$$

de forma que n'hi haurà prou d'escollir α i n tals que

$$\left(\alpha^{2n} + 2(1-\alpha)\right)^{-1} > N,$$

per obtenir que $\left|\{M\chi_K > 1/16\}\right| > N|K|$ i demostrar el teorema.

Per demostrar que efectivament $V \subset \left\{\overline{M}\chi_K > 1/8\right\}$, n'hi prou amb veure que per a tot $x \in V$ existeix un triangle $\overline{A}_h$, amb $1 \leq h \leq 2^n$, tal que la homotècia $\overline{\overline{A}}_h$ de $\overline{A}_h$ amb centre al vèrtex superior de $\overline{A}_h$ i el doble de mida, conté x. Si això passa, clarament tindrem que

$$\overline{M}\chi_K(x) \geq \frac{\left|K \bigcap \overline{\overline{A}}_h\right|}{|\overline{\overline{A}}_h|} = \frac{|\overline{A}_h|}{|\overline{\overline{A}}_h|} = \frac{1}{4} > \frac{1}{8}.$$

Observem la situació dels triangles $\overline{A}_,\overline{A}_2,\ldots,\overline{A}_{2^n}$, la seva base i els costats laterals, tal com es mostra a la Figura 4.11. La base B_2C_2 es solapa amb la base B_1C_1, la B_3C_3 es solapa amb la base B_2C_2,.... El costat M_2B_2 és paral·lel al costat M_1C_1, el costat M_3B_3 és paral·lel al costat M_2C_2. Etcètera. Clarament tenim doncs que V compleix la propietat que buscàvem. $\square$

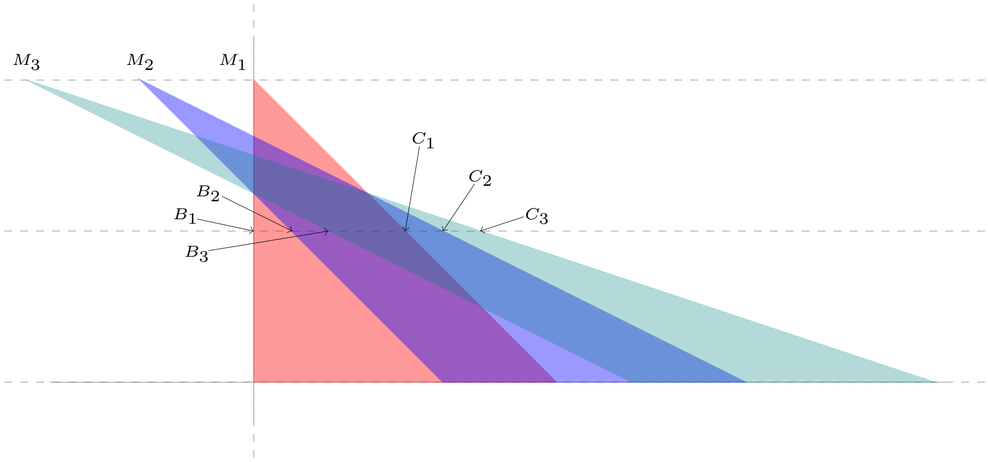


Figura 4.11: Representació dels triangles $\overline{A}_h$.

4.4 El conjunt de Nikodym

Nikodym (1927) va presentar la construcció d'un conjunt N, el qual anomenarem *Conjunt de Nikodym*, contingut al quadrat unitat de $\mathbb{R}^2$, amb $|N| = 1$ i tal que per a tot $x \in N$ hi ha una recta $r(x)$ tal que $r(x) \bigcap N = \{x\}$. La construcció de Nikodym és totalment elemental, però extremadament complicada.

Teorema 4.10 (Conjunt de Nikodym)**.** *Existeix un conjunt $K \subset \mathbb{R}^2$ de mesura 0 tal que per a tot $x \in \mathbb{R}^2$ hi ha una recta $r(x)$ que passa per x i tal que $r(x) \subset K \bigcup \{x\}$.*

El conjunt de Nikodym és una simple conseqüència d'aquest teorema: si Q és el quadrat unitat i $N = Q \setminus K$, aleshores $|N| = 1$ i per a cada $x \in N$ la recta $r(x)$ compleix $r(x) \bigcap N = \{x\}$. La demostració del Teorema 4.10 està basada en dos lemes.

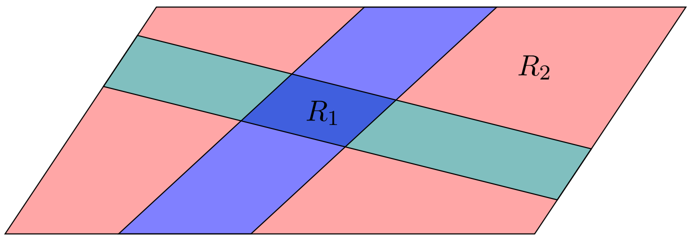


Figura 4.12: Les dues cintes tancades determinades per R_1.

Lema 4.11. *Siguin R_1 i R_2 dos paral·lelograms tancats de $\mathbb{R}^2$ tals que $R_1 \subset R_2$. Sigui ω una de les dues cintes tancades determinades per R_1 (Figura 4.12). Sigui $\varepsilon > 0$. Aleshores existeix una col·lecció finita de cintes tancades $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k\}$ tal que*

(i) *Per a tot $1 \leq i \leq k$, $\omega_i \bigcap R_2 \subset \omega \bigcap R_2$.*

(ii) *El paral·lelogram $R_1 \subset \bigcup_{i=1}^{k} \omega_i$.*

(iii) *Es compleix la desigualtat $\left|\left(\bigcup_{i=1}^{k} \omega_i\right) \bigcap \left(R_2 \setminus R_1\right)\right| \leq \varepsilon$.*

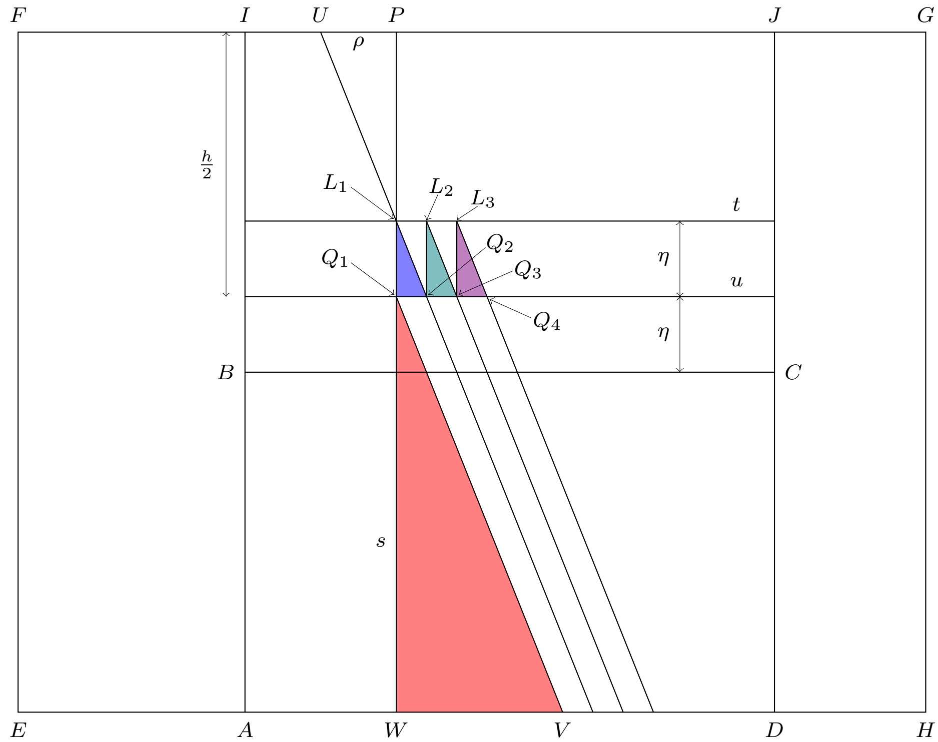


Figura 4.13: Construcció dels rectangles R_1 i R_2.

Demostració. Començarem la demostració suposant que R_1 i R_2 són rectangles. Siguin A, B, C i D els vèrtexs de R_1 i E, F, G i H els de R_2, de forma que el costat AD de R_1 es troba sobre el costat EH de R_2 i tals que ω és la cinta determinada pels dos costats de R_1 perpendiculars a AD. Dibuixem les rectes s i t, perpendicular i paral·lela a BC respectivament, de tal manera que l'àrea determinada per s i BI dins $BIJC$ és menor que $\varepsilon/8$ i l'àrea determinada per t i BC dins $BIJC$ és també menor que $\varepsilon/8$. Sigui u la recta paral·lela a t que és a la mateixa distància de t i de BC, i η la distància entre t i u. A la Figura 4.13 està representada aquesta construcció.

Sigui L_1 la intersecció de les rectes s i t, i Q_1 la intersecció de u i s. Prenem ara un punt U entre P i I, a una distància ρ de P, el qual deixarem fixat convenientment més endavant. De moment serà suficient amb que la recta UL_1 intersequi, quan la prolonguem, el segment AD i que l'angle UL_1P sigui menor que $45°$. La recta UL_1 determina el punt Q_2 sobre u, obtenint així un primer triangle $L_1Q_1Q_2$. Dibuixem una recta passant per Q_2 i que és paral·lela a s, i sigui L_2 la intersecció amb t. Si la recta que passa per L_2 i paral·lela a L_1Q_2 creua el segment AD la dibuixem, de forma que obtenim el triangle $L_2Q_2Q_3$. Si aquesta recta no creua AD, aleshores en el seu lloc prenem L_2D, obtenint el triangle $L_2Q_2Q_3$. I així seguim anàlogament. Després d'un nombre finit de passos k, Q_{k+1} es troba per primer cop dins de la meitat dreta de la cinta ω determinada per R_1.

Sigui $h/2$ la distància entre u i FG. Sigui A una homotècia del triangle $L_1Q_1Q_2$ d'alçada h. Amb un α i un n convenientment triats, apliquem la construcció seguida en el Teorema 4.6. El nostre objectiu és procedir de tal manera que el triangle final H, homotècia de A, sigui precisament $L_1Q_1Q_2$. Així doncs, hem de prendre $\alpha^n h = \eta$. Després

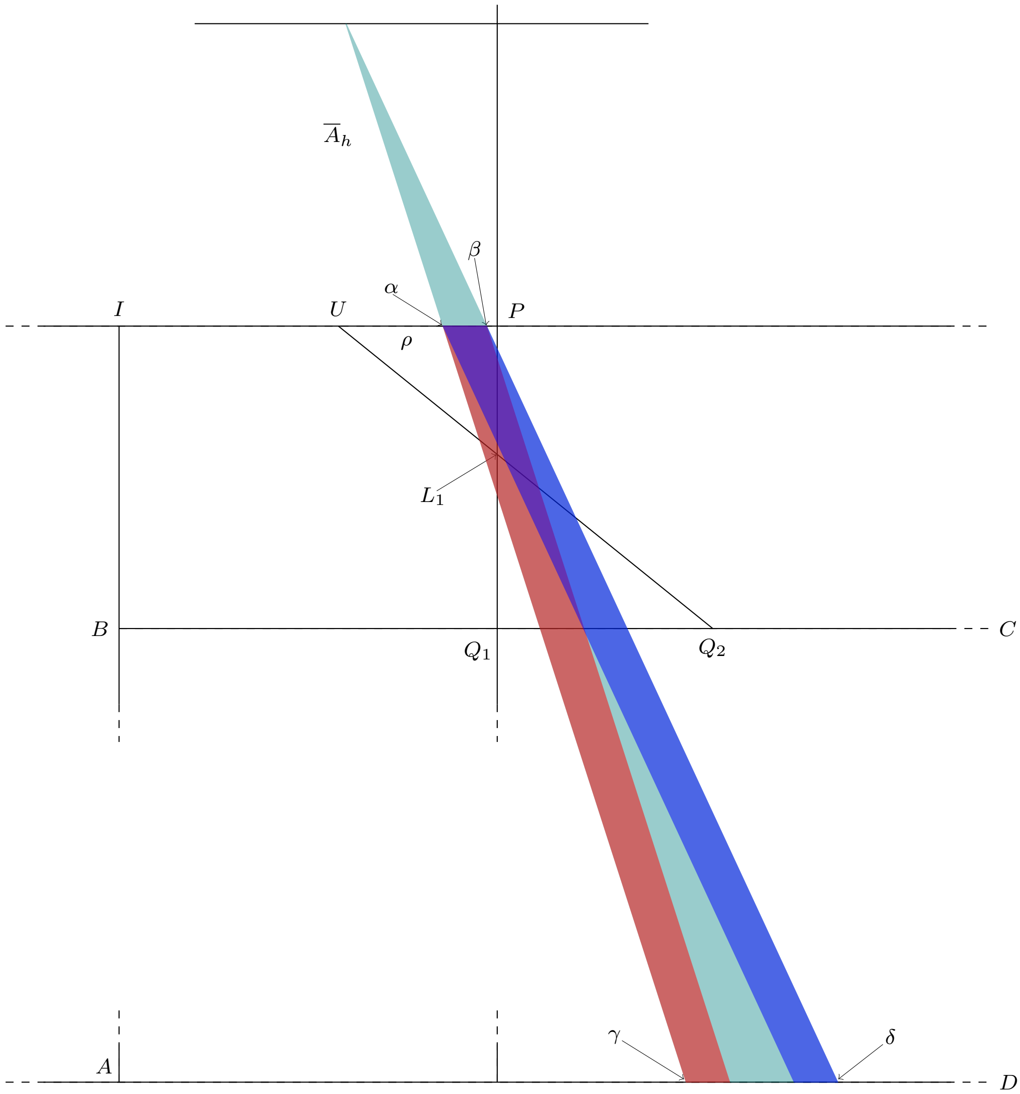


Figura 4.14: Detall de la construcció de les cintes.

d'aplicar el procés del Teorema 4.6, els triangles $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2^n}$ de A formen la figura $\overline{A}_1 \bigcup \overline{A}_2 \bigcup \overline{A}_3 \bigcup \ldots \bigcup \overline{A}_{2^n}$, el corresponent arbre de Perron format per $H = L_1Q_1Q_2$ més els triangles sobrants, la unió dels quals té una àrea menor que

$$2(1-\alpha)|A| = 2\left(1 - \left(\frac{\eta}{h}\right)^{1/n}\right)\frac{1}{2}h^2 \tan \widehat{Q_1L_1Q_2} \leq \left(1 - \left(\frac{\eta}{h}\right)^{1/n}\right)h^2.$$

Això es pot fer menor que $\varepsilon/8k$ si n és suficientment gran, recordem que k és el nombre de triangles $L_iQ_iQ_{i+1}$ que hem definit. Per a cada triangle desplaçat $\overline{A}_h$ seleccionem un nombre finit de cintes tal com s'indica a la Figura 4.14, ampliació de la Figura 4.13. Siguin α i β els punts d'intersecció dels dos costats laterals de $\overline{A}_h$ amb FG, i γ i δ els punts d'intersecció d'aquests costats amb AD. Aleshores cobrim el segment tancat $\gamma\delta$ amb un nombre finit de segments tancats de longitud igual que el segment $\alpha\beta$ i continguts a $\gamma\delta$, i llavors considerem les cintes tancades obtingudes per la unió de α i β amb els

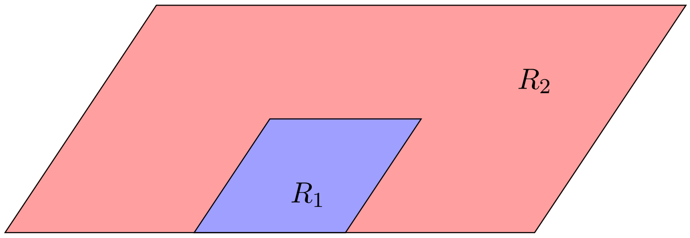


Figura 4.15: Aquests dos paral·lelograms compleixen les tesis del Lema 4.11.

extrems d'aquests segments. Per construcció, aquestes cintes cobreixen el triangle Q_1WV de la Figura 4.13. La intersecció de cada una d'aquestes cintes amb R_2 està continguda a la cinta ω determinada per R_1, només si el segment Q_1Q_2 és menor que UI, i això és cert si triem ρ convenientment. De fet, observem que tots els triangles $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3, \ldots, \overline{A}_{2^n}$ tenen les bases dins de Q_1Q_2 i els seus costats tenen direccions dins l'angle $Q_1L_1Q_2$. Així doncs, el costat esquerre de cada una d'aquestes cintes que hem definit, interseca FG a una distància de U al cantó esquerre de U menor que la longitud de Q_1Q_2. L'àrea determinada per la unió d'aquestes cintes entre t i FG és menor que la de la unió dels corresponents triangles desplaçats, és a dir, $\varepsilon/8k$.

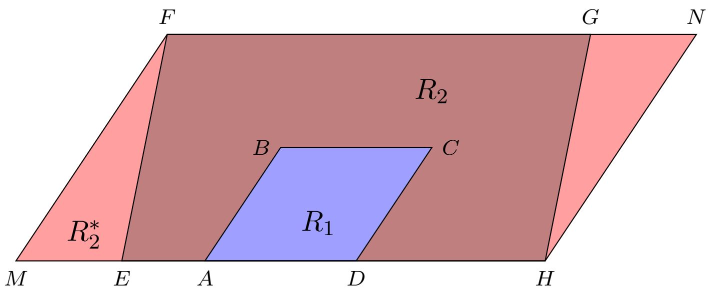


Figura 4.16: Una transformació afí ens permet aplicar el lema a R_1 i R_2.

Apliquem el mateix procés a $L_2Q_2Q_3, L_3Q_3Q_4, \ldots, L_kQ_kQ_{k+1}$ obtenint així un nombre finit de cintes la unió de les quals cobreix la meitat esquerre de R_1. Cada una d'aquestes cintes és tal que la seva intersecció amb R_2 és a ω. La intersecció de la unió d'aquestes cintes amb el conjunt entre t i FG té una àrea menor que $\varepsilon/8$. Com que l'àrea entre t i BC dins de ω és menor que $\varepsilon/8$, la unió de totes les cintes que hem definit intersecades amb $R_2 \setminus R_1$ té una àrea menor que $\varepsilon/4$. Afegim a les cintes la determinada per AI i WP. Prenem també totes les cintes simètriques a les que tenim respecte a línia mitjana entre AB i DC. I ja tenim la nostra col·lecció de cintes $\Omega = \{\omega_1, \omega_, \ldots, \omega_k\}$ que satisfà les tres propietats del lema. Així doncs, el lema és cert si R_1 i R_2 són paral·lelograms com els de la Figura 4.15.

Veiem ara que podem eliminar la hipòtesis de que R_1 i R_2 són rectangles, mitjançant una transformació afí. Suposem doncs que R_1 i R_2 són els paral·lelograms $ABCD$ i $EFGH$, representats a la Figura 4.16. Sigui $R_2^* = MFNH$ un paral·lelogram tal que el costat NF sigui paral·lel a AB, el costat AD de R_1 es trobi sobre MH i $R_2 \subset R_2^*$. Així doncs, el lema és cert per R_1 i R_2^*. És fàcil veure que les mateixes cintes que obtenim per R_1 i R_2 compleixen les tres propietats del lema.

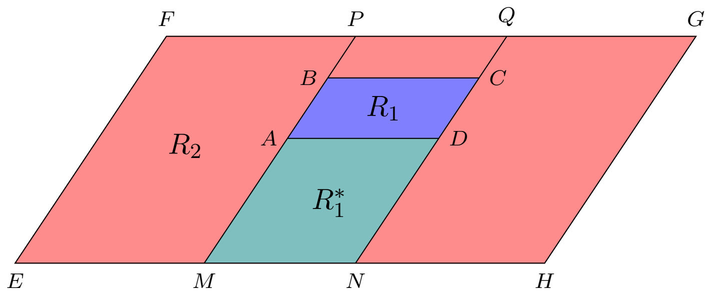


Figura 4.17: Apliquem el lema a R_1^* i R_2 amb $\varepsilon/2$.

Suposem ara que R_1 i R_2 són paral·lelograms com els d la Figura 4.17, amb AB paral·lel a EF i CD a GH. Apliquem el lema a $R_1^* = MBCN$ i R_2 amb $\varepsilon/2$. Cada una de les cintes $\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2, \dots, \widetilde{\omega}_k$ es troba en la situació de la Figura 4.18. D'aquesta manera podem aplicar el lema a cada un dels paral·lelograms $\widetilde{\omega}_i \bigcap APQD$ i R_2 amb $\varepsilon/2k$ obtenint per a cada $i = 1, 2, \dots, k$ les cintes $\{\omega_i^j\}_j$, amb $j = 1, 2, \dots, r_i$. La col·lecció Ω de totes les cintes ω_i^j clarament satisfà les propietats del lema.

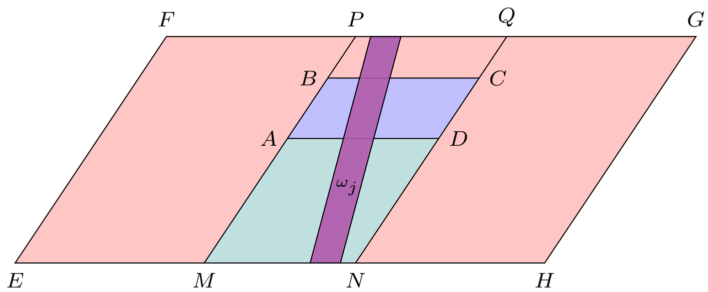


Figura 4.18: Aplicant el lema a R_1^* i R_2 obtenim la cinta ω_j.

Finalment, si R_1 i R_2 es troben en la situació general del lema, podem substituir R_2 per un altre paral·lelogram R_2^*, amb $R_2 \subset R_2^*$, amb els costats paral·lels als de R_1. Les cintes obtingudes aplicant el lema a R_1 i R_2^* també són vàlides per R_1 i R_2. $\square$

El segon lema que usarem en la demostració del Teorema 4.10 és conseqüència directe del que acabem de demostrar.

Lema 4.12. *Siguin R_1 i R_2 dos paral·lelograms tancats tals que $R_1 \subset R_2$. Sigui Ω una col·lecció finita de cintes tancades, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$, tal que $\bigcup_{i=1}^k \omega_k = R_1$. Aleshores per a cada cinta ω_i, $i = 1, 2, \dots, k$, podem construir una altra col·lecció finita de cintes tancades $\omega_i^1, \omega_i^2, \dots, \omega_i^{j_i}$ tal que*

(i) El conjunt de totes les cintes cobreix R_1; i.e., $R_1 \subset \bigcup\{\omega : \omega \in \Omega^*\}$.

(ii) Per a tot i i j, $\omega_i^j \bigcap R_2 \subset \omega_i$.

(iii) Es compleix que $\left|\left(\bigcup\{\omega : \omega \in \Omega^*\}\right) \bigcap (R_2 \setminus R_1)\right| \leq \varepsilon$.

Amb aquests dos lemes ja podem fer la demostració del conjunt de Nikodym.

Demostració del Teorema 4.10. Sigui $H > 0$ i $Q(H)$ el quadrat tancat amb centre a l'origen, de costat $2H$ i amb els costats paral·lels als eixos de coordenades. Apliquem el Lema 4.11 a $R_1 = Q(1)$ i $R_2 = Q(2)$ amb $\varepsilon_1/4 > 0$, que fixarem més endavant. Obtenim la col·lecció de cintes finita Ω_1. Dividim Q en quatre quadrats tancats iguals i de costat la meitat que Q. Denotem aquests quadrats Q_1^i, per $i = 1, 2, 3, 4$. Fixem i i apliquem el Lema 4.12 amb $R_1 = Q_1^i$, $R_2 = Q(3)$, $\Omega = \Omega_1$ i $\varepsilon = \varepsilon_2/4^2 > 0$. D'aquesta manera obtenim una col·lecció Ω^* de cintes tancades, que anomenem Ω_2^i. Considerem ara el conjunt

$$\Omega_2 = \bigcup_{i=1}^{4} \Omega_2^i.$$

Dividim cada Q_1^i en quatre quadrats tancats iguals i de costat la meitat que Q_1^i, de forma que obtenim 4^2 quadrats Q_2^i, amb $i = 1, 2, \ldots, 4^2$. Fixem i i tornem a aplicar el Lema 4.12 amb $R_1 = Q_2^i$, $R_2 = Q(4)$, $\Omega = \Omega_2$ i $\varepsilon = \varepsilon_3/4^2 > 0$. De forma que obtenim la col·lecció Ω^*, que anomenem Ω_2^i i escrivim

$$\Omega_3 = \bigcup_{i=1}^{4^2} \Omega_3^i.$$

Etcètera.

Observem que per un k fixat, la unió de totes les cintes de Ω_k^i cobreix el quadrat Q_{k-1}^i. Per a cada $\omega \in \Omega_k^i$ definim $\vartheta = \overline{\omega \setminus Q_{k-1}^i}$ i sigui $K_k = \bigcup\{\widehat{\omega} : \omega \in \Omega_k\}$. Així doncs tenim que, per la construcció de Ω_k^i i pel Lema 4.12,

$$\left| \left(\bigcup\{\widehat{\omega} : \omega \in \Omega_k\} \right) \bigcap Q(k+1) \right| \leq \frac{\varepsilon_k}{4^k}$$

i, per tant, $\left|K_k \bigcap Q(k)\right| \leq \varepsilon_k$, per a cada ε_k. Definim

$$K^* = \bigcup_{h=1}^{\infty} \bigcap_{k=h}^{\infty} K_k.$$

Amb $\varepsilon_k \to 0$ tenim que $|K^*| = 0$. En efecte, si fixem N i h, i prenem j tal que $j > h$ i $j > N$, obtenim que

$$\left| \left(\bigcap_{k=h}^{\infty} K_k \right) \bigcap Q(N) \right| \leq \left| K_j \bigcap Q(j) \right| \leq \varepsilon_j.$$

Així obtenim que

$$\left| \left(\bigcap_{k=h}^{\infty} K_k \right) \bigcap Q(N) \right| = 0.$$

Com això és cert per a tot N, tenim que $\left|\bigcap_{k=h}^{\infty} K_k\right|$ per a tot h i, per tant, $|K^*| = 0$.

Veiem ara que per a cada $x \in Q(1)$ existeix una recta $r(x)$ que passa per x i continguda a $K^* \bigcup\{x\}$. Sigui $x \in Q(1)$ fixat i siguin $\{Q_n^{j(x,n)}\}_n$, per $n = 1, 2, 3, \ldots$ una successió que es contrau dels quadrats que hem construït de forma que $x \in Q_n^{j(x,n)}$ per a tot n. Per $n = 1$ prenem una cinta $\omega_1 \in \Omega_1^{j(x,1)}$ que contingui x. Per $n = 2$ prenem una cinta $\omega_2 \in \Omega_2^{j(x,2)}$ que contingui x i tal que $\omega_2 \bigcap Q(2) \subset \omega_1$. I així iterativament. Per $n = k$ hi ha alguna cinta $\omega_k \in \Omega_k$ que conté x i tal que $\omega_k \bigcap Q(k) \subset \omega_{k-1}$. Per tant, existeix una successió de rectes $\{r_k(x)\}_k$ que passen per x i tals que $r_k(x) \subset \omega_k$. Com $\varepsilon_k \to 0$, l'amplada de les cintes ω_k tendeix a zero i com $\omega_k \bigcap Q(k) \subset \omega_{k-1}$, tenim que la direcció de les rectes $\{r_k(x)\}_k$ convergeix a la direcció d'una recta $r(x)$ que passa per x.

Provem ara que $r(x) \subset K^* \bigcup \{x\}$. Sigui $y \in r(x)$, $y \neq x$. Aleshores existeix un natural N tal que, si $n \geq N$ tenim que

$$y \notin Q_n^{j(x,n)} \quad \text{i} \quad y \in \mathring{Q}(n).$$

Prenem ara una successió de punts $\{y_k\}_k$ tal que $y_k \in r_k(x)$ i convergent a y. Així existeix un M tal que, si $k \geq M$ tenim que

$$y_k \in Q(N) \setminus Q_N^{j(x,N)}.$$

Si $i > n \geq \max(M, N)$, podem escriure

$$y_i \in r_i(x) \bigcap Q(N) \subset \omega_i \bigcap Q(n) \subset \omega_n.$$

Com $y_i \notin Q_N^{j(x,N)}$ tenim també que $y_i \notin Q_n^{j(x,n)}$. Per tant, $y_i \in \widehat{\omega}_n$. Així doncs, hem provat que, per a un $n \geq \max(M, N)$ fixat, tenim que $y_i \in \widehat{\omega}_n$ per a tot $i > n$. Donat que $\widehat{\omega}_n$ és un tancat, $y \in \widehat{\omega}_n$. Per tant, $y \in K^*$ i que demostrat que $r(x) \subset K^* \bigcup \{x\}$.

Observem que el procés que acabem de descriure es pot realitzar per a qualsevol interval quadrat Q, no necessàriament igual a Q(1). Això és, donat Q existeix K^* tal que $|K^*| = 0$ i per a tot $x \in Q$ hi ha una recta $r(x)$ que passa per x i tal que $r(x) \subset K^* \bigcup \{x\}$. Apliquem ara això a $Q_1 = Q(1), Q_2(2), \ldots, Q_k(k), \ldots$, obtenint $K_1^*, K_2^*, \ldots, K_k^*, \ldots$ El conjunt $K = \bigcup_{k=1}^{\infty} K_k^*$ satisfà les tesis del teorema. $\square$

Bibliografia

[1] R. Baire, *Sur les functions de variables réelles*, Annali di Mat. Pura ed Appl. **3** (1899), 1–123.

[2] A. S. Besicovitch, *A general form of the covering principle and relative differentiation of additive functions*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **41** (1945), 103–110.

[3] A. S. Besicovitch, *A general form of the covering principle and relative differentiation of additive functions II*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **42** (1946), 1–10.

[4] C. Caratheodory, *Vorlesungen Über Reelle Funktionen*, Teubner, Leipzig, 1927.

[5] J. Cerdà, *Análisis Real*, Col·lecció UB 23, Edicions Universitat de Barcelona, 2000.

[6] D. Egorov, *Sur les suites des fonctions mesurables*, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences **152** (1911), 244–246.

[7] M. B. Feldman, *A proof of Lusin's Theorem*, Amer. Math. Month. **88** 3 (1981), 191–192.

[8] M. de Guzmán, *Differentiation of Integrals in* $\mathbb{R}^n$, Lecture Notes in Mathematics 481, Springer-Verlag, 1975.

[9] M. de Guzmán i G. V. Welland, *On the differentiation of integrals*, Rev. Un. Mat. Argentina **25** (1971), 253–276.

[10] G. H. Hardy i J. E. Littlewood, *A maximal theorem with function-theoretic applications*, Acta Math. **54** (1930), 81–116.

[11] C. A. Hayes i C. Y. Pauc, *Full individual and class differentiation theorems in their relations to halo and Vitali properties*, Canad. J. Math. **7** (1955), 221–274.

[12] B. Jessen, Marcinkiewicz i A. Zygmund, *Note on the differentiability of multiple integrals*, Fund. Math. **25** (1935), 217–234.

[13] G. Vitali, *Sul gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali*, Atti Accad. Sci. Torino **43** (1908), 75–92.

[14] A. Zygmund, *A note on the differentiability of multiple integrals*, Colloq. Math. **16** (1967), 199–204.