Acotación de operadores maximales en Análisis Armónico

José Antonio Raposo Gómez

Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi.
Universitat de Barcelona.
Barcelona, Mayo de 1998.

Programa de doctorado del departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi. Bienio 93–95.
Memoria presentada para aspirar al grado de doctor en Ciencias Matemáticas.

Certificamos que la presente memoria ha sido realizada por José Antonio Raposo Gómez y dirigida por nosotros.

Barcelona, Mayo de 1998.

María Jesús Carro Rossell F. Javier Soria de Diego

ÍNDICE

Introducción **1**

Capítulo 1. Acotación de operadores sobre funciones características y otros tópicos **7**

1. Introducción 7
2. Acotación sobre funciones características 9
3. Desigualdades con dos operadores 18
4. Aplicaciones 22
5. Desigualdades de tipo débil con pesos en $\mathbb{R}^+$ 28
6. Operador de Hardy y clases B_p 32

Capítulo 2. Espacios Λ de Lorentz **41**

1. Introducción 41
2. Introducción a los espacios $\Lambda^p_X(w)$ 43
3. Espacios de Lorentz cuasi-normados 52
4. Dualidad 60
5. Normabilidad 90
6. Operadores en espacios de Lorentz 97

Capítulo 3. El operador maximal de Hardy-Littlewood en espacios de Lorentz con pesos **107**

1. Introducción 107
2. Generalidades 109
3. La desigualdad fuerte en el caso diagonal 116
4. La desigualdad débil 124
5. Aplicaciones 138

Referencias **141**

INTRODUCCIÓN

Esta memoria se divide en tres partes que, genéricamente, pueden circunscribirse en el área común que indica su título: "Acotación de operadores maximales en Análisis Armónico".

El objetivo inicial y prioritario de nuestras investigaciones ha sido caracterizar la acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood

$$Mf(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f|, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n),$$

en el "espacio de Lorentz clásico con peso" $\Lambda^p_u(w)$. Simbólicamente,

$$M \,:\, \Lambda^p_u(w) \longrightarrow \Lambda^p_u(w). \tag{1}$$

Este espacio es un retículo funcional en $\mathbb{R}^n$ definido (para cada $0 < p < \infty$) por la "norma"

$$\|f\|_{\Lambda^p_u(w)} = \left[\int_0^\infty \big(f^*_u(t)\big)^p w(t)\, dt \right]^{1/p}.$$

Aquí w es un peso en $\mathbb{R}^+$, u es un peso en $\mathbb{R}^n$ y f^*_u es la función reordenada decreciente de f en el espacio de medida $\big(\mathbb{R}^n, u(x)dx\big)$. Estos espacios fueron introducidos por G.G. Lorentz ([Lo2]) en 1951 y constituyen una generalización de los espacios de Lorentz $L^{p,q}(u)$. Si $u = 1$ se denomina simplemente espacio de Lorentz clásico (en $\mathbb{R}^n$) y se denota como $\Lambda^p(w)$. En el caso $w = 1$, $\Lambda^p_u(w)$ no es más que el espacio de Lebesgue con peso $L^p(u)$.

La historia del problema (1) se remonta al trabajo de Muckenhoupt ([M], 1972) donde considera y caracteriza la acotación

$$M \,:\, L^p(u) \longrightarrow L^p(u) \tag{2}$$

para $p > 1$ ($M : L^1(u) \to L^{1,\infty}(u)$ en el caso $p = 1$) dando lugar a las clases de pesos A_p. Esto es un caso particular (corresponde a $w = 1$) de (1). Son numerosos los trabajos que desde entonces han aparecido con resultados que extienden el de Muckenhoupt. Citemos por ejemplo [CF], [Sa2], [GR]. Hemos de destacar también los trabajos de Chung, Hunt y Kurtz ([CHK] 1982, [HK] 1983) que caracterizan en algunos casos la acotación

$$M : L^{p,q}(u) \longrightarrow L^{r,s}(u)$$

que también puede verse como caso particular de la acotación (no necesariamente diagonal ahora) del operador de Hardy-Littlewood entre espacios de Lorentz con pesos.

En 1990 Ariño y Muckenhoupt [AM1] consideran los espacios de Lorentz clásicos en conexión con el operador maximal de Hardy-Littlewood. Estos autores resuelven (en el caso $p > 1$) el problema

$$M : \Lambda^p(w) \longrightarrow \Lambda^p(w) \tag{3}$$

que corresponde a (1) en el caso particular $u = 1$. Como la reordenada decreciente (respecto a la medida de Lebesgue) de la función maximal Mf es equivalente a $f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*$ (véase [BS]) y toda función decreciente en $\mathbb{R}^+$ es igual a.e. a la reordenada de una función medible en $\mathbb{R}^n$, el problema (3) es equivalente a un problema de acotación de operadores en la semirrecta. Concretamente, (3) es equivalente a la acotación

$$A : L^p_{\text{dec}}(w) \longrightarrow L^p(w)$$

donde $Ag(t) = \frac{1}{t}\int_0^t g$ es el operador de Hardy y $L^p_{\text{dec}}(w)$ es el cono de las funciones en $\mathbb{R}^+$, positivas y decrecientes, que están en el espacio de Lebesgue con peso $L^p(w)$. Los pesos w en la semirrecta que satisfacen (3) son los pesos de la denominada clase B_p. Este trabajo de Ariño y Muckenhoupt muestra así que existe una conexión entre nuestro problema original (1) y el problema de la acotación de operadores de tipo integral sobre funciones monótonas en la semirrecta. De hecho, a partir de [AM1] aparecen numerosos trabajos tratando este último tema. Entre muchos otros podemos citar a [Sa2], [CS1], [CS2], [Sp1], [Sp2], [HM].

Con los anteriores precedentes, hubiera resultado coherente que el siguiente paso fuese la solución del problema general, con dos pesos, (1). Sin embargo, hasta el momento presente este problema ha estado abierto, en parte debido a que las técnicas empleadas en la resolución de los dos casos extremos (2) y (3), al no tener ninguna relación entre sí, no se han podido combinar. En efecto, la acotación (3) es, como ya hemos comentado, un problema de acotación de operadores sobre funciones monótonas en la semirrecta, muy distinto del problema de los pesos A_p. Aquí (véase [CF], [GR]) se usan técnicas basadas en lemas de recubrimiento, desigualdades de Hölder inversas con cubos, etc. El problema ha sido tratado por C.J. Neugebauer en ([Ne2], 1992) obteniendo algunas condiciones suficientes y también por M.J. Carro y J. Soria ([CS3], 1997). Estos últimos autores dan, además una interesante condición necesaria válida para la versión débil de (1). En esta memoria probamos una condición necesaria y suficiente para que se satisfaga la acotación (1) en el caso mas general. Concretamente, si denotamos $W(t) = \int_0^t w,\ t > 0$, demostraremos (Teorema III.3.8) que (1) es equivalente a la condición

$$\frac{W\big(u\big(\bigcup_j Q_j\big)\big)}{W\big(u\big(\bigcup_j E_j\big)\big)} \leq C \max_j \left[\frac{|Q_j|}{|E_j|}\right]^q$$

que ha de ser válida (para algún $q < p$) para toda familia finita de cubos y conjuntos $(Q_j, E_j)_j$ con $E_j \subset Q_j$, lo que nos ofrece una versión unificada de las clases A_p y B_p.

Lo hasta aquí expuesto es el contenido de una de las partes (Capítulo 3) de este trabajo ya que el problema original (1) que nos interesaba dio, a su vez, lugar a otras cuestiones que intentamos resolver. Por ejemplo, al trabajar con los espacios de Lorentz $\Lambda^p(w)$ hemos tenido que desarrollar en detalle sus propiedades y, así, nos ha parecido conveniente incluir un capítulo (Capítulo 2) dedicado a estos espacios en su versión más general, es decir definidos sobre un espacio de medida artbitrario. De hecho, desde que Lorentz ([Lo2]) los introdujo en 1951 (como espacio de funciones definidas en un intervalo de $\mathbb{R}$), no se había hecho ningún estudio ordenado y mínimamente completo. En muchos casos, los autores que los han considerado se han restringido al caso normado (w decreciente) ([Lo2] por ejemplo) ignorando el caso general cuasi-normado que, como se ve aquí, es igualmente rico en propiedades. Además, normalmente estos espacios se han considerado definidos (con peso w arbitrario) en $\mathbb{R}^n$ ([Sa2], [So], etc) cuando en realidad y como veremos, es razonable estudiarlos sobre un espacio resonante cualquiera. Por ejemplo, sobre $\mathbb{N}$ da lugar a espacios de sucesiones que generalizan a los espacios de Lebesgue ℓ^p y que se han venido llamando "espacios de Lorentz clásicos de sucesiones" (aunque, salvo [AEP], sólo hay estudios en el caso w decreciente). Hay cuestiones que no estaban completamente resueltas, como la caracterización de la normabilidad (en el caso discreto estaba totalmente abierta) o el estudio de los duales y algunas otras, como la interpolación, que (salvo [CM]) no habían sido estudiadas. También hemos sido capaces de extender con toda su generalidad (cualquier peso w) algunos resultados que sólo eran conocidos en el caso normado (w decreciente) como el Teorema II.4.18, Teorema II.4.20, etc.

Por último y dado que, como ya hemos notado, existe conexión entre el problema inicial (1) y la teoría de acotación de operadores sobre funciones monótonas en la semirrecta, hemos querido dedicar una parte (el Capítulo 1) a este tema y análogos. El resultado mas relevante aquí es el Teorema I.2.13 que identifica con gran generalidad las situaciones en que la acotación de un operador queda determinada por su acotación sobre las funciones características de la clase donde está definido. Por ejemplo, si este resultado se aplica a la situación del enunciado del conocido teorema de Stein-Weiss sobre acotación de operadores de tipo débil restringido ([SW]), se obtiene una versión más general de éste (válida con el máximo rango de índices).

En la presente memoria estas tres partes se han dispuesto en un orden de complejidad creciente inverso, en realidad, al seguido en esta introducción. El primer capítulo trata la cuestión general de los operadores porque sus consecuencias serán usadas en los dos siguientes y el estudio general de los espacios de Lorentz clásicos lo hemos dejado para el Capítulo 2 ya que algunos de sus resultados serán usados en el tercer y último capítulo que trata el problema (1) y análogos.

No puedo concluir esta introducción sin dedicar algunas palabras de agrade-

cimiento a mis dos directores de tesis, María Jesús Carro y Javier Soria. Sin ellos, su infinita paciencia y su atenta dedicación este trabajo no habría sido posible. Gracias. Estoy en deuda también con todo el Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi (y con el grupo de análisis en especial) por haberme provisto de los medios adecuados de trabajo.

Barcelona, Mayo de 1998

CAPÍTULO 1

ACOTACIÓN DE OPERADORES SOBRE FUNCIONES CARACTERÍSTICAS Y OTROS TÓPICOS

1. Introducción

En este capítulo se incluyen resultados generales sobre acotación de operadores en L^p del tipo que aparece a menudo en el Análisis Armónico y Real. Por ejemplo, el operador de Hardy:

$$Af(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f, \quad t > 0,$$

que actúa sobre funciones f en la semirrecta $\mathbb{R}^+$, o ya en $\mathbb{R}^n$, el operador maximal de Hardy-Littlewood:

$$Mf(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f|, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Algunos de los enunciados que se darán serán usados en los próximos dos capítulos de esta tesis.

Quizás el resultado más destacable sea el Teorema 2.13 en la sección 2 (y sus corolarios 2.14 y 2.19) en donde se prueba que en una gran variedad de situaciones, la acotación (fuerte y débil) de un operador queda caracterizada por su acotación "restringida" sobre las funciones características. En la sección 3 se extiende lo anterior al caso de desigualdades con dos operadores:

$$\|T_1 f\|_p \leq C \|T_0 f\|_q.$$

En la sección 4 se muestran aplicaciones de los resultados dados en 2 y 3. En particular se ve cómo algunos resultados sobre acotación de operadores ya probados por otros autores, son consecuencia directa del Teorema 2.13. Se ven asimismo nuevas aplicaciones como la caracterización de la acotación

$$M \,:\, L^{p_0}_{\mathrm{dec}}(u_0) \longrightarrow L^{p_1}(u_1)$$

(Teorema 4.1) y alguna otra como el Teorema 4.6 (y el Corolario 4.8) en donde se dan nuevas condiciones suficientes para la desigualdad débil (1,1) en $\mathbb{R}^n$ del operador maximal de convolución con núcleo homogéneo no suave,

$$M_\Omega f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^n} \int_{|y|<r} \Omega\big(y/|y|\big)\big|f(x-y)\big|\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n).$$

En la sección 5 se caracterizan algunas desigualdades con pesos para operadores en la semirrecta. Como aplicación se resuelve en su mayor generalidad la acotación con pesos,

$$Q\,:\,L^p(u) \longrightarrow L^{q,\infty}(v),$$

para el operdor de Hardy conjugado $Qf(t) = \int_t^\infty f(s)\frac{ds}{s}$. Finalmente, la sección 6 se dedica al operador de Hardy recordando algunos resultados y definiciones conocidas que serán útiles más adelante. Como novedad, se considera el operador de Hardy discreto,

$$A_d f(n) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(k), \qquad n \in \mathbb{N},$$

que actúa sobre sucesiones f y se caracteriza la desigualdad con pesos en ℓ^p de A_d en algunos casos.

Notación 1.1. Usaremos los símbolos $w, w_0, w_1, \ldots,$ para denotar pesos en $\mathbb{R}^+ = (0,+\infty)$. Estos serán funciones medibles positivas en $\mathbb{R}^+$ no idénticamente nulas y localmente integrables en $[0,\infty)$. A cada uno de estos w (resp. $w_0, w_1, \ldots$) asociaremos la función

$$W(r) = \int_0^r w\,, \quad r \geq 0$$

(resp. $W_0, W_1, \ldots$).

X, Y serán siempre espacios de medida σ-finitos. $\mathcal{M}(X)$ será la clase de las funciones medibles en X con valores en $\mathbb{C}$. Si $L \subset \mathcal{M}(X)$ denotaremos $L^+ = \{f \in L\,:\, f \geq 0\}$. Consideraremos también las clases

$$\mathcal{M}_{\mathrm{dec}}(\mathbb{R}^+) = \big\{f : \mathbb{R}^+ \to [0,\infty] \text{ decreciente}\big\}$$

$$\mathcal{M}_{\mathrm{inc}}(\mathbb{R}^+) = \big\{f : \mathbb{R}^+ \to [0,\infty] \text{ creciente}\big\}.$$

El símbolo $f\downarrow$ significa que $f\in\mathcal{M}_{\rm dec}(\mathbb{R}^+)$ y, análogamente, $f\uparrow$ es equivalente a $f\in\mathcal{M}_{\rm inc}(\mathbb{R}^+)$. $L^p(w)$ denotará el espacio de Lebesgue con peso

$$L^p(w)=\left\{f\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^+)\,:\,\|f\|^p_{L^p(w)}=\int_0^\infty |f|^p w<\infty\right\}$$

y denotamos $L^p_{\rm dec}(w)=L^p(w)\cap\mathcal{M}_{\rm dec}(\mathbb{R}^+)$ y, análogamente, $L^p_{\rm inc}(w)=L^p(w)\cap\mathcal{M}_{\rm inc}(\mathbb{R}^+)$.

Si $f\in\mathcal{M}(X)$ y μ es la medida en X, definimos

$$\lambda_f(t)=\mu\big(\{|f|>t\}\big),\quad t\geq 0,$$

la función de distribución de f. Es claro que $\lambda_f\in\mathcal{M}_{\rm dec}(\mathbb{R}^+)$. La función

$$f^*(s)=\inf\big\{t>0\,:\,\lambda_f(t)\leq s\big\},\quad s\geq 0$$

se denomina reordenada decreciente de f y no es más que la función de distribución de λ_f en el espacio $\mathbb{R}^+$ con la medida de Lebesgue. Nos será útil también considerar la función maximal de f^* definida por

$$f^{**}(t)=\frac{1}{t}\int_0^t f^*\,,\quad t>0.$$

Las indeterminaciones $0\cdot\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ se tomarán iguales a 0.

2. Acotación sobre funciones características

En esta sección trataremos el problema de acotación de operadores del tipo

$$T\,:\,\big(L^{p_0}(X)\cap L\,,\,\|\cdot\|_{p_0}\big)\longrightarrow L^{p_1}(Y), \tag{2.1}$$

donde L es una subclase de L^{p_0} y T es un operador (normalmente lineal o sublineal). Es decir, estudiaremos la desigualdad

$$\|Tf\|_{L^{p_1}(Y)}\leq C\|f\|_{L^{p_0}(X)},\quad f\in L. \tag{2.2}$$

En ciertos casos la desigualdad (2.2), válida para toda $f\in L$, queda asegurada si se tiene para funciones características $f=\chi_A\in L$. Así ocurre (tal como probaron Carro-Soria ([CS2]) y Stepanov en [Sp1]) en el caso $L=L^{p_0}_{\rm dec}(w_0)$,

$Y = (\mathbb{R}^+, w_1(t)\,dt)$ para el rango de índices $0 < p_0 \leq 1$, $p_0 \leq p_1 < \infty$ y operadores en la semirrecta de tipo integral:

$$Tf(r) = \int_0^\infty k(r,t) f(t)\,dt\,, \quad r > 0. \tag{2.3}$$

Imponiendo entonces que la desigualdad (2.2) sea válida para funciones características se obtiene fácilmente a menudo una útil caracterización para (2.1). Por ejemplo en el caso del resultado de Carro-Soria y Stepanov, la condición (necesaria y suficiente) sobre los pesos w_0, w_1 para $T : L^{p_0}_{\mathrm{dec}}(w_0) \to L^{p_1}(w_1)$ (definido por (2.3)) es:

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^r k(s,t)\,dt \right)^{p_1} w_1(s)\,ds \right)^{1/p_1} \leq C \left(\int_0^r w_0 \right)^{1/p_0}, \quad r > 0.$$

El rango $0 < p_0 \leq 1$, $p_0 \leq p_1 < \infty$ es clave y de hecho el principio anterior funciona en otros casos para estos índices. Así ocurre por ejemplo (véase [Sp1]) con las funciones crecientes en $\mathbb{R}^+$:

$$T : L^{p_0}_{\mathrm{inc}}(w_0) \to L^{p_1}(w_1)$$

y siendo T como en (2.3).

Tal como veremos seguidamente (Teorema 2.13) todo ello es consecuencia de un principio general que se aplica a una clase mucho más amplia de operadores que los de tipo integral (vale por ejemplo para la mayoría de los operadores positivos sublineales) y en un ámbito mayor que el de las funciones monótonas en $\mathbb{R}^+$ (es cierto por ejemplo en $L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$). El resultado se inspira en el Teorema 2.4 en [CS2] y de hecho puede considerarse una amplia extensión de éste. Lo probaremos en el contexto más general de los espacios de Lorentz $L^{p,q}$.

Algunas definiciones previas serán necesarias a fin de dar a los enunciados la máxima generalidad. Introducimos en primer lugar la clase de funciones sobre las que será válido nuestro principio.

Definición 2.4. Diremos que $\emptyset \neq L \subset \mathcal{M}(X)$ es una clase regular en X si, para cada $f \in L$, se tiene

(i) $|\alpha f| \in L$ si $\alpha \in \mathbb{R}$,

(ii) $\chi_{\{|f|>t\}} \in L$ para todo $t > 0$ y

(iii) existe una sucesión de funciones simples $(f_n)_n \subset L$ tal que $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \to |f(x)|$ a.e. $x \in X$.

Ejemplos 2.5.

(i) Si X es un espacio de medida cualquiera, todo retículo funcional en X (espacio vectorial $L \subset \mathcal{M}(X)$ con $g \in L$ si $|g| \leq |f|,\ f \in L$) con la propiedad de Fatou es una clase regular. En particular los espacios de Lebesgue $L^p(X)$ y los de Lorentz $L^{p,q}(X),\ 0 < p, q \leq \infty$ son clases regulares.

(ii) Si C es una clase formada por conjuntos medibles en X que contiene al conjunto vacío,

$$L_C = \big\{ f \in \mathcal{M}(X) \, : \, \{|f| > t\} \in C, \ \forall t \geq 0 \big\}$$

es una clase regular en X. En efecto, las condiciones 2.4(i) y 2.4(ii) son inmediatas de comprobar mientras que para la 2.4(iii) obsérvese que si $0 \leq f \in L_C$, las funciones simples

$$f_n = \sum_{k=0}^{n2^{n-1}} k 2^{-n} \chi_{\{k2^{-n} < f \leq (k+1)2^{-n}\}} + n \chi_{\{f > n\}}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

forman una sucesión monótona creciente que converge puntualmente a f y cuyos conjuntos de nivel son conjuntos de nivel de f (y por lo tanto están en C).

(iii) Si L es una clase regular en X,

$$L^* = \big\{ f^* \, : \, f \in L \big\}$$

es una clase regular en $\mathbb{R}^+$.

(iv) En $\mathbb{R}^+$ las funciones positivas decrecientes forman una clase regular y lo mismo vale para las crecientes.

(v) En $\mathbb{R}^n$ lo son las funciones radiales así como las funciones radiales positivas y decrecientes (o las radiales crecientes).

Sea ahora Y otro espacio de medida σ-finito, L una clase regular y $T : L \to \mathcal{M}(Y)$ un operador.

Definición 2.6.

(i) T es sublineal si $|T(\alpha_1 f_1+\cdots+\alpha_n f_n)(y)| \leq |\alpha_1 Tf_1(y)|+\cdots+|\alpha_n Tf_n(y)|$ a.e. $y \in Y$, para todo $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{R},\ f_1,\ldots,\ f_n \in L$ tal que $\alpha_1 f_1+\cdots+\alpha_n f_n \in L$.

(ii) T es monótono si $|Tf(y)| \leq |Tg(y)|$ a.e. $y \in Y$ si $|f(x)| \leq |g(x)|$ a.e. $x \in X,\ f,g \in L$.

(iii) Diremos que T es orden continuo (o continuo en orden) si es monótono y si para toda sucesión $(f_n)_n \subset L$ con $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \to f(x) \in L$ a.e. $x \in X$, se tiene $\lim_n |Tf_n(y)| = |Tf(y)|$ a.e. $y \in Y$.

Observación 2.7. Es inmediato que un operador sublineal y monótono verifica las siguientes propiedades:

(i) $T(0)(y) = 0$ a.e. $y \in Y$,

(ii) $\big|T|f|(y)\big| = |Tf(y)|$ a.e. $y \in Y,\ f \in L$.

La siguiente propiedad de los operadores sublineales monótonos será fundamental.

Teorema 2.8. *Sea $L \subset \mathcal{M}(X)$ una clase regular y $T : L \to \mathcal{M}(Y)$ un operador sublineal y monótono. Entonces, para cada función simple $f \in L$,*

$$|Tf(y)| \leq \int_0^\infty \left|T\chi_{\{|f|>t\}}(y)\right| dt\,, \quad \text{a.e. } y \in Y.$$

Demostración. Por 2.7(ii) podemos suponer $f \geq 0$. Entonces,

$$f = \sum_{n=1}^{N} a_n\, \chi_{B_n}$$

con $a_1, a_2, \ldots, a_N > 0$ y siendo los $(B_j)_j$ una sucesión creciente de conjuntos medibles en X: $B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_N$. Hagamos $A_n = \sum_{j=n}^N a_j\,,\ n = 1,\ldots,N$, $A_{N+1} = 0$ y notemos que $\{f > t\} = \emptyset$ si $t \geq A_1$ y $\{f > t\} = B_n$ para $A_{n+1} \leq t < A_n\,,\ n = 1,\ldots,N$. En particular cada una de las funciones χ_{B_n} está en L (por 2.4(ii)) y de la sublinealidad de T se sigue

$$|Tf(y)| \leq \sum_{n=1}^{N} a_n |T\chi_{B_n}(y)|\,, \quad \text{a.e. } y \in Y. \tag{2.9}$$

Por otra parte $T\chi_\emptyset(y) = 0$ a.e. $y \in Y$ (por 2.7(i)) y se tiene,

$$\int_0^\infty \left|T\chi_{\{f>t\}}(y)\right| dt = \sum_{n=1}^N \int_{A_{n+1}}^{A_n} |T\chi_{B_n}(y)|\, dt = \sum_{n=1}^N a_n |T\chi_{B_n}(y)|\,,$$

pues $A_n - A_{n+1} = a_n$. La última expresión coincide con la parte derecha de (2.9) y el teorema queda probado. □

Observación 2.10. Si el operador monótono T es lineal y positivo ($Tf \geq 0$ si $f \geq 0$), la desigualdad del enunciado del teorema anterior es en realidad una igualdad cuando $f \geq 0$. Ello se deduce inmediatamente a partir de la demostración.

La desigualdad que sigue nos será útil más adelante y ha sido demostrada por diversos autores. Por ejemplo [HLP], [HM], [Lo1], [SW], etc.

Lema 2.11. *Si* $0 < p \leq 1$*,*

$$\sup_{f\downarrow} \frac{\left(\int_0^\infty f\right)^p}{\int_0^\infty f^p(t) t^{p-1}\, dt} = p\,.$$

Recordemos antes de seguir, la definición y algunas propiedades de los espacios $L^{p,q}$ (véase [BS]). Si X es un espacio de medida cualquiera y $0 < p, q < \infty$ se define

$$L^{p,q}(X) = \left\{ f \in \mathcal{M}(X) \,:\, \|f\|_{p,q} = \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < +\infty \right\}$$

y, en el caso $0 < p < q = +\infty$,

$$L^{p,\infty}(X) = \left\{ f \in \mathcal{M}(X) \,:\, \|f\|_{p,\infty} = \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t) < +\infty \right\}.$$

Definiciones alternativas para la cuasi-norma $\|\cdot\|_{p,q}$ son

$$\|f\|_{p,q} = \left(\int_0^\infty p t^{q-1} \left(\lambda_f(t)\right)^{q/p} dt \right)^{1/q}$$

en el caso $q < \infty$, y

$$\|f\|_{p,\infty} = \sup_{t>0} t \left(\lambda_f(t)\right)^{1/p}$$

para el caso $q = \infty$.

Observación 2.12.

(i) Si $1 \leq q \leq p$, el funcional $\|\cdot\|_{p,q}$ es una norma.

(ii) En el caso $1 < p < q \leq \infty$ puede definirse

$$\|f\|_{(p,q)} = \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p} f^{**}(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}$$

(con la modificicación usual si $q = \infty$) que sí es una norma (véase [BS]) y es equivalente a la cuasi-norma original:

$$\|f\|_{p,q} \leq \|f\|_{(p,q)} \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_{p,q}, \quad f \in \mathcal{M}(X).$$

(iii) Las normas anteriores son normas funcionales de Banach (véase [BS]) y un sencillo argumento de dualidad muestra que verifican la desigualdad integral de Minkowski.

Podemos enunciar ya el resultado clave de esta sección.

Teorema 2.13. *Sea $L \subset \mathcal{M}(X)$ una clase regular, $T : L \to \mathcal{M}(Y)$ un operador sublineal orden continuo y $0 < q_0 \leq 1$, $0 < p_0 < \infty$. Entonces*

(a) Si $q_0 \leq q_1 \leq p_1 < \infty$,

$$\sup_{f \in L} \frac{\|Tf\|_{L^{p_1,q_1}(Y)}}{\|f\|_{L^{p_0,q_0}(X)}} = \sup_{\chi_B \in L} \frac{\|T\chi_B\|_{L^{p_1,q_1}(Y)}}{\|\chi_B\|_{L^{p_0,q_0}(X)}}.$$

(b) Si $q_0 < p_1 < q_1 \leq \infty$,

$$\sup_{f \in L} \frac{\|Tf\|_{L^{p_1,q_1}(Y)}}{\|f\|_{L^{p_0,q_0}(X)}} \leq \left(\frac{p_1}{p_1 - q_0} \right)^{1/q_0} \sup_{\chi_B \in L} \frac{\|T\chi_B\|_{L^{p_1,q_1}(Y)}}{\|\chi_B\|_{L^{p_0,q_0}(X)}}.$$

Demostración. Sea

$$C = \sup_{\chi_B \in L} \frac{\|T\chi_B\|_{L^{p_1,q_1}(Y)}}{\|\chi_B\|_{L^{p_0,q_0}(X)}}.$$

Tenemos que probar que $\|Tf\|_{L^{p_1,q_1}(Y)} \leq K\,C\,\|f\|_{L^{p_0,q_0}(X)}$ para cada $f \in L$ con $K = 1$ (en el caso (a)) o $K = \left(p_1/(p_1 - q_0)\right)^{1/q_0}$ (caso (b)). Por 2.7(ii) podemos suponer $f \geq 0$ y dado que existe una sucesión creciente de funciones simples positivas $(f_n)_n \subset L$ que converge a f a.e. con

$$|Tf_n(y)| \leq |Tf_{n+1}(y)| \to |Tf(y)|, \qquad \text{a.e. } y$$

(definiciones 2.4 y 2.6), por el Teorema de la convergencia monótona, basta probar la desigualdad de normas anterior para las funciones $(f_n)_n$. Es decir, podemos suponer que $0 \leq f \in L$ es simple.

Sea $p = p_1/q_0$, $q = q_1/q_0$. Por el Teorema 2.8 y el Lema 2.11,

$$\|Tf\|_{p_1,q_1}^{q_0} = \big\||Tf|^{q_0}\big\|_{p,q} \leq \left\| \int_0^\infty q_0 t^{q_0-1} \big|T\chi_{\{f>t\}}(\cdot)\big|^{q_0}\, dt \right\|_{p,q}.$$

En el caso (a), $\|\cdot\|_{p,q}$ es una norma (Observación 2.12) y se obtiene

$$\|Tf\|_{p_1,q_1}^{q_0} \leq \int_0^\infty q_0 t^{q_0-1} \big\|\big|T\chi_{\{f>t\}}\big|^{q_0}\big\|_{p,q}\, dt.$$

En el caso (b), $\|\cdot\|_{(p,q)}$ es una norma que verifica las desigualdades de la Observación 2.12(ii) y se sigue

$$\begin{aligned}\|Tf\|_{p_1,q_1}^{q_0} &\leq \frac{p}{p-1} \int_0^\infty q_0 t^{q_0-1} \big\|\big|T\chi_{\{f>t\}}\big|^{q_0}\big\|_{p,q}\, dt \\ &= \frac{p_1}{p_1-q_0} \int_0^\infty q_0 t^{q_0-1} \big\|\big|T\chi_{\{f>t\}}\big|^{q_0}\big\|_{p,q}\, dt.\end{aligned}$$

Es decir, en cualquier caso,

$$\begin{aligned}\|Tf\|_{p_1,q_1}^{q_0} &\leq K^{q_0} \int_0^\infty q_0 t^{q_0-1} \big\|\big|T\chi_{\{f>t\}}\big|^{q_0}\big\|_{p,q}\, dt \\ &= K^{q_0} \int_0^\infty q_0 t^{q_0-1} \big\|T\chi_{\{f>t\}}\big\|_{p_1,q_1}^{q_0}\, dt \\ &\leq (KC)^{q_0} \int_0^\infty q_0 t^{q_0-1} \big\|\chi_{\{f>t\}}\big\|_{p_0,q_0}^{q_0}\, dt \\ &= (KC)^{q_0} \int_0^\infty p_0 t^{q_0-1} \big(\lambda_f(t)\big)^{q_0/p_0}\, dt \\ &= (KC)^{q_0} \|f\|_{p_0,q_0}^{q_0}. \qquad \square\end{aligned}$$

Aplicando el resultado anterior al caso fuerte $T : L^{p_0} \to L^{p_1}$ obtenemos:

Corolario 2.14. *Sea $L \subset \mathcal{M}(X)$ una clase regular y $T : L \to \mathcal{M}(Y)$ un operador sublineal orden continuo. Si $0 < p_0 \leq 1$, $p_0 \leq p_1 < \infty$ se tiene*

$$\sup_{f \in L} \frac{\|Tf\|_{L^{p_1}(Y)}}{\|f\|_{L^{p_0}(X)}} = \sup_{\chi_B \in L} \frac{\|T\chi_B\|_{L^{p_1}(Y)}}{\|\chi_B\|_{L^{p_0}(X)}}.$$

Observación 2.15.

(i) Todo operador maximal de la forma

$$T^* f(x) = \sup_{T \in B(x)} |Tf(x)|, \quad x \in X, \quad f \in L,$$

donde, para cada $x \in X$, $B(x)$ es un conjunto de operadores T verificando:

(a) $|Tf(x)| \leq |Tg(x)|$ si $|f| \leq |g|$ a.e.

(b) $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \to f(x) \Rightarrow \lim_n |Tf_n(x)| = |Tf(x)|$,

es orden continuo (sobre la clase regular L). También es continuo en orden el supremo de una familia finita o numerable de operadores continuos en orden.

(ii) En particular todo operador integral $Tf(r) = \int k(r,t)f(t)\,dt$, $r > 0$, $f \in L \subset \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^+)$ (con $k : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to [0,\infty)$), está en las condiciones del teorema anterior. Por ejemplo el operador de Hardy

$$Af(r) = \frac{1}{r}\int_0^r f\,, \quad r > 0, \quad 0 \leq f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$$

y el conjugado de éste $Qf(r) = \int_r^\infty f(t)\,\frac{dt}{t}$. También el operador identidad $f \mapsto f$ es obviamente orden continuo.

(iii) El rango de los exponentes p_0, p_1 en el Corolario 2.14 es el óptimo. En efecto:

(iii.1) El resultado no es válido si $p_0 > 1$. Un contraejemplo lo tenemos en el operador de Hardy A. Dados $1 < p_0 \leq p_1$, la condición necesaria y suficiente para $A : L^{p_0}_{\mathrm{dec}}(w_0) \to L^{p_1}(w_1)$ es (véase [Sa2]),

$$(2.16)\qquad \begin{aligned} &W_1^{1/p_1}(r) \leq C\,W_0^{1/p_0}(r), \quad r > 0,\\ &\left(\int_r^\infty \frac{w_1(t)}{t^{p_1}}\,dt\right)^{1/p_1}\left(\int_0^r \left(\frac{W_0(t)}{t}\right)^{-p_0'} w_0(t)\,dt\right)^{1/p_0'} \leq C, \quad r > 0. \end{aligned}$$

Es fácil ver que la condición $\left\|A\chi_{(0,r)}\right\|_{L^{p_1}(w_1)} \leq C\left\|\chi_{(0,r)}\right\|_{L^{p_0}(w_0)}$, $r > 0$, del Corolario 2.14 equivale a las desigualdades

$$W_1^{1/p_1}(r) \leq C_1\,W_0^{1/p_0}(r), \quad r > 0,$$

$$\left(\int_r^\infty \left(\frac{r}{t}\right)^{p_1} w_1(t)\,dt\right)^{1/p_1} \leq C_1\,W_0^{1/p_0}(r), \quad r > 0.$$

Obsérvese que estas últimas se aplican al par de pesos $w_0(t) = t^{p_0-1}, w_1(t) = t^{p_1-1}\chi_{(1,2)}(t)$ y sin embargo éstos no satisfacen las desigualdades (2.16).

(iii.2) El enunciado no es válido si $p_1 < p_0$. Para verlo basta considerar $T = \mathrm{Id} : L^{p_0}_{\mathrm{dec}}(w_0) \to L^{p_1}(w_1)$. Entonces,

$$(2.17)\qquad \sup_{f\downarrow} \frac{\left(\int_0^\infty f^{p_1} w_1\right)^{1/p_1}}{\left(\int_0^\infty f^{p_0} w_0\right)^{1/p_0}} = \left(\sup_{g\downarrow} \frac{\int_0^\infty g w_1}{\left(\int_0^\infty g^{p_0/p_1} w_0\right)^{p_1/p_0}}\right)^{1/p_1}.$$

El último supremo es equivalente (c.f. [Sa2]) salvo constantes multiplicativas que sólo dependen de p_0/p_1, a la expresión

$$\left(\int_0^\infty \left(\frac{W_1}{W_0}\right)^{p_1/(p_0-p_1)} w_1\right)^{(p_0-p_1)/p_0}. \tag{2.18}$$

Por otra parte si el Corolario 2.14 fuera cierto en este caso, (2.17) sería igual a

$$\sup_{r>0} \frac{\|\chi_{(0,r)}\|_{L^{p_1}(w_1)}}{\|\chi_{(0,r)}\|_{L^{p_0}(w_0)}} = \sup_{r>0} \frac{W_1^{1/p_1}(r)}{W_0^{1/p_0}(r)}.$$

Este último supremo es finito para los pesos $w_i(t) = t^{\alpha_i}$, $i = 0, 1$, si $(1+\alpha_1)/p_1 = (1 + \alpha_0)/p_0$, $\alpha_0, \alpha_1 > -1$, mientras que (2.18) es siempre infinito en este caso cualesquiera que sean α_1, α_2.

Considerando ahora el caso débil $T : L^{p_0} \to L^{p_1,\infty}$, tenemos como consecuencia del Teorema 2.13 este otro enunciado.

Corolario 2.19. *Sea $L \subset \mathcal{M}(X)$ una clase regular y $T : L \to \mathcal{M}(Y)$ un operador orden continuo sublineal. Si $0 < p_0 \leq 1$, $p_0 < p_1 < \infty$ se tiene,*

$$\sup_{f\in L} \frac{\|Tf\|_{L^{p_1,\infty}(Y)}}{\|f\|_{L^{p_0}(X)}} \leq \left(\frac{p_1}{p_1-p_0}\right)^{1/p_0} \sup_{\chi_B\in L} \frac{\|T\chi_B\|_{L^{p_1,\infty}(Y)}}{\|\chi_B\|_{L^{p_0}(X)}}.$$

Observación 2.20. El corolario anterior no es válido si $p_0 > 1$, como queda patente en el caso

$$A : L^{p_0}_{\mathrm{dec}}(w_0) \longrightarrow L^{p_1,\infty}(w_1). \tag{2.21}$$

Como prueban Carro-Soria en [CS2], la condición necesaria y suficiente para (2.21) es

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^r \left(\frac{W_0(t)}{t}\right)^{-p_0'} w_0(t)\,dt\right)^{1/p_0'} W_1^{1/p_1}(r) \leq Cr, \quad r > 0, \\ &W_1^{1/p_1}(r) \leq C W_0^{1/p_0}(r), \quad r > 0, \end{aligned} \tag{2.22}$$

que no coincide con la condición

$$\frac{W_1^{1/p_1}(t)}{t} \leq C\,\frac{W_0^{1/p_0}(r)}{r}, \quad 0 < t < r < \infty,$$

resultante de aplicar el Corolario 2.19. Por ejemplo, el par de pesos de la Observación 2.15(iii.1) satisfacen esta última pero no (2.22).

Una consecuencia del Teorema 2.13 y del teorema general de interpolación de Marcinkiewicz es el siguiente resultado sobre interpolación de operadores de tipo débil restringido, que constituye una generalización del conocido teorema de Stein-Weiss (Teorema 3.15 en [SW] o bien Teorema 5.5 en [BS]).

Teorema 2.21. *Sean $0 < p_0, p_1 < \infty$, $0 < q_0, q_1 \leq \infty$, $p_0 \neq p_1$, $q_0 \neq q_1$ y supongamos que $T : \big(L^{p_0,1} + L^{p_1,1}\big)(X) \to \mathcal{M}(Y)$ es un operador sublineal orden continuo verificando*

$$\big\|T\chi_B\big\|_{q_0,\infty} \leq C_0 \|\chi_B\|_{p_0,1}, \quad B \subset X,$$
$$\big\|T\chi_B\big\|_{q_1,\infty} \leq C_1 \|\chi_B\|_{p_1,1}, \quad B \subset X.$$

Entonces

$$T : L^{p,r}(X) \longrightarrow L^{q,r}(Y), \qquad 0 < r \leq \infty,$$

si

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \qquad 0 < \theta < 1.$$

Demostración. Como $L^{s,t_0} \subset L^{s,t_1}$ si $t_0 < t_1$, existen índices $r_0, r_1 \in (0,1)$ con $r_i < q_i$, $i = 0,1$ y tal que

$$\big\|T\chi_B\big\|_{q_i,\infty} \leq C_i \|\chi_B\|_{p_i,r_i}, \quad B \subset X, \qquad i = 0,1.$$

El Teorema 2.13 nos dice entonces que la desigualdad anterior vale para toda función $f \in L^{p_i,r_i}$ y la tesis del enunciado se sigue del teorema general de interpolación de Marcinkiewicz (Teorema 5.3.2 en [BL]). $\square$

Observación 2.22.

(i) La norma de una función característica en el espacio $L^{p,q}$ no depende (salvo constantes) de q. Por lo tanto, el teorema anterior sigue siendo válido si los espacios de partida $L^{p_i,1}$ se sustituyen por L^{p_i,r_i} con $0 < r_i \leq \infty$, $i = 0,1$.

(ii) En el resultado clásico de Stein-Weiss al que hacíamos alusión antes, se establece el teorema anterior con un rango de índices más restrictivo:

$$1 \leq p_0, p_1 < \infty, \qquad 1 \leq q_0, q_1 \leq \infty.$$

3. Desigualdades con dos operadores

Los Corolarios 2.14 y 2.19 de la sección anterior pueden generalizarse para obtener desigualdades con dos operadores

$$\|T_1 f\|_{L^{p_1,q_1}(Y_1)} \leq C \|T_0 f\|_{L^{p_0,q_0}(Y_0)},$$

en la línea, por ejemplo, de los trabajos de S. Barza-L.E. Persson-J. Soria ([BPS]) y H. Heinig-L. Maligranda ([HM]).

Antes necesitamos un conocido resultado auxiliar cuya demostración puede verse por ejemplo en [HM]. Damos aquí una prueba sencilla basada en el Corolario 2.14.

Lema 3.1 (Heinig-Maligranda). *Si* $0 < p \leq q < \infty$,

$$\sup_{f\downarrow} \frac{\left(\int_0^\infty q t^{q-1} f^q(t)\, dt \right)^{1/q}}{\left(\int_0^\infty p t^{p-1} f^p(t)\, dt \right)^{1/p}} = 1\,.$$

Demostración. Si S es el supremo del enunciado,

$$S^q = \sup_{g\downarrow} \frac{\int_0^\infty g(t) q t^{q-1}\, dt}{\left(\int_0^\infty g(t)^{p/q} p t^{p-1}\, dt \right)^{q/p}} = \sup_{g\downarrow} \frac{\|g\|_{L^1(qt^{q-1})}}{\|g\|_{L^{p/q}(pt^{p-1})}}.$$

Aplicando el Corolario 2.14 con $X = Y = \mathbb{R}^+$, $L = \mathcal{M}_{\mathrm{dec}}(\mathbb{R}^+)$, $T = \mathrm{Id}$, $p_0 = p/q$, $p_1 = 1$ se obtiene

$$S^q = \sup_{r>0} \frac{\|\chi_{(0,r)}\|_{L^1(qt^{q-1})}}{\|\chi_{(0,r)}\|_{L^{p/q}(pt^{p-1})}} = 1. \qquad \square$$

He aquí la generalización del Corolario 2.14 al caso de dos operadores. Tanto el enunciado como la demostración se inspiran en el Teorema 2.2 en [BPS] del cual constituye una generalización.

Teorema 3.2. *Sea* $L \subset \mathcal{M}(X)$ *una clase regular y sean* $T_i : L \to \mathcal{M}(Y_i)$, $i = 0, 1$, *dos operadores orden continuos. Suponemos además, que* T_1 *es sublineal y que* T_0 *es lineal y positivo. Entonces, en cada uno de estos casos:*

(a) $\quad 0 < p_0 \leq 1 \leq p_1 < \infty,$

(b) $\quad T_1 = \mathrm{Id},\ 1 \leq p_1 < \infty,\ 0 < p_0 \leq p_1,$

(c) $\quad T_0 = \mathrm{Id},\ 0 < p_0 \leq 1,\ p_0 \leq p_1 < \infty,$

(d) $\quad T_0 = T_1 = \mathrm{Id},\ 0 < p_0 \leq p_1 < \infty$

se tiene

$$\sup_{f \in L} \frac{\|T_1 f\|_{L^{p_1}(Y_1)}}{\|T_0 f\|_{L^{p_0}(Y_0)}} = \sup_{\chi_B \in L} \frac{\|T_1 \chi_B\|_{L^{p_1}(Y_1)}}{\|T_0 \chi_B\|_{L^{p_0}(Y_0)}}.$$

Demostración. Sea

$$C = \sup_{\chi_B \in L} \frac{\|T_1\chi_B\|_{L^{p_1}(Y_1)}}{\|T_0\chi_B\|_{L^{p_0}(Y_0)}}$$

y veamos que $\|T_1 f\|_{L^{p_1}(Y_1)} \leq C \|T_0 f\|_{L^{p_0}(Y_0)}$, $f \in L$. Como en la demostración del Teorema 2.13, es suficiente probar esta desigualdad para funciones $f \in L$ simples y positivas. Usaremos para T_1 la desigualdad del Teorema 2.8:

$$|T_1 f(y)| \leq \int_0^\infty \left|T_1\chi_{\{f>t\}}(y)\right| dt\,, \quad \text{a.e. } y \in Y_1, \tag{3.3}$$

mientras que T_0 por ser lineal y positivo verifica (Observación 2.10),

$$T_0 f(y) = \int_0^\infty T_0\chi_{\{f>t\}}(y)\, dt\,, \quad \text{a.e. } y \in Y_0. \tag{3.4}$$

En la demostración usaremos indistintamente el símbolo λ_g para denotar la función de distribución de una función cualquiera g sin reparar en si está definida en X, Y_0 o Y_1, lo cual se deberá entender por el contexto.

(a) Haremos servir la desigualdad de Minkowski dos veces, con $p_1 \geq 1$ y con $1/p_0 \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\|T_1 f\|_{L^{p_1}(Y_1)} &\leq \left(\int_{Y_1}\left(\int_0^\infty \left|T_1\chi_{\{f>t\}}(y_1)\right| dt\right)^{p_1} dy_1\right)^{1/p_1} \\
&\leq \int_0^\infty \left\|T_1\chi_{\{f>t\}}\right\|_{L^{p_1}(Y_1)} dt \\
&\leq C\int_0^\infty \left(\int_{Y_0}\left(T_0\chi_{\{f>t\}}(y_0)\right)^{p_0} dy_0\right)^{1/p_0} dt \\
&\leq C\left(\int_{Y_0}\left(\int_0^\infty T_0\chi_{\{f>t\}}(y_0)\, dt\right)^{p_0} dy_0\right)^{1/p_0} \\
&= C\,\|T_0 f\|_{L^{p_0}(Y_0)}.
\end{aligned}$$

(b) Por (a) sólo hace falta probar el caso $1 \leq p_0 \leq p_1 < \infty$. Usaremos el lema anterior dos veces, primero para $p = p_0 \le p_1 = q$ y luego en el caso $p = 1 \le p_0 = q$:

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^{p_1}(Y_1)} &= \left(\int_0^\infty p_1 t^{p_1 - 1} \lambda_f(t)\, dt \right)^{1/p_1} \\
&\le \left(\int_0^\infty p_0 t^{p_0 - 1} \big(\lambda_f(t)\big)^{p_0/p_1}\, dt \right)^{1/p_0} \\
&\le C \left(\int_0^\infty p_0 t^{p_0 - 1} \int_{Y_0} \big(T_0 \chi_{\{f>t\}}(y_0)\big)^{p_0}\, dy_0\, dt \right)^{1/p_0} \\
&= C \left(\int_{Y_0} \int_0^\infty p_0 t^{p_0 - 1} \big(T_0 \chi_{\{f>t\}}(y_0)\big)^{p_0}\, dt\, dy_0 \right)^{1/p_0} \\
&\le C \left(\int_{Y_0} \left(\int_0^\infty T_0 \chi_{\{f>t\}}(y_0)\, dt \right)^{p_0} dy_0 \right)^{1/p_0} \\
&= C\, \|T_0 f\|_{L^{p_0}(Y_0)}\, .
\end{aligned}$$

(c) Esto es el Corolario 2.14.

(d) Se tiene

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^{p_1}(Y_1)} &= \left(\int_0^\infty p_1 t^{p_1 - 1} \lambda_f(t)\, dt \right)^{1/p_1} \\
&\le C \left(\int_0^\infty p_1 t^{p_1 - 1} \big(\lambda_f(t)\big)^{p_1/p_0}\, dt \right)^{1/p_1} \\
&\le C \left(\int_0^\infty p_0 t^{p_0 - 1} \lambda_f(t)\, dt \right)^{1/p_0} \\
&= C\, \|f\|_{L^{p_0}(Y_0)}\, . \qquad \square
\end{aligned}$$

El siguiente resultado generaliza el Corolario 2.19 (desigualdad débil) al caso de dos operadores.

Teorema 3.5. *Sea $L \subset \mathcal{M}(X)$ una clase regular y sean $T_i : L \to \mathcal{M}(Y_i)$, $i = 0, 1$, dos operadores orden continuos. Suponemos que T_1 es sublineal y que T_0 es lineal y positivo. Entonces, se tiene*

$$\sup_{f \in L} \frac{\|T_1 f\|_{L^{p_1,\infty}(Y_1)}}{\|T_0 f\|_{L^{p_0}(Y_0)}} \le C \sup_{\chi_B \in L} \frac{\|T_1 \chi_B\|_{L^{p_1,\infty}(Y_1)}}{\|T_0 \chi_B\|_{L^{p_0}(Y_0)}}$$

en cada uno de estos casos:

(a) $\quad 0 < p_0 \le 1 < p_1 < \infty$, *con* $C = p_1/(p_1 - 1)$,

(b) $\quad T_1 = \mathrm{Id},\ 1 \le p_1 < \infty,\ 0 < p_0 \le p_1$, *con* $C = 1$,

(c) $\quad T_0 = \mathrm{Id},\ 0 < p_0 \le 1,\ p_0 < p_1 < \infty$, *con* $C = (p_1/(p_1 - p_0))^{1/p_0}$,

(d) $\quad T_0 = T_1 = \mathrm{Id},\ 0 < p_0 \le p_1 < \infty$, *con* $C = 1$.

Demostración. Como en la demostración anterior definimos

$$K = \sup_{\chi_B \in L} \frac{\|T_1 \chi_B\|_{L^{p_1,\infty}(Y_1)}}{\|T_0 \chi_B\|_{L^{p_0}(Y_0)}}$$

y bastará probar que $\|T_1 f\|_{L^{p_1,\infty}(Y_1)} \leq C\, K\, \|T_0 f\|_{L^{p_0}(Y_0)}, \quad 0 \leq f \in L$ simple. Usaremos para T_1 la desigualdad (3.3) y para T_0 la identidad (3.4). Los pasos son parecidos a los de la demostración anterior.

(a) Haremos servir las desigualdades

$$\|f\|_{p_1,\infty} \leq \|f\|_{(p_1,\infty)} \leq \frac{p_1}{p_1 - 1} \|f\|_{p_1,\infty}$$

(Observación 2.12) y la desigualdad integral de Minkowski para $\|\cdot\|_{(p_1,\infty)}$:

$$\begin{aligned}
\|T_1 f\|_{p_1,\infty} &\leq \left\| \int_0^\infty \left| T_1 \chi_{\{f>t\}}(\cdot) \right| dt \right\|_{(p_1,\infty)} \\
&\leq \frac{p_1}{p_1 - 1} \int_0^\infty \left\| T_1 \chi_{\{f>t\}} \right\|_{p_1,\infty} dt \\
&\leq CK \int_0^\infty \left\| T_0 \chi_{\{f>t\}} \right\|_{p_0} dt \\
&= CK \int_0^\infty \left(\int_{Y_1} \left(T_0 \chi_{\{f>t\}}(y) \right)^{p_0} dy \right)^{1/p_0} dt,
\end{aligned}$$

y la demostración se acaba como en la del apartado (a) del teorema anterior.

(b) Puesto que $\|\cdot\|_{L^{p_1,\infty}} \leq \|\cdot\|_{L^{p_1}}$ y ambas cuasi-normas coinciden sobre las funciones características, este caso es consecuencia del correspondiente caso del Teorema 3.2.

(c) Esto es el Corolario 2.19.

(d) Aquí vale la misma observación que en el caso (b). □

4. Aplicaciones

Debido a la amplitud de los conceptos “clase regular” y “operador orden continuo” que constituyen el marco en el que han sido enunciados los teoremas de las secciones anteriores, éstos se aplican a numerosas situaciones. Se ve también cómo diversos resultados sobre acotación de operadores ya probados por otros autores y con una demostración especial en cada caso, pueden ahora entenderse como aplicaciones directas de los mencionados teoremas.

Por ejemplo, el Teorema 2.4 en [CS2] y el 4.1(a) en [Sp1] (ya mencionados al principio de la sección 2) que caracterizan la acotación

$$T : L^{p_0}_{\text{dec}}(w_0) \to L^{p_1}(w_1)$$

para un operador en la semirrecta de tipo integral definido por (2.3) o el Teorema 4.1(b) en [Sp1] que considera el caso

$$T : L^{p_0}_{\text{inc}}(w_0) \to L^{p_1}(w_1),$$

son una aplicación directa del Corolario 2.14. Nótese, además, que (2.14) da la constante óptima. Otro ejemplo de aplicación del Corolario 2.14 es la fórmula de dualidad para $p \leq 1$:

$$\sup_{f\downarrow} \frac{\int_0^\infty fg}{\left(\int_0^\infty f^p v\right)^{1/p}} \equiv \sup_{r>0} \frac{\int_0^r g}{\left(\int_0^r v\right)^{1/p}},$$

probada en [CS1] (Teorema 2.12) y también en [Sp2] (Proposición 1(a)). Aquí se obtiene directamente con la constante óptima (también implícita en [CS1]). El Teorema 3.1 (en parte) en [GHS] puede verse como una aplicación directa del Teorema 3.2(b), etc.

Veamos un ejemplo de aplicación del Corolario 2.14 a un operador maximal en $\mathbb{R}^n$. Recordemos para ello la definición del operador maximal de Hardy-Littlewood M:

$$Mf(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f|, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n),$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos $Q \subset \mathbb{R}^n$ que contienen a x. Como veremos en el Capítulo 3, si $p_0 < 1$ y u es un peso en $\mathbb{R}^n$ es imposible la acotación $M : L^{p_0}(u) \to L^{p_1}(u)$. Sin embargo, tal como muestra la siguiente aplicación, la situación cambia si nos restringimos a funciones radiales decrecientes. En el enunciado que sigue u_0, u_1 son pesos en $\mathbb{R}^n$ (funciones positivas localmente integrables) mientras que $L^p_{\text{dec}}(u)$ representará la clase de las funciones positivas radiales y decrecientes en $L^p(u)$, $0 < p < \infty$.

Teorema 4.1. *Si* $0 < p_0 \leq 1$, $p_0 \leq p_1 < \infty$, *se tiene la acotación*

$$M \,:\, L^{p_0}_{\text{dec}}(u_0) \longrightarrow L^{p_1}(u_1)$$

si y solo si existe una constante C *tal que, para* $r > 0$,

$$\left(\int_{|x|<r} u_1 + \int_{|x|>r} \left(\frac{r}{|x|}\right)^{n\,p_1} u_1(x)\,dx\right)^{1/p_1} \leq C\left(\int_{|x|<r} u_0\right)^{1/p_0}.$$

Demostración. El resultado es una consecuencia inmediata del Corolario 2.14 aplicado a la clase regular $L = L^{p_0}_{\text{dec}}(u_0)$. Nótese que las funciones características en L son las del tipo $\chi_{\{|x|<r\}}$ con $r > 0$ y que

$$M\chi_{\{|x|<r\}}(x) \approx \chi_{\{|x|<r\}}(x) + \big(r/|x|\big)^n \chi_{\{|x|>r\}}(x)\,.$$

Así, la condición $\big\|M\chi_{\{|x|<r\}}\big\|_{L^{p_1}(u_1)} \leq C\,\big\|\chi_{\{|x|<r\}}\big\|_{L^{p_0}(u_0)}$, $r > 0$ (que según el Corolario 2.14 es necesaria y suficiente) es equivalente a la desigualdad en el enunciado. $\square$

Observación 4.2. Existen pesos que verifican la anterior condición. Por ejemplo, si $p_0 = p_1 = p \in (0,1]$ los pesos $u_0(x) = u_1(x) = |x|^\alpha$ (con $-n < \alpha < n(p-1)$) son válidos.

Una aplicación del Teorema 2.13 surge al considerar el operador maximal M_Ω de convolución con núcleo homogéneo no suave:

$$M_\Omega f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^n} \int_{|y|<r} \Omega\big(y/|y|\big)\big|f(x-y)\big|\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n),$$

donde $\Omega \geq 0$ es una función medible en la esfera unidad $\mathbb{S}^{n-1}$ de $\mathbb{R}^n$. El problema de encontrar mínimas condiciones de tamaño en Ω para que se dé la desigualdad débil (1,1):

$$M_\Omega \,:\, L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n), \tag{4.3}$$

es ya antiguo. Por el momento aún no se ha podido probar que (4.3) es cierto si $\Omega \in L^1$. Existen varios trabajos sobre este problema en los que se obtienen resultados cada vez más próximos a la condición anterior. Destaquemos [Fe] en donde se prueba (4.3) con la condicíón de que Ω tenga entropía finita; [S] en donde la condición es $\Omega \in B_\infty$ (superando el anterior resultado); [CR] con $\Omega \in L\log L$ (independiente de lo anterior) y [SjS] en donde se prueba que M_Ω es de tipo débil (1,1) sobre funciones radiales si $\Omega \in L^1$. Aquí obtendremos, como una sencilla aplicación del Teorema 2.13, la acotación (4.3) para funciones $\Omega \in L^{1,q}$, $q < 1$ cuyos conjuntos de nivel son "buenos". Con más precisión:

Definición 4.4.

(a) Diremos que un conjunto medible $E \subset \mathbb{S}^{n-1}$ es admisible (para el operador M_Ω) si para $\Omega = \chi_E$ se tiene,

$$\left\|M_\Omega f\right\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq C_n \|\Omega\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

donde C_n es una constante que sólo depende de la dimensión.

(b) Una función medible $\Omega \geq 0$ en $\mathbb{S}^{n-1}$ será admisible si sus conjuntos de nivel $\{\Omega > t\}$ son admisibles para todo $t > 0$.

Ejemplos 4.5.

(i) Todo conjunto $E \subset \mathbb{S}^{n-1}$ abierto y convexo es admisible (véase [StS]).

(ii) Una función positiva $\Omega \in \mathcal{M}(\mathbb{S}^{n-1})$ cuyos conjuntos de nivel son abiertos convexos es admisible.

(iii) Por lo tanto toda función $\Omega \geq 0$ monótona en $[0, 2\pi) = \mathbb{S}^1$ es admisible para M_Ω (dimensión 2).

(iv) La clase formada por las funciones admisibles en $\mathbb{S}^{n-1}$ es una clase regular (Ejemplos 2.5(ii)).

El resultado que sigue establece que para $0 < q < 1$, las funciones Ω admisibles de $L^{1,q}(\mathbb{S}^{n-1})$ satisfacen la acotación (4.3).

Teorema 4.6. *Si $0 < q < 1$ y $\Omega \geq 0$ es una función admisible en el espacio de Lorentz $L^{1,q}(\mathbb{S}^{n-1})$, entonces se tiene*

$$M_\Omega \,:\, L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n),$$

con constante mayorada por

$$C_n \left(\frac{q}{1-q}\right)^{1/q} \|\Omega\|_{1,q}$$

(aquí C_n sólo depende de la dimensión).

Demostración. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y consideremos el operador orden continuo

$$\Omega \longmapsto M_\Omega f$$

que actúa sobre la clase regular L de las funciones admisibles en $\mathbb{S}^{n-1}$. El Teorema 2.13 establece entonces que

$$\sup_{\Omega \in L} \frac{\big\|M_\Omega f\big\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)}}{\|\Omega\|_{L^{1,q}(\mathbb{S}^{n-1})}} \leq \left(\frac{1}{1-q}\right)^{1/q} \sup_{\chi_B \in L} \frac{\big\|M_{\chi_B} f\big\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)}}{\|\chi_B\|_{L^{1,q}(\mathbb{S}^{n-1})}}. \tag{4.7}$$

Pero cada uno de los conjuntos B que intervienen en el último supremo es admisible y por definición,

$$\big\|M_{\chi_B} f\big\|_{1,\infty} \leq C_n \|\chi_B\|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})} \|f\|_1 = C_n q^{1/q} \|\chi_B\|_{L^{1,q}(\mathbb{S}^{n-1})} \|f\|_1.$$

Sustituyendo ahora esta desigualdad en (4.7) se obtiene el enunciado. $\square$

Teniendo en cuenta los Ejemplos 4.5 podemos enunciar la siguiente consecuencia.

Corolario 4.8. *Sea $0 < q < 1$ y $0 \leq \Omega \in L^{1,q}(\mathbb{S}^{n-1})$. Entonces,*

(a) Si $n = 2$ y Ω es monótona en $[0, 2\pi) = \mathbb{S}^1$, M_Ω es de tipo débil (1,1) en $\mathbb{R}^2$.

(b) Si $n \geq 2$ y los conjuntos de nivel de Ω son abiertos convexos en $\mathbb{S}^{n-1}$, M_Ω es de tipo débil (1,1) en $\mathbb{R}^n$.

Veamos finalmente una aplicación elemental del Teorema 3.2 (desigualdad fuerte para dos operadores). Si w es un peso en $\mathbb{R}^+$ y X es un espacio de medida cualquiera se define para $0 < p, q \leq \infty$ el espacio de Lorentz $\Gamma_X^{p,q}(w)$ como la clase de funciones $f \in \mathcal{M}(X)$ tales que

$$\|f\|_{\Gamma_X^{p,q}(w)} = \|f^{**}\|_{L^{p,q}(w)} < +\infty$$

(véase [Lo1]). Este funcional es una cuasi-norma completa. Se escribe Γ^p en vez de $\Gamma^{p,q}$ si $p = q$. Definimos el espacio y la norma asociada de la manera usual:

$$\|f\|_{\Gamma_X^p(w)'} = \sup_{g \in \Gamma_X^p(w)} \frac{\int_X |fg|}{\|g\|_{\Gamma_X^p(w)}}.$$

Usando el Teorema 3.2 podemos describir esta última norma cuando X es resonante ([BS]) y $0 < p \leq 1$.

Teorema 4.9. *Sea $0 < p \leq 1$, (X, μ) un espacio de medida resonante y w un peso en $\mathbb{R}^+$. Sea*

$$V(t) = \frac{1}{\frac{1}{t^p}\int_0^t w + \int_t^\infty w(s)\,\frac{ds}{s^p}}, \quad 0 < t \leq \mu(X),$$

con V constante en $[\mu(X), \infty)$. Entonces,

$$\|f\|_{\Gamma_X^p(w)'} = \|f\|_{\Gamma_X^{p,\infty}(V')} = \sup_{t>0} V^{1/p}(t) f^{**}(t), \quad f \in \mathcal{M}(X),$$

si X es no-atómico y,

$$\|f\|_{\Gamma_X^p(w)'} = \sup_{n\geq 1} V^{1/p}(nb) f^{**}(nb), \quad f \in \mathcal{M}(X),$$

si X es totalmente atómico con átomos de medida $b > 0$.

Demostración. Al ser X resonante se tiene para $f \in \mathcal{M}(X)$,

$$\|f\|_{\Gamma_X^p(w)'} = \sup_{g\in\Gamma_X^p(w)} \frac{\int_0^\infty f^* g^*}{\|g\|_{\Gamma_X^p(w)}}$$

(véase [BS]). Sea $L^* = \{g^* \,:\, g \in \Gamma_X^p(w)\}$. Entonces L^* es una clase regular en $\mathbb{R}^+$ (c.f. Ejemplos 2.5) y la identidad anterior se puede escribir como

$$\|f\|_{\Gamma_X^p(w)'} = \sup_{g\in L^*} \frac{\int_0^\infty f^* g}{\|Ag\|_{L^p(w)}}$$

donde A es el operador de Hardy (ya que $h^{**} = A(h^*)$ para toda función $h \in \mathcal{M}(X)$). Como $0 < p \leq 1$, se puede aplicar el Teorema 3.2(c) para concluir, teniendo en cuenta que $A\chi_{(0,r)}(t) = \chi_{(0,r)}(t) + (r/t)\chi_{[r,\infty)}(t)$,

$$\|f\|_{\Gamma_X^p(w)'} = \sup_{E\subset X} \frac{\int_0^{\mu(E)} f^*}{\left\|A\chi_{[0,\mu(E))}\right\|_{L^p(w)}} = \sup_{t>0} V^{1/p}(t) f^{**}(t),$$

en el caso no-atómico y

$$\|f\|_{\Gamma_X^p(w)'} = \sup_{n\geq 1} V^{1/p}(nb) f^{**}(nb)$$

en el caso totalmente atómico. $\square$

Observación 4.10. En el caso $X = \mathbb{R}^+$ el resultado anterior ya aparece probado (salvo constantes) en [GHS].

Otras aplicaciones de los resultados de las secciones anteriores surgirán más adelante.

5. Desigualdades de tipo débil con pesos en $\mathbb{R}^+$

Incluimos en esta sección caracterizaciones para las siguientes acotaciones:

$$T\,:\,L^p(u)\longrightarrow L^{q,\infty}_{\mathrm{dec}}(v),$$
$$T\,:\,L^p(u)\longrightarrow L^{q,\infty}_{\mathrm{inc}}(v),$$
$$T\,:\,L^p_{\mathrm{dec}}(u)\longrightarrow L^{q,\infty}_{\mathrm{inc}}(v)$$

donde T es un operador en la semirrecta de tipo integral:

$$Tf(t)=\int_0^\infty k(t,s)f(s)\,ds,\qquad f\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^+) \tag{5.1}$$

y $0<p,q<\infty$.

Teorema 5.2. *Sea $0<p_1<\infty$ y T un operador integral definido como en (5.1) con núcleo $k\geq 0$. Supongamos que para toda $0\leq f\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$, $Tf\downarrow$. Entonces:*

(a) Si $0<p_0<1$, no se tiene nunca la desigualdad

$$\|Tf\|_{L^{p_1,\infty}(w_1)}\leq C\,\|f\|_{L^{p_0}(w_0)},\quad 0\leq f\in L^{p_0}(w_0),$$

con $C<\infty$.

(b) Si $p_0=1$, la condición necesaria y suficiente para ello es

$$W_1^{1/p_1}(t)k(t,s)\leq C\,w_0(s),\quad a.e.\ s>0,\quad t>0.$$

(c) Si $1<p_0<\infty$, la condición necesaria y suficiente es

$$\left(\int_0^\infty k(t,s)^{p_0'}w_0^{1-p_0'}(s)\,ds\right)^{1/p_0'}W_1^{1/p_1}(t)\leq C,\qquad t>0.$$

Demostración. Por un argumento estándar de aproximación, basta que consideremos el caso $w_0(s)>0$ a.e. $s>0$. Observemos también que, para funciones $f\geq 0$ decrecientes en $\mathbb{R}^+$,

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(w)}=\sup_{t>0}W^{1/p}(t)f(t).$$

La demostración de esto es un simple ejercicio.

Por definición,

$$C=\sup_{f\geq 0}\frac{\|Tf\|_{L^{p_1,\infty}(w_1)}}{\|f\|_{L^{p_0}(w_0)}}$$

y teniendo en cuenta que $Tf\downarrow$,

$$\begin{aligned}C &= \sup_{f\geq 0}\sup_{t>0}\frac{Tf(t)}{\|f\|_{L^{p_0}(w_0)}}W_1^{1/p_1}(t)\\ &= \sup_{t>0}W_1^{1/p_1}(t)\sup_{f\geq 0}\frac{\big\|\big(k(t,\cdot)w_0^{-1}\big)f\big\|_{L^1(w_0)}}{\|f\|_{L^{p_0}(w_0)}}.\end{aligned}$$

Si $p_0<1$ el espacio L^{p_0} tiene dual trivial (véase [Hu]) y el último supremo es $+\infty$. En el caso $p_0\geq 1$ se obtiene

$$C=\sup_{t>0}\big\|k(t,\cdot)w_0^{-1}\big\|_{L^{p_0'}(w_0)}W_1^{1/p_1}(t).$$

Al desarrollar esta expresión obtenemos las condiciones dadas en (a) (si $p_0=1$) y (b) (caso $p_0>1$). $\square$

Un ejemplo de aplicación del teorema anterior lo tenemos en el operador de Hardy conjugado

$$Qf(r)=\int_r^\infty f(t)\,\frac{dt}{t},\quad r>0,\quad 0\leq f\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^+). \tag{5.3}$$

Corolario 5.4. *Sea* $0<p_1<\infty$. *Entonces:*

(a) Si $0<p_0<1$, *no existen pesos* w_0,w_1 *verificando la desigualdad*

$$\|Qf\|_{L^{p_1,\infty}(w_1)}\leq C\,\|f\|_{L^{p_0}(w_0)},\quad 0\leq f\in L^{p_0}(w_0),$$

con $C<\infty$.

(b) Si $p_0=1$, *la condición necesaria y suficiente para que se dé la desigualdad anterior es*

$$W_1^{1/p_1}(t)\leq C\,tw_0(t),\qquad a.e.\ t>0.$$

(c) Si $1<p_0<\infty$, *la condición necesaria y suficiente es*

$$\left(\int_r^\infty w_0^{1-p_0'}(t)\,\frac{dt}{t^{p_0'}}\right)^{1/p_0'}W_1^{1/p_1}(r)\leq C,\qquad r>0.$$

La clave de la demostración del Teorema 5.2 está en el hecho de que $\|f\|_{L^{p,\infty}(w)}$ tiene una expresión sencilla cuando f es decreciente. Cuando f es creciente también hay una expresión sencilla para el anterior funcional. Es un simple ejercicio comprobar que

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(w)}=\sup_{t>0}f(t)\left(\int_t^\infty w\right)^{1/p},\qquad f\uparrow. \tag{5.5}$$

Ello nos permite enunciar un resultado análogo al Teorema 5.2.

Teorema 5.6. *Sea $0 < p_1 < \infty$ y T un operador integral definido como en (5.1) con núcleo $k \geq 0$. Supongamos que para toda $0 \leq f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+)$, $Tf \uparrow$. Entonces:*

(a) Si $0 < p_0 < 1$, no se tiene nunca la desigualdad

$$\|Tf\|_{L^{p_1,\infty}(w_1)} \leq C\,\|f\|_{L^{p_0}(w_0)}, \quad 0 \leq f \in L^{p_0}(w_0),$$

con $C < \infty$.

(b) Si $p_0 = 1$, la condición necesaria y suficiente para ello es

$$\left(\int_t^\infty w_1\right)^{1/p_1} k(t,s) \leq C\,w_0(s), \quad a.e.\ s > 0, \quad t > 0.$$

(c) Si $1 < p_0 < \infty$, la condición necesaria y suficiente es

$$\left(\int_0^\infty k(t,s)^{p_0'} w_0^{1-p_0'}(s)\,ds\right)^{1/p_0'} \left(\int_t^\infty w_1\right)^{1/p_1} \leq C, \qquad t > 0.$$

Demostración. Como en la demostración del Teorema 5.2, podemos suponer $w_0 > 0$. Por definición

$$C = \sup_{f \geq 0} \frac{\|Tf\|_{L^{p_1,\infty}(w_1)}}{\|f\|_{L^{p_0}(w_0)}}.$$

Como $Tf \uparrow$ se sigue, teniendo en cuenta la identidad (5.5),

$$\begin{aligned} C &= \sup_{f \geq 0} \sup_{t > 0} \frac{Tf(t)}{\|f\|_{L^{p_0}(w_0)}} \left(\int_t^\infty w_1\right)^{1/p_1} \\ &= \sup_{t>0} \left(\int_t^\infty w_1\right)^{1/p_1} \sup_{f \geq 0} \frac{\left\|\left(k(t,\cdot)w_0^{-1}\right)f\right\|_{L^1(w_0)}}{\|f\|_{L^{p_0}(w_0)}}, \end{aligned}$$

y a partir de aquí se razona como en la demostración del Teorema 5.2. □

Es el momento de recordar un importante resultado debido a E. Sawyer que será usado varias veces en esta tesis. La demostración original puede verse en [Sa2] y otras también en [CS2] y [Sp2].

Teorema 5.7 (E. Sawyer). *Si $1 < p < \infty$ se tiene,*

$$\begin{aligned} \sup_{f\downarrow} \frac{\|f\|_{L^1(w_1)}}{\|f\|_{L^p(w_0)}} &\approx \left(\int_0^\infty \left(\frac{W_1}{W_0}\right)^{p'-1} w_1\right)^{1/p'} \\ &\approx \left(\int_0^\infty \left(\frac{W_1}{W_0}\right)^{p'} w_0\right)^{1/p'} + \frac{W_1(\infty)}{W_0^{1/p}(\infty)}. \end{aligned}$$

Usando este último resultado podemos caracterizar la acotación

$$T\,:\,L^{p_0}_{\text{dec}}(w_0) \longrightarrow L^{p_1}_{\text{inc}}(w_1)$$

para un operador integral en la semirrecta.

Teorema 5.8. *Sea $0 < p_0, p_1 < \infty$ y T un operador integral definido como en (5.1) con núcleo $k \geq 0$. Supongamos que Tf es creciente si f es decreciente. Entonces se tiene la acotación*

$$T \,:\, L^{p_0}_{\mathrm{dec}}(w_0) \longrightarrow L^{p_1,\infty}(w_1)$$

si y sólo si

$$C = \sup_{t>0} \left(\int_t^\infty w_1 \right)^{1/p_1} B_0(t) < \infty,$$

(y C es la mejor constante) donde, para $t > 0$,

$$B_0(t) = \sup_{r>0} \frac{\int_0^r k(t,s)\,ds}{W_0^{1/p_0}(r)}$$

si $0 < p_0 \leq 1$ y,

$$\begin{aligned} B_0(t) &\approx \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{W_0(s)} \int_0^s k(t,x)\,dx \right)^{p_0'-1} k(t,s)\,ds \right)^{1/p_0'} \\ &\approx \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{W_0(s)} \int_0^s k(t,x)\,dx \right)^{p_0'} w_0(s)\,ds \right)^{1/p_0'} + \frac{\int_0^\infty k(t,x)\,dx}{W_0^{1/p_0}(\infty)} \end{aligned}$$

si $p_0 > 1$. Las constantes implícitas en los símbolos $\approx$ sólo dependen de p_0.

Demostración. La constante óptima de la acotación será

$$C = \sup_{f\downarrow} \frac{\|Tf\|_{L^{p_1,\infty}(w_1)}}{\|f\|_{L^{p_0}(w_0)}}$$

y teniendo en cuenta que $Tf \uparrow$ y la identidad (5.5),

$$C = \sup_{t>0} \left(\int_t^\infty w_1 \right)^{1/p_1} \sup_{f\downarrow} \frac{\int_0^\infty f(s)k(t,s)\,ds}{\left(\int_0^\infty f^{p_0} w_0 \right)^{1/p_0}} = \sup_{t>0} \left(\int_t^\infty w_1 \right)^{1/p_1} B_0(t),$$

donde

$$B_0(t) = \sup_{f\downarrow} \frac{\int_0^\infty f(s)k(t,s)\,ds}{\left(\int_0^\infty f^{p_0} w_0 \right)^{1/p_0}}, \quad t > 0.$$

Si $p_0 \leq 1$ el supremo anterior se obtiene aplicando el Corolario 2.14 (con $p_1 = 1$) a la clase regular $L = \mathcal{M}_{\mathrm{dec}}(\mathbb{R}^+)$ o, si se quiere, el Teorema 2.12 en [CS1]. Si $p_0 > 1$ se aplica la fórmula de dualidad de Sawyer (Teorema 5.7) para estimarlo. $\square$

6. Operador de Hardy y clases B_p

El operador de Hardy

$$Af(r) = \frac{1}{r}\int_0^r f, \quad r > 0, \quad 0 \leq f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^+),$$

jugará un papel importante en los siguientes capítulos. En particular estaremos interesados en la acotación

$$A : L^{p_0}_{\text{dec}}(w_0) \longrightarrow L^{p_1}(w_1) \tag{6.1}$$

y, también,

$$A : L^{p_0}_{\text{dec}}(w_0) \longrightarrow L^{p_1,\infty}(w_1). \tag{6.2}$$

El caso diagonal $A : L^p_{\text{dec}}(w) \to L^p(w)\,, p > 1$ fue resuelto por Ariño y Muckenhoupt en [AM1] (1990). La condición que debe verificar el peso w se conoce como condición B_p. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 6.3. Escribiremos $w \in B_p$ si

$$A : L^p_{\text{dec}}(w) \longrightarrow L^p(w)$$

y $w \in B_{p,\infty}$ si

$$A : L^p_{\text{dec}}(w) \longrightarrow L^{p,\infty}(w).$$

Análogamente ponemos $(w_0, w_1) \in B_{p_0,p_1}$ si se satisface la acotación (6.1) y decimos que $(w_0, w_1) \in B_{p_0,p_1,\infty}$ si se satisface (6.2).

Observación 6.4. Puesto que $L^p(w) \subset L^{p,\infty}(w)$ se tiene

$$B_{p_0,p_1} \subset B_{p_0,p_1,\infty}, \quad 0 < p_0, p_1 < \infty.$$

En particular $B_p \subset B_{p,\infty}$, $0 < p < \infty$.

La caracterización de los pesos satisfaciendo (6.2) se obtiene por aplicación directa del Teorema 3.3 en [CS2]:

Teorema 6.5 (Carro-Soria). *Sea $0 < p_1 < \infty$. Entonces,*

(a) Si $p_0 > 1$ las siguientes condiciones son equivalentes:

$$
\begin{aligned}
&(i) \quad (w_0, w_1) \in B_{p_0,p_1,\infty},\\
&(ii) \quad \left(\int_0^r \left(\frac{W_0(t)}{t} \right)^{1-p_0'} dt \right)^{1/p_0'} W_1^{1/p_1}(r) \le Cr, \quad r > 0,\\
&(iii) \quad \left(\int_0^r \left(\frac{W_0(t)}{t} \right)^{-p_0'} w_0(t)\, dt \right)^{1/p_0'} W_1^{1/p_1}(r) \le Cr,\\
&\qquad\ W_1^{1/p_1}(r) \le C W_0^{1/p_0}(r), \quad r > 0.
\end{aligned}
$$

(b) Si $p_0 \le 1$ son equivalentes:

$$
\begin{aligned}
&(i) \quad (w_0, w_1) \in B_{p_0,p_1,\infty},\\
&(ii) \quad \frac{W_1^{1/p_1}(r)}{r} \le C \frac{W_0^{1/p_0}(t)}{t}, \quad 0 < t < r.
\end{aligned}
$$

La acotación fuerte $A : L^{p_0}_{\mathrm{dec}}(w_0) \to L^{p_1}(w_1)$ no es tan sencilla y de hecho el caso $0 < p_1 < p_0 < 1$ no está todavía resuelto. El resultado que sigue caracteriza las clases B_p. La demostración de $(i) \Leftrightarrow (ii)$ se encuentra en [AM1] (caso $p \ge 1$) y es consecuencia del Corolario 2.14 en el caso $p < 1$. Las equivalencias con (iii) y (iv) están demostradas en [So].

Teorema 6.6 (Ariño-Muckenhoupt, J. Soria). *Para $0 < p < \infty$ los siguientes enunciados son equivalentes:*

$$
\begin{aligned}
&(i) \quad w \in B_p.\\
&(ii) \quad \int_r^\infty \left(\frac{r}{t} \right)^p w(t)\, dt \le C \int_0^r w, \quad r > 0.\\
&(iii) \quad \int_0^r \frac{t^{p-1}}{W(t)}\, dt \le C \frac{r^p}{W(r)}, \quad r > 0.\\
&(iv) \quad \int_0^r \frac{1}{W^{1/p}} \le C \frac{r}{W^{1/p}(r)}, \quad r > 0.
\end{aligned}
$$

Las clases B_{p_0,p_1} con $p_0 \le 1$, $p_0 \le p_1$ se deducen inmediatamente aplicando el Corolario 2.14. El caso $p_1, p_0 > 1$ fue resuelto por Sawyer ([Sa2]). Stepanov ([Sp2]) hizo el caso $0 < p_1 \le 1 < p_0$ y Sinnamon y Stepanov ([SS]) lo resuelven para $0 < p_1 < 1 = p_0$.

Estaremos también interesados en la acotación del operador de Hardy discreto A_d que actúa sobre sucesiones $f = \big(f(n)\big)_{n\ge 0}$ (es decir sobre funciones medibles f

en $\mathbb{N}^* = \{0, 1, 2, \dots\}$) en la forma

$$A_d f(n) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(k), \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

En el próximo capítulo nos será útil conocer la caracterización de la acotación

$$A_d : \ell^p_{\text{dec}}(w) \longrightarrow \ell^{p,\infty}(w), \tag{6.7}$$

y también,

$$A_d : \ell^{p,\infty}_{\text{dec}}(w) \longrightarrow \ell^{p,\infty}(w), \tag{6.8}$$

donde $w = \big(w(n)\big)_n$ es un peso en $\mathbb{N}^*$ es decir, una sucesión de números positivos, y $\ell^p(w)$ es el espacio de Lebesgue L^p en $\mathbb{N}^*$, con medida $\sum_n w(n)\delta_{\{n\}}$, es decir,

$$\ell^p(w) = \left\{ f = \big(f(n)\big)_n \subset \mathbb{C} \,:\, \|f\|_{\ell^p(w)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |f(n)|^p w(n) \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

$\ell^p_{\text{dec}}(w)$ es la clase de las sucesiones f positivas y decrecientes (usaremos la notación $f\downarrow$) en $\ell^p(w)$ mientras que $\ell^{p,\infty}(w)$ es la versión débil de $\ell^p(w)$ y está definido por la cuasi-norma

$$\|f\|_{\ell^{p,\infty}(w)} = \sup_{t>0} t^{1/p} f^*_w(t),$$

donde f^*_w es la reordenada decreciente de $f = \big(f(n)\big)_n$ en el espacio de medida $\big(\mathbb{N}^*, \sum_n w(n)\delta_{\{n\}}\big)$. De manera análoga a como hacíamos en $\mathbb{R}^+$, para cada peso w (resp. $w_0, u, \dots$) en $\mathbb{N}^*$ denotaremos por W (resp. $W_0, U, \dots$) a la sucesión,

$$W(n) = \sum_{k=0}^{n} w(k), \qquad n = 0, 1, 2, \dots \tag{6.9}$$

Con esta notación se comprueba sin dificultad que,

$$\|f\|_{\ell^{p,\infty}(w)} = \sup_{n\geq 0} W^{1/p}(n) f(n), \qquad f\downarrow. \tag{6.10}$$

Enunciaremos primero una versión discreta de la fórmula de dualidad de Sawyer (Teorema 5.7).

Teorema 6.11. *Sean* $w = \big(w(n)\big)_n$, $v = \big(v(n)\big)_n$ *pesos en* $\mathbb{N}^*$ *y sea*

$$S = \sup_{f\downarrow} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} f(n)v(n)}{\big(\sum_{n=0}^{\infty} f(n)^p w(n)\big)^{1/p}}.$$

Entonces,

(i) Si $0 < p \leq 1$,

$$S = \sup_{n\geq 0} \frac{V(n)}{W^{1/p}(n)},$$

con W *definido por (6.9) y* V *análogamente.*

(ii) Si $1 < p < \infty$,

$$\begin{aligned} S &\approx \left(\int_0^{\infty} \left(\frac{\widetilde{V}}{\widetilde{\widetilde{W}}} \right)^{p'-1} \tilde{v} \right)^{1/p'} \\ &\approx \left(\int_0^{\infty} \left(\frac{\widetilde{V}}{\widetilde{\widetilde{W}}} \right)^{p'} \tilde{w} \right)^{1/p'} + \frac{\widetilde{V}(\infty)}{\widetilde{W}^{1/p}(\infty)}, \end{aligned}$$

donde $\tilde{v}$ *es el peso en* $\mathbb{R}^+$ *definido por*

$$\tilde{v} = \sum_{n=0}^{\infty} v(n)\chi_{[n,n+1)}$$

y $\widetilde{V}(t) = \int_0^t \tilde{v}$ *y análogamente para* $\tilde{w}, \widetilde{W}$.

Además, las constantes implícitas en el símbolo $\approx$ *sólo dependen de* p.

Demostración. El apartado (i) se obtiene directamente aplicando el Corolario 2.14 con $p_1 = 1$, $p_0 = 0$, $X = Y = \mathbb{N}^*$, $T = \mathrm{Id}$ a la clase regular L de las sucesiones decrecientes en $\mathbb{N}^*$.

El apartado (ii) se deduce del Teorema 5.7 y para ello basta observar que

$$S = \sup_{\tilde{f}\in\mathcal{M}_{\mathrm{dec}}(\mathbb{R}^+)} \frac{\int_0^{\infty} \tilde{f}\tilde{v}}{\big(\int_0^{\infty} \tilde{f}^p \tilde{w}\big)^{1/p}}. \tag{6.12}$$

En efecto, si $f = \big(f(n)\big)_n$ es una sucesión decreciente en $\mathbb{N}^*$ y definimos $\tilde{f} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\chi_{[n,n+1)} \in \mathcal{M}_{\mathrm{dec}}(\mathbb{R}^+)$, es obvio que

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} f(n)v(n)}{\big(\sum_{n=0}^{\infty} f(n)^p w(n)\big)^{1/p}} = \frac{\int_0^{\infty} \tilde{f}\tilde{v}}{\big(\int_0^{\infty} \tilde{f}^p \tilde{w}\big)^{1/p}}.$$

Por lo tanto S es menor o igual que el segundo miembro de (6.12). Por otra parte, si $g \geq 0$ es una función decreciente en $\mathbb{R}^+$ y se define la sucesión decreciente $f(n) = \big(\int_n^{n+1} g^p\big)^{1/p}$, $n = 0, 1, \ldots$, se tiene

$$\int_0^\infty g^p \tilde{w} = \sum_n f(n)^p w(n),$$

mientras que, por la desigualdad de Hölder (ya que $p > 1$),

$$\int_0^\infty g\tilde{v} = \sum_n v(n) \int_n^{n+1} g \leq \sum_n v(n) \left(\int_n^{n+1} g^p \right)^{1/p} = \sum_n v(n) f(n).$$

Así que,

$$\frac{\int_0^\infty g\tilde{v}}{\big(\int_0^\infty g^p \tilde{w}\big)^{1/p}} \leq \frac{\sum_{n=0}^\infty f(n)v(n)}{\big(\sum_{n=0}^\infty f(n)^p w(n)\big)^{1/p}} \leq S.$$

Con ello queda probado (6.12) y el apartado (ii) se sigue aplicando el Teorema 5.7. $\square$

El siguiente enunciado caracteriza la acotación (6.7).

Teorema 6.13.

(a) Si $0 < p \leq 1$ *se tiene* $A_d : \ell^p_{\mathrm{dec}}(w) \longrightarrow \ell^{p,\infty}(w)$ *si y sólo si*

$$\text{(6.14)} \qquad \frac{W^{1/p}(n)}{n+1} \leq C \, \frac{W^{1/p}(m)}{m+1}, \qquad 0 \leq m \leq n.$$

(b) Si $1 < p < \infty$ *son equivalentes:*

(i) $A_d : \ell^p_{\mathrm{dec}}(w) \longrightarrow \ell^{p,\infty}(w)$,

(ii) $\tilde{w} = \sum_{n=0}^\infty w(n) \chi_{[n,n+1)} \in B_p$,

(iii) $\sum_{k=0}^n \frac{1}{W^{1/p}(k)} \leq C \, \frac{n+1}{W^{1/p}(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

Demostración. La acotación $A_d : \ell^p_{\mathrm{dec}}(w) \longrightarrow \ell^{p,\infty}(w)$ del enunciado es equivalente (c.f. 6.10) a la desigualdad,

$$W^{1/p}(n) A_d f(n) \leq C \|f\|_{\ell^p(w)}, \qquad f \downarrow, \, n = 0, 1, 2, \ldots$$

De otra manera,

$$\frac{W^{1/p}(n)}{n+1}\sup_{f\downarrow}\frac{\sum_{k=0}^{n} f(k)}{\big(\sum_{k=0}^{\infty} f(k)^p w(k)\big)^{1/p}} \leq C. \tag{6.15}$$

Así, la parte (a) del teorema se obtiene aplicando el Teorema 6.11(i). Nótese además que la condición (6.14) se obtiene aplicando (6.15) a sucesiones del tipo $f = (1,1,1,\dots,1,0,0,\dots)$ (funciones características en $\mathbb{N}^*$) y por lo tanto sigue siendo necesaria aún en el caso $p > 1$.

Para probar la parte (b), es decir el caso $p > 1$, notamos como ya hicimos en la demostración del Teorema 6.11, que el supremo discreto en (6.15) se puede substituir por un supremo sobre funciones decrecientes en $\mathbb{R}^+$ con pesos $\chi_{(0,n+1)}$, $\tilde{w}$:

$$\sup_{g\downarrow}\frac{\int_0^{n+1} g}{\big(\int_0^\infty g^p\tilde{w}\big)^{1/p}}.$$

Por lo tanto (6.15) es equivalente a

$$\widetilde{W}^{1/p}(n+1)Ag(n+1) \leq C\|g\|_{L^p(\tilde{w})}, \qquad g\downarrow,\ n=0,1,2,\dots$$

De hecho la desigualdad anterior vale (con constante $2C$) susbstituyendo $n+1$ por cualquier valor $t > 0$. En efecto, si $0 < t < 1$,

$$\begin{aligned}\widetilde{W}^{1/p}(t)Ag(t) &= \big(w(0)t\big)^{1/p}\,t^{-1}\int_0^t g\\ &\leq \big(w(0)t\big)^{1/p}\,t^{-1}\bigg(\int_0^t g^p\bigg)^{1/p} t^{1/p'}\\ &\leq \bigg(\int_0^t g^p\tilde{w}\bigg)^{1/p} \leq \|g\|_{L^p(\tilde{w})},\end{aligned}$$

y si $t\in[n,n+1),\ n\geq 1$, se tiene usando (6.14),

$$\widetilde{W}^{1/p}(t)Ag(t) \leq \widetilde{W}^{1/p}(n+1)Ag(n) \leq 2C\widetilde{W}^{1/p}(n)Ag(n) \leq \|g\|_{L^p(\tilde{w})}.$$

Resumiendo, en el caso $p > 1$ la acotación $A_d : \ell^p_{\text{dec}}(w) \longrightarrow \ell^{p,\infty}(w)$ del operador de Hardy discreto es equivalente a la desigualdad

$$\widetilde{W}^{1/p}(t)Ag(t) \leq C\|g\|_{L^p(\tilde{w})}, \qquad t > 0,$$

válida para toda función $g \downarrow$ en $\mathbb{R}^+$. Pero esto significa que se tiene la acotación del operador de Hardy continuo,

$$A : L^p_{\rm dec}(\tilde{w}) \longrightarrow L^{p,\infty}(\tilde{w}),$$

lo que equivale a decir (Definición 6.3) que $\tilde{w} \in B_{p,\infty} = B_p$ (las clases B_p y $B_{p,\infty}$ coinciden si $p > 1$ (véase [Ne1])). Hemos probado así la equivalencia entre (i) y (ii). Para ver la equivalencia con (iii) primero obsérvese que esta condición también implica (6.14) ya que si $m \leq n$,

$$\frac{m+1}{W^{1/p}(m)} \leq \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{W^{1/p}(k)} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{W^{1/p}(k)}$$

y por (iii), la última expresión está mayorada por $C(n+1)/W^{1/p}(n)$. Así, en la demostración de (ii)$\Leftrightarrow$(iii) podemos suponer que (6.14) es cierto. Con ello (y teniendo en cuenta de definición de $\tilde{w}$) es inmediato probar la equivalencia entre la condición $\tilde{w} \in B_p$ (es decir (ii)), que según el Teorema 6.6(iv) es

$$\int_0^r \frac{1}{\widetilde{W}^{1/p}} \leq C\, \frac{r}{\widetilde{W}^{1/p}(r)}, \qquad r > 0,$$

y la condición (iii):

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{W^{1/p}(k)} \leq C\, \frac{n+1}{W^{1/p}(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Basta discretizar la integral y notar que

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{\widetilde{W}^{1/p}} \approx \frac{1}{W^{1/p}(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad \square$$

La caracterización de la acotación (6.8) se demuestra más rápidamente y es equivalente a la condición b(iii) del teorema anterior.

Teorema 6.16. *Para $0 < p < \infty$ se tiene*

$$A_d : \ell^{p,\infty}_{\rm dec}(w) \longrightarrow \ell^{p,\infty}(w)$$

si y sólo si

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{W^{1/p}(k)} \leq C\, \frac{n+1}{W^{1/p}(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Demostración. La acotación del enunciado es equivalente a la desigualdad

$$(6.17) \qquad \|A_d f\|_{\ell^{p,\infty}(w)} \leq C, \qquad f \downarrow,\ \|f\|_{\ell^{p,\infty}(w)} \leq 1.$$

Ahora bien si f es decreciente $\|f\|_{\ell^{p,\infty}(w)} = \sup_n W^{1/p}(n) f(n)$ (cf. (6.10)) y $\|f\|_{\ell^{p,\infty}(w)} \leq 1$ implica $f(n) \leq W^{-1/p}(n)$, $\forall n$. Por otra parte la sucesión $W^{-1/p}$ es decreciente y con norma 1. Todo ello nos dice que $f = W^{-1/p}$ es la sucesión que da el máximo en la parte izquierda de (6.17) y la caracterización será

$$\|A_d W^{-1/p}\|_{\ell^{p,\infty}(w)} = C < \infty.$$

Al expresar esto último (teniendo en cuenta que $A_d W^{-1/p}$ es decreciente y la expresión (6.10) para la norma en $\ell^{p,\infty}(w)$ de tales sucesiones) se obtiene la condición del enunciado. $\square$

Corolario 6.18. *Si* $1 < p < \infty$ *son equivalentes:*

$$(i) \quad \tilde{w} = \sum_{n=0}^{\infty} w(n) \chi_{[n,n+1)} \in B_p,$$

$$(ii) \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{W^{1/p}(k)} \leq C \, \frac{n+1}{W^{1/p}(n)}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$(iii) \quad A_d : \ell^p_{\text{dec}}(w) \longrightarrow \ell^{p,\infty}(w),$$

$$(iv) \quad A_d : \ell^{p,\infty}_{\text{dec}}(w) \longrightarrow \ell^{p,\infty}(w),$$

$$(v) \quad A_d : \ell^p_{\text{dec}}(w) \longrightarrow \ell^p(w).$$

Demostración. Las cuatro primeras equivalencias son consecuencia de los dos teoremas anteriores. Por otra parte, (v) implica (iii) y (i) implica

$$A : L^p_{\text{dec}}(\tilde{w}) \longrightarrow L^p(\tilde{w}).$$

Es inmediato comprobar que esta acotación del operador de Hardy en $\mathbb{R}^+$ implica la correspondiente del Hardy discreto A_d, es decir (v). $\square$

CAPÍTULO 2

ESPACIOS Λ DE LORENTZ

1. Introducción

Si $0 < p < \infty$, el espacio de Lorentz clásico $\Lambda^p_X(w)$ asociado al espacio de medida (X, μ) y al peso w en $\mathbb{R}^+$ es la clase de funciones medibles en X,

$$\Lambda^p_X(w) = \left\{ f \,:\, \|f\|_{\Lambda^p_X(w)} = \left(\int_0^\infty (f^*(t))^p w(t)\, dt \right)^{1/p} < \infty \right\},$$

donde f^* es la reordenada decreciente de f. Estos espacios, introducidos por primera vez por G.G. Lorentz en [Lo2] para el caso $X = (0, l)$, constituyen una generalización de los espacios $L^{p,q}$ y como veremos, puede definirse su versión "débil", los así denotados $\Lambda^{p,\infty}_X(w)$.

En este capítulo estudiaremos propiedades de estos espacios completando resultados parciales ya conocidos: Lorentz ([Lo2], 1951) los define y estudia en el caso $X = (0, l) \subset \mathbb{R}^+$; A. Haaker ([Ha], 1970) hace un estudio bastante completo suponiendo $X = \mathbb{R}^+$ y $w \notin L^1$, dando resultados sobre normabilidad y caracterizando la existencia de dual; E. Sawyer ([Sa2], 1990) caracteriza la normabilidad de los espacios fuertes $\Lambda^p_X(w)$ si $X = \mathbb{R}^n$ y $p > 1$; M.J. Carro-J. Soria ([CS1], 1993) caracterizan la cuasi-normabilidad y las inclusiones mutuas. Los mismos autores junto con A. García del Amo ([CGS], 1996) caracterizan la normabilidad de los espacios fuertes en el caso X no-atómico, $\mu(X) = \infty$ y J. Soria ([So]) caracteriza la normabilidad de los espacios débiles en este mismo caso. Aquí se resuelven todas estas cuestiones y otras en el contexto general de un espacio X resonante. De este modo se incluye también el caso $X = \mathbb{N}^*$ que da lugar a espacios de sucesiones que generalizan a los espacios ℓ^p. Estos espacios (los llamados espacios de Lorentz clásicos de sucesiones $d(w, p)$) habían sido estudiados (exceptuando [AEP]) con el peso w decreciente, lo que asegura que $\|\cdot\|_{\Lambda^p(w)}$ es una norma si $p \geq 1$. Aquí se verá el caso general y se incluirá, también como novedad, la versión débil de éstos (los espacios $d^\infty(w,p)$) .

El plan del capítulo es el siguiente. Después de la definición y propiedades inmediatas en la sección 2, se estudian en la sección 3 los espacios de Lorentz cuasi-normados (para lo cual sólo hace falta una mínima condición de crecimiento sobre la primitiva de w). Se ven ahí propiedades de densidad de las funciones simples y de absoluta continuidad de la cuasi-norma. La sección 4 es la más extensa y desarrolla la cuestión de la dualidad. Se diferencia aquí, el espacio dual Λ^*, formado por formas lineales, del espacio asociado Λ', que es un retículo formado por aquellas funciones cuyo producto con las de Λ es integrable. Entre otras cuestiones, caracterizaremos aquí cuándo $\Lambda' = \Lambda^*$ y cuándo estos espacios son nulos. En la sección 5 damos condiciones necesarias y suficientes para que estos espacios sean normables. Finalmente, en la sección 6, estudiamos la interpolación y la acotación de operadores orden continuos en estos espacios, generalizando de esta forma el teorema de Marcinkiewicz y algunos resultados del capítulo anterior.

Notación 1.1. Denotaremos $\mathbb{R}^+ = (0,\infty)$. Usaremos las letras $w, \tilde{w}, w_0, \dots$ para designar pesos en $\mathbb{R}^+$ que serán funciones medibles no negativas, no idénticamente nulas y localmente integrables en $[0,\infty)$. Asociaremos a cada w (resp. $\tilde{w}, w_0, \dots$) la función

$$W(r) = \int_0^r w < \infty\,, \quad 0 \le r \le \infty,$$

(resp. $\tilde{W}, W_0, \dots$).

Si (X,μ) es un espacio de medida, $\mathcal{M}(X)$ denotará la clase formada por las funciones medibles en X a valores complejos o en $[0,\infty]$. Si $f \in \mathcal{M}(X)$ definimos su función de distribución λ_f como

$$\lambda_f(t) = \mu\big(\{|f| > t\}\big), \quad t \ge 0.$$

La reordenada decreciente de f será la función f^* definida como

$$f^*(s) = \inf\big\{t > 0\,:\,\lambda_f(t) \le s\big\}, \quad s \ge 0.$$

f^* no es más que la función de distribución de λ_f y por lo tanto $f^*(s) = 0$ si $s \ge \mu(X)$. En $\mathbb{R}^n$ y en $\mathbb{R}^+$ se considerará por defecto la medida de Lebesgue, pero a veces estaremos interesados en el caso $(X,\mu)=(\mathbb{R}^+,w(t)dt)$. Entonces escribiremos si conviene, λ_f^w y f_w^* en lugar de λ_f y f^*, para especificar que estamos considerando la medida $w(t)dt$. Consideraremos también la función $f^{**}(t)=\frac{1}{t}\int_0^t f^*,\ t>0$.

Recordamos que para $0<p,q\le\infty$, el espacio de Lorentz $L^{p,q}(X)$ asociado al espacio de medida (X,μ) es la clase

$$L^{p,q}(X)=\left\{f\in\mathcal{M}(X)\,:\,\|f\|_{L^{p,q}}=\left(\int_0^\infty \left(t^{1/p}f^*(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}<\infty\right\}$$

($\|f\|_{L^{p,q}}=\sup_{t>0}t^{1/p}f^*(t)$ en el caso $q=\infty$). Si $(X,\mu)=(\mathbb{R}^+,w(t)dt)$ escribiremos $L^{p,q}(w)$. En el caso $p=q$,

$$L^{p,q}(X)=L^p(X)=\left\{f\in\mathcal{M}(X)\,:\,\|f\|_{L^p}=\left(\int_X|f|^p\right)^{1/p}<\infty\right\}.$$

El símbolo $f\downarrow$ (resp. $f\uparrow$) significa que $f:\mathbb{R}^+\to[0,\infty)$ es decreciente (resp. creciente). La clase de tales funciones se denotará por $\mathcal{M}_{\text{dec}}(\mathbb{R}^+)$ (resp. $\mathcal{M}_{\text{inc}}(\mathbb{R}^+)$). Análogamente, si $\Omega=(\Omega_n)_n$ es una sucesión, la notación $\Omega\downarrow$ significará que es positiva y decreciente. Si $p\in[1,\infty]$ será $p'=p/(p-1)$ el exponente conjugado. Si $A\subset X$ es medible χ_A denotará la función característica de A ($\chi_A(x)=0$ salvo si $x\in A$ en cuyo caso vale 1). Las indeterminaciones $0\cdot\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ se tomarán iguales a 0.

2. Introducción a los espacios $\Lambda_X^p(w)$

En esta sección (X,μ) denotará, salvo que en su momento se especifique otra cosa, un espacio de medida cualquiera.

Definición 2.1. Sea w un peso en $\mathbb{R}^+$. Para $0<p<\infty$ se define el funcional $\|\cdot\|_{\Lambda_X^p(w)}:\mathcal{M}(X)\to[0,\infty]$ como

$$\|f\|_{\Lambda_X^p(w)}=\left(\int_0^\infty (f^*)^p w\right)^{1/p},\quad f\in\mathcal{M}(X).$$

El espacio de Lorentz $\Lambda^p(w)=\Lambda_X^p(w)$ es entonces la clase

$$\Lambda_X^p(w)=\left\{f\in\mathcal{M}(X)\,:\,\|f\|_{\Lambda_X^p(w)}<\infty\right\}.$$

Obsérvese que $\|f\|_{\Lambda^p_X(w)} = \|f^*\|_{L^p(w)}$. Esto permite ampliar la definición anterior: Para $0 < p, q \le \infty$ denotamos

$$\Lambda^{p,q}_X(w) = \big\{ f \in \mathcal{M}(X) \,:\, \|f\|_{\Lambda^{p,q}_X(w)} = \|f^*\|_{L^{p,q}(w)} < \infty \big\}.$$

De ahora en adelante, siempre que aparezca el símbolo $\Lambda^p_X(w)$ o $\Lambda^{p,q}_X(w)$ sin haber definido previamente w, se entenderá que éste es un peso en $\mathbb{R}^+$ no idénticamente nulo en $\big(0, \mu(X)\big)$. La letra Λ denotará cualquiera de los espacios definidos anteriormente. Escribiremos Λ^p como abreviación de $\Lambda^p_X(w)$ si X y w se sobreentienden. Análogamente $\Lambda(w), \Lambda_X, \Lambda^p(w)$, etc. Nótese que $\Lambda^{\infty,q} = \{0\}$ si $0 < q < \infty$.

Estos espacios fueron introducidos por Lorentz en [Lo1] y [Lo2] para el caso $X = (0, l) \subset \mathbb{R}^+$. Son invariantes por reordenación y constituyen una amplia generalización de los espacios L^p de Lebesgue y de los de Lorentz $L^{p,q}$ (véase el Ejemplo 2.3(1) y 2.3(2)). Los espacios $\Lambda^p(w)$ definidos aquí se suelen denominar espacios de Lorentz “clásicos”para distinguirlos de los $L^{p,q}$.

Observación 2.2.

(i) $f^*(t) = 0$ si $t \ge \mu(X)$. Por lo tanto es irrelevante el comportamiento del peso w en $\big[\mu(X), \infty\big)$. Sin pérdida de generalidad, supondremos siempre que w se anula en $\big[\mu(X), \infty\big)$ si $\mu(X) < \infty$. Nótese que con este convenio siempre tendremos $w \in L^1(\mathbb{R}^+)$ si $\mu(X) < \infty$.

(ii) Si $w \notin L^1(\mathbb{R}^+)$ se verifica que $\lim_{t\to\infty} f^*(t) = 0$ si $f \in \Lambda^{p,q}(w)$ $(p < \infty)$.

(iii) Las funciones simples con soporte en conjuntos de medida finita están en $\Lambda^{p,q}(w)$. Si $w \in L^1$ entonces $L^\infty \subset \Lambda^{p,q}(w)$ y toda función simple está en $\Lambda^{p,q}(w)$.

(iv) Obsérvese que $\Lambda^{p,p}(w) = \Lambda^p(w)$, $0 < p \le \infty$.

Ejemplo 2.3.

(i) En el caso $w = 1$ se tiene, para $0 < p, q \le \infty$, $\Lambda^{p,q}_X(1) = L^{p,q}(X)$. Aquí $W(t) = t,\ t \ge 0$.

(ii) Si $0 < p, q < \infty$, $\Lambda^q_X(t^{q/p-1}) = L^{p,q}(X)$ con igualdad de “normas”. En este caso $W(t) = \frac{p}{q} t^{q/p},\ t \ge 0$.

(iii) Si $w = \chi_{(0,1)}$, el espacio $\Lambda^1_X(w) = \Lambda^1_X\big(\chi_{(0,1)}\big)$ contiene a $L^\infty(X)$ y $W(t) = t,\ 0 \le t < 1$. En este caso el funcional $\|\cdot\|_{\Lambda^1}$ es una norma y el espacio es "funcional de Banach" (Definición 4.3).

(iv) Si $X = \mathbb{N}^* = \{0, 1, 2, \dots\}$ consideraremos la medida de contar. Las funciones medibles en X son sucesiones $f = \big(f(n)\big)_{n\ge 0} \subset \mathbb{C}$ y

$$\|f\|_{\Lambda^p_X(w)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \big(f^*(n)\big)^p \Omega_n\right)^{1/p},$$

donde para cada $n = 0, 1, 2, \dots,\ \Omega_n = \int_n^{n+1} w = W(n+1) - W(n)$. Así, $\Lambda^p_X(w)$ sólo depende de la sucesión de números positivos $\Omega = (\Omega_n)_{n=0}^\infty$ y se suele denotar como $d(\Omega, p)$. En el caso débil,

$$\|f\|_{\Lambda^{p,\infty}_X(w)} = \sup_{n\ge 0}\left(\sum_{k=0}^{n} \Omega_k\right)^{1/p} f^*(n),$$

y usaremos el símbolo $d^\infty(\Omega, p)$ para denotar a $\Lambda^{p,\infty}_X(w)$ en este caso. Siempre que aparezca la expresión $d(\Omega, p)$ o $d^\infty(\Omega, p)$ supondremos que Ω es una sucesión de números positivos aunque ésta no se haya definido previamente.

Es claro que tanto $d(\Omega, p)$ como $d^\infty(\Omega, p)$ están siempre incluidos en $\ell^\infty(\mathbb{N}^*)$ y, si $\Omega \in \ell^1(\mathbb{N}^*)$ se tiene de hecho $d(\Omega, p) = d^\infty(\Omega, p) = \ell^\infty(\mathbb{N}^*)$ (con normas equivalentes). El caso interesante es pues $\Omega \notin \ell^1(\mathbb{N}^*)$. Entonces cada uno de estos dos espacios está incluido en $c_0(\mathbb{N}^*)$, el espacio de las sucesiones con límite 0 y, para cada $f \in d(\Omega, p)$ ($f \in d^\infty(\Omega, p)$) $\big(f^*(n)\big)_{n\ge 0}$ es la reordenación decreciente de la sucesión $\big(f(n)\big)_{n\ge 0}$.

Si la sucesión $\Omega = (\Omega_n)_n$ del ejemplo anterior es decreciente y $p \ge 1$, los $d(\Omega, p)$ son espacios de Banach. Este caso ha sido estudiado por diversos autores ([Ga], [CH], [Al], [Po], [NO], [AM2], etc.). En [AEP] se estudia el caso Ω creciente. Consideraremos el caso mas general.

El siguiente lema será de utilidad. Puede verse su demostración en [CS1].

Lema 2.4 (Carro-Soria). *Sea $0 < p < \infty$ y $v \ge 0$ una función medible en $\mathbb{R}^+$. Sea $V(r) = \int_0^r v$, $0 \le r < \infty$. Entonces, para toda función f decreciente se tiene*

$$\int_0^\infty f^p v = \int_0^\infty p t^{p-1} V\big(\lambda_f(t)\big)\, dt.$$

El resultado que sigue nos da expresiones equivalentes para el funcional $\|\cdot\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)}$. En particular vemos que éste depende sólo de W.

Proposición 2.5. *Para* $0 < p, q < \infty$ *y* f *medible en* X,

$$\begin{aligned}
&(i) \quad \|f\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)} = \left(\int_0^\infty pt^{q-1} W^{q/p}\big(\lambda_f(t)\big)\, dt\right)^{1/q}, \\
&(ii) \quad \|f\|_{\Lambda_X^{p}(w)} = \left(\int_0^\infty pt^{p-1} W\big(\lambda_f(t)\big)\, dt\right)^{1/p}, \\
&(iii) \quad \|f\|_{\Lambda_X^{p,\infty}(w)} = \sup_{t>0} tW^{1/p}\big(\lambda_f(t)\big) = \sup_{t>0} f^*(t) W^{1/p}(t).
\end{aligned}$$

Demostración.

(i) Puesto que toda función y su reordenada decreciente tienen la misma distribución (véase [BS]) se tiene,

$$W\big(\lambda_f(t)\big) = W\big(\lambda_{f^*}(t)\big) = \int_0^{\lambda_{f^*}(t)} w = \int_{\{f^*>t\}} w = \lambda_{f^*}^w(t).$$

Haciendo uso del Lema 2.4 y recordando que la función de distribución de $\lambda_{f^*}^w$ es $(f^*)_w^*$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^\infty pt^{q-1} W^{q/p}\big(\lambda_f(t)\big)\, dt\right)^{1/q} &= \left(\int_0^\infty pt^{q-1} \big(\lambda_{f^*}^w(t)\big)^{q/p}\, dt\right)^{1/q} \\
&= \left(\int_0^\infty t^{q/p-1} \int_0^{(f^*)_w^*(t)} qs^{q-1}\, ds\, dt\right)^{1/q} \\
&= \left(\int_0^\infty \big((f^*)_w^*(t)\big)^q t^{q/p-1}\, dt\right)^{1/q} \\
&= \|f\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)}.
\end{aligned}$$

(ii) Es consecuencia inmediata de (i).

(iii) La primera igualdad se obtiene como sigue:

$$\|f\|_{\Lambda_X^{p,\infty}(w)} = \|f^*\|_{L^{p,\infty}(w)} = \sup_{t>0} t\big(\lambda_{f^*}^w(t)\big)^{1/p} = \sup_{t>0} tW^{1/p}\big(\lambda_f(t)\big).$$

La segunda igualdad se demuestra de manera muy sencilla para funciones simples y, por monotonía, se deduce el caso general. $\square$

Observación 2.6.

(i) Al comparar 2.5(i) y 2.5(ii) vemos que, para $q < \infty$, $\|f\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)} = \|f\|_{\Lambda_X^q(\tilde{w})}$ donde $\tilde{w}(t) = W^{q/p-1}(t)w(t)$, $0 < t < \mu(X)$. Por lo tanto, todos los espacios de Lorentz definidos aquí se reducen a los espacios $\Lambda_X^p(w)$ y su versión débil $\Lambda_X^{p,\infty}(w)$.

(ii) De 2.5(iii) se deduce que $\Lambda_X^{p,\infty}(w) = \Lambda_X^{q,\infty}\big((q/p)W^{q/p-1}w\big)$ para $0 < p, q < \infty$.

En el caso de los espacios $L^{p,\infty}(X)$ se sabe que la cuasi-norma $\|f\|_{p,\infty}$ es, para cada $q < p$ equivalente al funcional

$$\sup_{E\subset X} \big\|f\chi_E\big\|_q \, \mu(E)^{1/p-1/q}.$$

Esto es la llamada Condición de Kolmogorov y su demostración puede verse por ejemplo en [GR]. Una versión análoga de esta propiedad se verifica también en el contexto de los espacios $\Lambda^{p,\infty}(w)$.

Proposición 2.7. *Si $0 < q < p < \infty$ y $f \in \mathcal{M}(X)$,*

$$\|f\|_{\Lambda_X^{p,\infty}(w)} \leq \sup_{E\subset X} \big\|f\chi_E\big\|_{\Lambda_X^q(w)} W\big(\mu(E)\big)^{1/p-1/q} \leq \left(\frac{p}{p-q}\right)^{1/q} \|f\|_{\Lambda_X^{p,\infty}(w)},$$

donde el supremo se toma sobre todos los conjuntos medibles $E \subset X$.

Demostración. Sea

$$S = \sup_{E\subset X} \big\|f\chi_E\big\|_{\Lambda_X^q(w)} W\big(\mu(E)\big)^{1/p-1/q}.$$

Para demostrar la primera desigualdad sea para $t > 0$, $E = \{|f| > t\}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
S &\geq \big\|f\chi_E\big\|_{\Lambda_X^q(w)} W\big(\mu(E)\big)^{1/p-1/q} \\
&= \left(\int_0^\infty \big[\big(f\chi_E\big)^*(s)\big]^q w(s)\, ds\right)^{1/q} W\big(\mu(E)\big)^{1/p-1/q} \\
&\geq \left(t^q \int_0^{\mu(E)} w\right)^{1/q} W\big(\mu(E)\big)^{1/p-1/q} \\
&= t\, W\big(\mu(E)\big)^{1/p} = t\, W\big(\lambda_f(t)\big)^{1/p},
\end{aligned}$$

y tomando el supremo en $t > 0$ se concluye $\|f\|_{\Lambda_X^{p,\infty}(w)} \leq S$ (c.f. Proposición 2.5(iii)).

Para demostrar la segunda desigualdad sea, para cada $f \in \mathcal{M}(X)$, $E \subset X$, $a = \|f\|_{\Lambda_X^{p,\infty}(w)} W\big(\mu(E)\big)^{-1/p}$. Entonces, por la Proposición 2.5(iii),

$$\begin{aligned}
\big\|f\chi_E\big\|^q_{\Lambda^q_X(w)} &= \int_0^\infty qt^{q-1}W\big(\lambda_{f\chi_E}(t)\big)\,dt \\
&= \int_0^a qt^{q-1}W\big(\lambda_{f\chi_E}(t)\big)\,dt + \int_a^\infty qt^{q-1}W\big(\lambda_{f\chi_E}(t)\big)\,dt \\
&\le W\big(\mu(E)\big)\int_0^a qt^{q-1}\,dt + \int_a^\infty qt^{q-1}\frac{\|f\|^p_{\Lambda_X^{p,\infty}(w)}}{t^p}\,dt \\
&= \frac{p}{p-q}\,\|f\|^q_{\Lambda_X^{p,\infty}(w)}W\big(\mu(E)\big)^{1-q/p}.
\end{aligned}$$

Así,

$$\big\|f\chi_E\big\|_{\Lambda^q_X(w)}W\big(\mu(E)\big)^{1/p-1/q} \le \big(\frac{p}{p-q}\big)^{1/q}\,\|f\|_{\Lambda_X^{p,\infty}(w)}. \qquad \square$$

En la siguiente proposición enunciamos algunas propiedades elementales de estos espacios. Su demostración es rutinaria (véase [BS]).

Proposición 2.8. *Para* $0 < p,q \le \infty$ *y* $f,g,f_k,\ k \ge 1$, *funciones medibles en* X *se tiene:*

(i) $|f| \le |g| \Rightarrow \|f\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)} \le \|g\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)}$,

(ii) $\|tf\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)} = |t|\|f\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)}, \quad t \in \mathbb{C}$,

(iii) $0 \le f_k \le f_{k+1} \underset{k}{\longrightarrow} f$ *a.e.* $\Rightarrow \|f_k\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)} \underset{k}{\longrightarrow} \|f\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)}$,

(iv) $\big\|\liminf_k |f_k|\big\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)} \le \liminf_k \|f_k\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)}$,

(v) $\Lambda_X^{p,q_0}(w) \subset \Lambda_X^{p,q_1}(w),\ 0 < q_0 \le q_1 \le \infty$,

(vi) Si $W\big(\mu(X)\big) < \infty$ *entonces, para* $0 < p_0 < p_1 \le \infty$, *se tiene* $\Lambda_X^{p_1,q}(w) \subset \Lambda_X^{p_0,r}(w),\ 0 < r \le \infty$,

(vii) $\chi_E \in \Lambda_X^{p,q}(w)$ *si* $\mu(E) < \infty$.

Se entiende que en las inclusiones (v) y (vi) se da también la desigualdad de "normas" correspondiente.

La siguiente propiedad relaciona la convergencia en norma $\|\cdot\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)}$ con la convergencia en medida y tiene que ver con la "completitud" de nuestros espacios. Para que todo vaya bien necesitamos que W sea positiva.

Proposición 2.9. *Supongamos* $W > 0$ *en* $(0,\infty)$ *y sean* $\Lambda = \Lambda_X^{p,q}(w)$ *un espacio de Lorentz y* $(f_n)_n$ *una sucesión de funciones medibles en* X.

(i) *Si* $\lim_{m,n} \|f_m - f_n\|_\Lambda = 0$ *entonces* $(f_n)_n$ *es de Cauchy en medida y existe* $f \in \mathcal{M}(X)$ *tal que* $\lim \|f - f_n\|_\Lambda = 0$.

(ii) *Si* $f \in \mathcal{M}(X)$ *y* $\lim_n \|f - f_n\|_\Lambda = 0$ *entonces* $(f_n)_n$ *converge a* f *en medida y existe una parcial* $(f_{n_k})_k$ *convergente a* f *a.e.*

Demostración. El caso $q < p = \infty$ es trivial y en el caso $p = q = \infty$, $\Lambda^{p,q} = L^\infty$ y el resultado ya es conocido. Si $p < \infty$ es inmediato, a partir de la Proposición 2.5, que

$$W\big(\lambda_f(r)\big) \leq C_{p,q} \frac{\|f\|^p_{\Lambda^{p,q}_X(w)}}{r^p}, \quad r > 0, \quad 0 < q \leq \infty.$$

Con las hipótesis de (i) se tiene entonces, para todo $r > 0$, $W\big(\lambda_{f_n - f_m}(r)\big) \underset{m,n}{\longrightarrow} 0$, lo cual (dado que $W > 0$) implica $\lambda_{f_n - f_m}(r) \underset{m,n}{\longrightarrow} 0$, $r > 0$, o sea, $(f_n)_n$ es de Cauchy en medida. Sabemos (véase [Ce]) que esto implica la convergencia en medida de $(f_n)_n$ hacia una cierta f medible y la existencia de una parcial $(f_{n_k})_k$ que converge a f a.e. La Proposición 2.8(iv) nos dice entonces que $\|f - f_n\|_\Lambda \leq \liminf_k \|f_{n_k} - f_n\|_\Lambda$ y, por lo tanto, $\lim_n \|f - f_n\|_\Lambda = 0$.

La demostración de (ii) es análoga. $\square$

Cuasi-normabilidad.

El funcional $\|\cdot\|_\Lambda$ no tiene por qué ser una cuasi-norma y de hecho Λ puede no ser siquiera un espacio vectorial. El siguiente lema caracteriza la cuasi-normabilidad de estos espacios que, como se comprueba, sólo depende del peso w y del espacio de medida X.

Lema 2.10. *Si* $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$ *el espacio* $\Lambda^{p,q}_X(w)$ *es cuasi-normado si y sólo si*

$$0 < W\big(\mu(A \cup B)\big) \leq C\Big(W\big(\mu(A)\big) + W\big(\mu(B)\big)\Big),$$

para todo par de conjuntos medibles $A, B \subset X$ *con* $\mu(A \cup B) > 0$.

Demostración. Suficiencia: La hipótesis indica que $W\big(\mu(A)\big) > 0$ si $\mu(A) > 0$. Si $\|f\|_{\Lambda^{p,q}} = 0$, por la Proposición 2.5, se tiene que $W\big(\lambda_f(t)\big) = 0$, $t > 0$, y por lo anterior, $\lambda_f(t) = 0$ para todo $t > 0$, es decir $f = 0$ a.e. Queda por probar la desigualdad cuasi-triangular y es suficiente hacerlo para funciones positivas. Sean pues $0 \le f, g \in \Lambda^{p,q}(w)$ y $t > 0$. Entonces $\{f + g > t\} \subset \{f > t/2\} \cup \{g > t/2\}$ y la hipótesis implica

$$W\big(\lambda_{f+g}(t)\big) \le C\big(W\big(\lambda_f(t/2)\big) + W\big(\lambda_g(t/2)\big)\big).$$

Como C no depende de t se verifica (Proposición 2.5) que

$$\|f + g\|_{\Lambda^{p,q}(w)} \le C_{p,q}\big(\|f\|_{\Lambda^{p,q}(w)} + \|g\|_{\Lambda^{p,q}(w)}\big).$$

Necesidad: Si A, B son dos conjuntos medibles con $\mu(A \cup B) > 0$, $\chi_{A\cup B} \le \chi_A + \chi_B$ y dado que $\Lambda^{p,q}(w)$ es cuasi-normado, se tiene (Proposición 2.5),

$$\begin{aligned} 0 < C_{p,q} W^{1/p}\big(\mu(A \cup B)\big) &= \|\chi_{A\cup B}\|_{\Lambda^{p,q}(w)} \\ &\le \|\chi_A + \chi_B\|_{\Lambda^{p,q}(w)} \\ &\le C\big(\|\chi_A\|_{\Lambda^{p,q}(w)} + \|\chi_B\|_{\Lambda^{p,q}(w)}\big) \\ &= C'_{p,q}\big(W^{1/p}\big(\mu(A)\big) + W^{1/p}\big(\mu(B)\big)\big) \end{aligned}$$

lo que equivale a la condición del enunciado. $\square$

El resultado anterior motiva la siguiente definición.

Definición 2.11. Sea w un peso en $\mathbb{R}^+$. Escribimos $W \in \Delta_2(X)$ (o $W \in \Delta_2(\mu)$) si W verifica la condición del Lema 2.10. Si $X = \mathbb{R}$ escribiremos simplemente $W \in \Delta_2$.

Así, el Lema 2.10 nos dice que para $0 < p < \infty$, $0 < q \le \infty$,

$$\Lambda^{p,q}_X(w) \text{ es cuasi-normado } \Leftrightarrow W \in \Delta_2(X).$$

La condición $W \in \Delta_2$ sólo depende del peso w y es de fácil verificación, tal como muestra la proposición que sigue. Su demostración es inmediata.

Proposición 2.12. *Son equivalentes:*

(i) $W \in \Delta_2$,

(ii) $W(2r) \le CW(r),\ r > 0$,

(iii) $W(t + s) \le C\big(W(t) + W(s)\big),\ t, s > 0$,

y en cualquiera de estos casos, $W(t) > 0,\ t > 0.$

La condición $W \in \Delta_2$ es suficiente para la cuasi-normabilidad de $\Lambda_X^{p,q}(w)$, independientemente del espacio de medida X y en el caso no-atómico es, de hecho, equivalente. Este es el contenido del siguiente teorema. El segundo apartado fue probado por M.J. Carro y J. Soria en [CS1]. La demostración de (i) es inmediata.

Teorema 2.13 (Carro-Soria). *Sea* $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$.

(i) Si $W \in \Delta_2$, $\Lambda^{p,q}(w)$ *es cuasi-normado.*

(ii) Si X *es no-atómico,* $\Lambda_X^{p,q}(w)$ *es cuasi-normado si y sólo si* $W \in \Delta_2$.

Es decir $\Delta_2 \subset \Delta_2(X)$ *para todo* X *y si* X *es no-atómico* $\Delta_2 = \Delta_2(X)$ *(se supone siempre que* w *se anula fuera de* $\big(0, \mu(X)\big)$*).*

Observación 2.14.

El caso $p = q = \infty$ es claro. Son equivalentes:

(i) $\Lambda_X^{\infty}(w)$ es cuasi-normado.

(ii) $\Lambda_X^{\infty}(w) = L^{\infty}(X)$ (con igualdad de normas).

(iii) $\big(\Lambda_X^{\infty}(w), \|\cdot\|_{\Lambda_X^{\infty}(w)}\big)$ es espacio de Banach.

(iv) $W\big(\mu(A)\big) > 0$ si $\mu(A) > 0,\ A \subset X$.

Cualquiera de estas condiciones se da si $W \in \Delta_2(X)$.

Recordamos ahora una conocida definición que será de uso común en este trabajo.

Definición 2.15. Un espacio de medida resonante ([BS]) es un espacio σ-finito X que es no-atómico o bien una unión (numerable a lo sumo) de átomos con igual medida.

Si X es no-atómico ya tenemos caracterizado (Teorema 2.13) cuándo Λ_X es cuasi-normado. El siguiente teorema completa la caracterización en el caso X resonante. Su demostración es inmediata.

Teorema 2.16. *Sea* X *un espacio atómico con átomos de medida común* $b > 0$. *Entonces* $W \in \Delta_2(X)$ *si y sólo si*

$$W\big(2nb\big) \leq C\, W(nb), \qquad n \geq 1.$$

En particular, si $0 < p < \infty$ los espacios $d(\Omega, p)$ y $d^\infty(\Omega, p)$ (Ejemplos 2.3(iv)) son cuasi-normados si y sólo si

$$\sum_{n=1}^{2N} \Omega_{n-1} \leq C \sum_{n=1}^{N} \Omega_{n-1}, \quad N = 1, 2, \ldots$$

3. Espacios de Lorentz cuasi-normados

En esta sección (X, μ) será, por defecto, un espacio de medida σ-finito cualquiera y los espacios de Lorentz que aparezcan se supondrán sobre X. Estudiaremos aquí la topología y algunas propiedades elementales de los espacios de Lorentz cuasi-normados. Como ya se ha visto (Lema 2.10) la condición para que $\Lambda_X(w)$ sea cuasi-normado es $W \in \Delta_2(X)$.

Como en todo espacio cuasi-normado, se considera en Λ la topología inducida por la cuasi-norma $\|\cdot\|_\Lambda$: $G \subset \Lambda$ es abierto si para toda función $f \in G$ existe $r > 0$ tal que $\{g \in \Lambda : \|f - g\|_\Lambda < r\} \subset G$. Sabemos que existe en Λ una distancia d invariante por traslaciones y un exponente $p \in (0, 1]$ tal que

$$d(f, g) \leq \|f - g\|_\Lambda^p \leq 2d(f, g), \quad f, g \in \Lambda. \tag{3.1}$$

Esto es un hecho común en todo espacio cuasi-normado (véase [BL]). La desigualdad (3.1) nos dice que la topología de Λ coincide con la inducida por la métrica d y así, Λ es espacio métrico. De la Proposición 2.9 se deduce, además, que es completo. Λ es pues un espacio cuasi-Banach. Estos y otros hechos se resumen en el enunciado que sigue. La demostración es obvia a partir de las consideraciones anteriores y la Proposición 2.9 (véase también [BL] para la propiedad (iii) y [BS] para la (iv)).

Teorema 3.2. *Todo espacio de Lorentz cuasi-normado Λ es cuasi-Banach. En particular Λ es un F-espacio (espacio vectorial topológico metrizable con una distancia invariante por traslaciones y completo). Toda función en Λ es finita a.e. y, si $(f_n)_n \subset \Lambda$,*

(i) $(f_n)_n$ es de Cauchy si y sólo si $\lim_{m,n} \|f_n - f_m\|_\Lambda = 0$ y entonces es también de Cauchy en medida.

(ii) $\Lambda - \lim f_n = f$ *si y sólo si* $\lim_n \|f - f_n\|_\Lambda = 0$ *y entonces* $(f_n)_n$ *converge a* f *en medida y existe una parcial que converge a* f *a.e.*

(iii) Si C *es la constante de la cuasi-norma* $\|\cdot\|_\Lambda$ *en* Λ *y* $p = \log(2)/\log(2C)$, *existe una* p*-norma en* Λ *equivalente a* $\|\cdot\|_\Lambda^p$. *Si* $\sum_n \|f_n\|_\Lambda^p < \infty$ *la serie* $\sum_n f_n$ *es convergente en* Λ.

(iv) Si $\Lambda_X \subset \widetilde{\Lambda}_X$ *y ambos son espacios de Lorentz cuasi-normados, la inclusión es continua.*

(v) Si F *es otro espacio cuasi-normado, un operador lineal* $T : \Lambda \to F$ *es continuo si y sólo si* $\sup_{\|f\|_\Lambda \leq 1} \|Tf\|_F < \infty$.

Norma absolutamente continua.

Estudiaremos ahora la propiedad equivalente al teorema de la convergencia dominada de los espacios L^p: Si $\lim_n f_n(x) = f(x)$ a.e. x y $|f_n| \leq g \in L^p$ entonces $\|f_n - f\|_p \underset{n}{\longrightarrow} 0$. En general, en un espacio funcional de Banach (sobre X σ-finito) una función g como la anterior se dice que tiene norma absolutamente continua. Un espacio en el que toda función tiene norma absolutamente continua verifica el teorema de la convergencia dominada (véase [BS]). Trasladamos estos conceptos a nuestro contexto:

Definición 3.3. Sea $\big(E, \|\cdot\|\big)$, $E \subset \mathcal{M}(X)$, un espacio cuasi-normado. Una función $f \in E$ se dice que tiene norma absolutamente continua si

$$\lim_{n\to\infty} \big\|f\chi_{A_n}\big\| = 0$$

para toda sucesión decreciente de conjuntos medibles $(A_n)_n$ con $\chi_{A_n} \to 0$ a.e. Si toda función en E tiene la propiedad anterior se dice que E tiene norma absolutamente continua.

La relación de esta definición con el teorema de la convergencia dominada (en el sentido que aquí le hemos dado) queda patente en la siguiente proposición. Su demostración es (salvo alguna menor modificación) idéntica a la de [BS] (pp. 14–16) para espacios funcionales de Banach y nos ahorraremos su inclusión aquí.

Proposición 3.4. *Si* Λ *es un espacio de Lorentz cuasi-normado y* $f \in \Lambda$, *los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) f tiene norma absolutamente continua.

(ii) $\lim_n \|f\chi_{E_n}\|_\Lambda = 0$ *si* $(E_n)_n$ *es una sucesión de conjuntos medibles con* $\chi_{E_n} \to 0$ *a.e.*

(iii) $\lim_n \|f_n\|_\Lambda = 0$ *si* $|f_n| \leq |f|$ *y* $\lim_n f_n = 0$ *a.e.*

(iv) $\lim_n \|g - g_n\|_\Lambda = 0$ *si* $|g_n| \leq |f|$ *y* $\lim_n g_n = g$ *a.e.*

El enunciado que sigue muestra que, salvo el caso especial $\mu(X) = \infty$ y $w \in L^1$, los espacios $\Lambda^p_X(w)$ tienen norma absolutamente continua.

Teorema 3.5. *Sea* $0 < p < \infty$ *y* $\Lambda^p_X(w)$ *cuasi-normado. Entonces,*

(i) Si $\mu(X) < \infty$, $\Lambda^p_X(w)$ *tiene norma absolutamente continua.*

(ii) Si $\mu(X) = \infty$, $\Lambda^p_X(w)$ *tiene norma absolutamente continua si y sólo si* $w \notin L^1$.

Demostración. (i) Suponemos $\mu(X) < \infty$ y tenemos que ver que si $0 \leq f \in \Lambda^p_X(w)$ y $(g_n)_n$ es una sucesión de funciones medibles verificando

$$0 \leq g_n \leq f \in \Lambda, \quad g_n \to 0 \text{ a.e.},$$

se tiene $\lim_n \|g_n\|_\Lambda = 0$. Al ser la medida del espacio finita, la convergencia puntual implica la convergencia en medida (véase [Ce]) y se tiene $\lim_n \lambda_{g_n}(t) = 0,\ 0 < t < \infty$. En particular $W\big(\lambda_{g_n}(t)\big) \to 0,\ t > 0$. Como $W\big(\lambda_{g_n}(t)\big) \leq W\big(\lambda_f(t)\big)$ y $f \in \Lambda^p$, de la Proposición 2.5(ii) y el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue se sigue $\lim_n \|g_n\|_\Lambda = 0$.

(ii) Supongamos $w \notin L^1,\ 0 \leq f \in \Lambda^p_X(w)$ y $(g_n)_n$ como arriba. La hipótesis sobre w implica $\lambda_f(t) < \infty,\ t > 0$ y los conjuntos $E_k = \{f \leq 1/k\}$ tienen complementario de medida finita y, si $f_k = f\chi_{E_k}$ se tiene $f^*_k \leq 1/k$ y también $f^*_k \leq f^*$. Por el teorema de la convergencia dominada $\|f_k\|_\Lambda \to 0$. Así, dado $\epsilon > 0$ existe un $E \subset X$ medible con $\mu(X \setminus E) < \infty$ y tal que $\|f\chi_E\|_\Lambda < \epsilon$. Entonces las funciones $g_n\chi_{X\setminus E}$ están en el caso del apartado (i) y $\|g_n\chi_{X\setminus E}\|_\Lambda \to 0$. Se tiene

$$\limsup_n \|g_n\|_\Lambda \leq C \limsup_n \big(\|g_n\chi_{X\setminus E}\|_\Lambda + \|g_n\chi_E\|_\Lambda\big) \leq C\|f\chi_E\|_\Lambda \leq C\epsilon.$$

Esto es cierto para todo $\epsilon > 0$ y se concluye $\lim_n \|g_n\|_\Lambda = 0$. Esto prueba la suficiencia en (ii). Para ver la necesidad supongamos $\mu(X) = \infty,\ w \in L^1$ y veamos que $\Lambda_X^p(w)$ no tiene n.a.c. En este caso, dado que $X=\bigcup_{n=1}^\infty X_n$ con $\mu(X_n)<\infty$ para todo n, los conjuntos $E_n=\bigcup_{k=n}^\infty X_k$ verifican $\chi_{E_n}\to 0$ a.e. y también, $\chi_{E_n}^*=1$. Así, $\lim_n\|\chi_{E_n}\|_{\Lambda^p}=\|w\|_1^{1/p}>0$ y la función $1\in\Lambda_X^p(w)$ no tiene n.a.c. y $\Lambda_X^p(w)$ tampoco. $\square$

Corolario 3.6. *Si $0<p<\infty$ y $\Lambda_X^p(w)$ es cuasi-normado, toda función en este espacio que se anula en el complementario de un conjunto de medida finita, tiene norma absolutamente continua.*

La cuestión análoga en el caso de los espacios débiles $\Lambda_X^{p,\infty}(w)$ se resuelve (para el caso X resonante) en el siguiente resultado. Tal como se muestra, estos espacios no tienen, salvo en un caso trivial, norma absolutamente continua

Teorema 3.7. *Si X es resonante, $0<p<\infty$ y $W\in\Delta_2(X)$, $\Lambda_X^{p,\infty}(w)$ tiene norma absolutamente continua si y sólo si X es una unión finita de átomos.*

Demostración. Si X es una unión finita de átomos la cuestión es trivial. Supondremos que no es así y distinguiremos dos casos:

(i) En el caso X no-atómico, como la función $W^{-1/p}$ es decreciente y continua en $\mathbb{R}^+$, existe una función medible $f\geq 0$ en X tal que $f^*(t)=W^{-1/p}(t)$, $0<t<\mu(X)$. Por lo tanto $\|f\|_{\Lambda^{p,\infty}(w)}=\sup_t W^{1/p}(t)f^*(t)=1$ y $f\in\Lambda^{p,\infty}(w)$. Los conjuntos $E_n=\chi_{\{f>n\}}$, $n=1,2,\dots$ forman una sucesión decreciente con $\chi_{E_n}\to 0$ a.e. y sin embargo, $\|f\chi_{E_n}\|_{\Lambda^{p,\infty}}=1$ para todo n, ya que

$$\big(f\chi_{E_n}\big)^*(t)=f^*(t)\chi_{\big[0,\lambda_f(n)\big)}(t)=W^{-1/p}(t)\chi_{\big[0,\lambda_f(n)\big)}(t),\quad 0<t<\infty.$$

Así pues, f no tiene norma absolutamente continua y $\Lambda_X^{p,\infty}(w)$ tampoco.

(ii) Si $X=\bigcup_{n=0}^\infty X_n$ con cada X_n átomo de medida constante $b>0$ y $X_n\cap X_m=\emptyset$, $n\neq m$, la función

$$f=\sum_{n=0}^\infty W^{-1/p}\big((n+1)b\big)\chi_{X_n}$$

está en $\Lambda_X^{p,\infty}(w)$ y tiene norma 1. Los conjuntos $E_N=\bigcup_{n=N}^\infty X_n$, $N=1,2,\dots$ forman una sucesión decreciente con $\chi_{E_n}\to 0$ a.e. y, para cada N,

$$\big(f\chi_{E_N}\big)^*(nb)=W^{-1/p}\big((n+N+1)b\big),\quad n=0,1,2,\dots$$

Usando que f^* es constante en cada intervalo $\big[nb,(n+1)b\big)$ y el Teorema 2.16, obtenemos

$$\begin{aligned}\big\|f\chi_{E_N}\big\|_{\Lambda^{p,\infty}} &= \sup_{t>0} W^{1/p}(t)\big(f\chi_{E_N}\big)^*(t)\\ &= \sup_{n\geq 1} W^{1/p}(nb)W^{-1/p}\big((n+N)b\big)\\ &\geq \big(W(Nb)W^{-1}(2Nb)\big)^{1/p}\\ &\geq C^{-1/p}.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\lim_N \big\|f\chi_{E_N}\big\|_{\Lambda^{p,\infty}} \neq 0$ y $\Lambda^{p,\infty}_X(w)$ no tiene norma absolutamente continua. $\square$

Definición 3.8.

$$L_0^\infty(X) = \big\{f \in L^\infty(X) \,:\, \mu\big(\{f \neq 0\}\big) < \infty\big\}.$$

Podemos enunciar un resultado parcial positivo para los espacios $\Lambda^{p,\infty}$.

Proposición 3.9. *Si $0 < p < \infty$ y $W \in \Delta_2(X)$, toda función en $L_0^\infty(X)$ tiene norma absolutamente continua en $\Lambda^{p,\infty}_X(w)$.*

Demostración. Si $f \in L_0^\infty$ sea $Y = \{f \neq 0\} \subset X$. Entonces, si $(A_n)_n$ es una sucesión de conjuntos medibles con $\chi_{A_n} \to 0$ a.e., las funciones $\big(f\chi_{A_n}\big)_n$ son nulas en el complementario de Y y $\lim_n f(x)\chi_{A_n}(x) = 0$ a.e. $x \in Y$. Como Y tiene medida finita, se sigue del Teorema de Egorov (véase [Ce] por ejemplo), que la convergencia de las funciones anteriores es casi uniforme. Así, dado $\epsilon > 0$, existe un conjunto $Y_\epsilon \subset Y$ de medida menor que ϵ y tal que $f\chi_{A_n} \to 0$ uniformemente en $X \setminus Y_\epsilon$. Por lo tanto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\big|f(x)\chi_{A_n}(x)\big| < \epsilon, \quad x \in X \setminus Y_\epsilon,\ n \geq n_0.$$

Sea $n \geq n_0$. Entonces:

(i) si $t \geq \|f\|_\infty$,

$$tW^{1/p}\big(\lambda_{f\chi_{A_n}}(t)\big) = tW^{1/p}(0) = 0,$$

(ii) si $\epsilon \leq t \leq \|f\|_\infty$,

$$tW^{1/p}\big(\lambda_{f\chi_{A_n}}(t)\big) \leq tW^{1/p}\big(\mu(Y_\epsilon)\big) \leq \|f\|_\infty W^{1/p}(\epsilon),$$

(iii) si $0 \le t < \epsilon$,

$$tW^{1/p}\big(\lambda_{f\chi_{A_n}}(t)\big) \le \epsilon W^{1/p}\big(\mu(Y)\big)$$

y de la Proposición 2.5(iii) se deduce que

$$\big\|f\chi_{A_n}\big\|_{\Lambda_X^{p,\infty}(w)} \le \max\big\{\|f\|_\infty W^{1/p}(\epsilon), \epsilon W^{1/p}\big(\mu(Y)\big)\big\}, \qquad n \ge n_0,$$

es decir,

$$\limsup_n \big\|f\chi_{A_n}\big\|_{\Lambda_X^{p,\infty}(w)} \le \max\big\{\|f\|_\infty W^{1/p}(\epsilon), \epsilon W^{1/p}\big(\mu(Y)\big)\big\}.$$

Como esta desigualdad vale para todo $\epsilon > 0$ y $\lim_{t\to 0} W(t) = 0$, concluimos

$$\lim_n \big\|f\chi_{A_n}\big\|_{\Lambda_X^{p,\infty}(w)} = 0. \qquad \square$$

Densidad de las funciones simples y de L^∞.

Pasamos ahora a estudiar la densidad de las funciones simples y de L^∞ en los espacios de Lorentz cuasi-normados. La cuestión se resuelve de manera totalmente favorable en el caso de los espacios Λ^p (salvo el caso $\mu(X) = \infty,\ w \in L^1$). El comportamiento de la densidad en los espacios $\Lambda^{p,\infty}$ es más irregular. No es cierto aquí que las funciones simples sean densas y, de hecho, ni siquiera L^∞ es siempre denso en $\Lambda^{p,\infty}$.

Definición 3.10. Denotaremos por $\mathcal{S} = \mathcal{S}(X)$ la clase de las funciones simples en X. Es decir

$$\mathcal{S} = \big\{f \in \mathcal{M}(X) \,:\, \mathrm{card}\big(f(X)\big) < \infty\big\}.$$

$\mathcal{S}_0$ serán las funciones simples con soporte en un conjunto de medida finita:

$$\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}_0(X) = \big\{f \in \mathcal{S} \,:\, \mu\big(\{f \ne 0\}\big) < \infty\big\}.$$

Es claro que $\mathcal{S}_0 \subset L_0^\infty \subset \Lambda$ para todo espacio de Lorentz Λ.

Lema 3.11. *Si $f \in \mathcal{M}(X)$ existe una sucesión $(s_n)_n \subset \mathcal{S}$ verificando*

(i) $\lim_n s_n(x) = f(x),\ x \in X,$

(ii) $\big(|s_n(x)|\big)_n$ *es una sucesión creciente para todo $x \in X$,*

(iii) $|f - s_n| \le |f|,\ n \in \mathbb{N}.$

Además, si f es acotada $s_n \to f$ uniformemente. En particular $\mathcal{S}$ es denso en L^∞.

Demostración. Sabemos (véase [Ce]) que el lema es cierto si $f \geq 0$. El caso general se deduce inmediatamente de éste, vía la descomposición $f = g^+ - g^- + i(h^+ - h^-)$ con $g^+, g^-, h^+, h^- \geq 0$. $\square$

Teorema 3.12. *Si $\Lambda(w)$ es un espacio de Lorentz cuasi-normado,*

$$\mathcal{S}_0 \subset L_0^\infty \subset \Lambda(w)$$

y $\mathcal{S}_0$ es denso en L_0^∞ con la topología de Λ. Si $w \in L^1$,

$$\mathcal{S} \subset L^\infty \subset \Lambda(w)$$

y $\mathcal{S}$ es denso en L^∞ pero, en este caso L_0^∞ no es denso en L^∞, si $\mu(X) = \infty$ (siempre con la topología de Λ).

Demostración. Las inclusiones son obvias. Por otra parte, si $f \in L_0^\infty$ y $E = \{f \neq 0\}$, $\mu(E) < \infty$ y si $(s_n)_n \subset \mathcal{S}$ es la sucesión del lema anterior, como $|s_n| \leq |f|$, estas funciones también tienen soporte en E y $(s_n)_n \subset \mathcal{S}_0$. Además $\|f - s_n\|_{L^\infty} \to 0$ y por lo tanto,

$$\|f - s_n\|_\Lambda \leq \big\| \|f - s_n\|_{L^\infty} \chi_E \big\|_\Lambda = \|f - s_n\|_{L^\infty} \|\chi_E\|_\Lambda \to 0.$$

Esto prueba que $\mathcal{S}_0$ es denso en L_0^∞. Si $w \in L^1$, $L^\infty \subset \Lambda$ y esta inclusión es continua (Teorema 3.2). Como $\mathcal{S}$ es denso en $\big(L^\infty, \|\cdot\|_{L^\infty}\big)$ (Lema 3.11), se sigue que $\mathcal{S}$ es denso en L^∞ con la topología de Λ. En este caso $1 \in L^\infty \subset \Lambda$ y si $g \in L_0^\infty$, $|g - 1| = 1$ en un conjunto de medida infinita si $\mu(X) = \infty$. Así $(1-g)^* \geq 1$ y $\|1 - g\|_\Lambda \geq C_\Lambda > 0$. Se deduce que 1 no puede ser límite en Λ de funciones en L_0^∞ y este conjunto no es denso en L^∞. $\square$

Teorema 3.13. *Sea $0 < p < \infty$ y $W \in \Delta_2(X)$. Entonces,*

(i) Si $w \notin L^1$, L_0^∞ es denso en $\Lambda^p(w)$.

(ii) Si $w \in L^1$, L^∞ es denso en $\Lambda^p(w)$. Sin embargo en este caso $L_0^\infty(X)$ no es denso en $\Lambda_X^p(w)$, si $\mu(X) = \infty$.

Demostración. Veamos que L^∞ (L_0^∞ en el caso $w \notin L^1$) es denso en Λ^p. Si $f \in \Lambda^p$, la Proposición 2.5 nos dice que $\lim_{t\to\infty} \lambda_f(t) = 0$. Si para cada $n = 1, 2, \ldots$

definimos $f_n = f\chi_{\{|f|\le n\}}$, como $f - f_n = f\chi_{\{|f|>n\}}$, $(f-f_n)^* = f^*\chi_{\left[0,\lambda_f(n)\right)}$ y se tiene que $\lim_n (f-f_n)^*(t) = 0$, $t > 0$. Por otra parte $(f-f_n)^* \le f^*$ y del teorema de la convergencia dominada se sigue $\|f-f_n\|_{\Lambda^p} \to 0$. Esto prueba que $L^\infty \cap \Lambda^p$ es denso en Λ^p. Si $w \in L^1$, el primero de estos espacios es L^∞ y ya hemos acabado. Si $w \notin L^1$ sólo hay que ver que toda función en $L^\infty \cap \Lambda^p$ es límite (en Λ^p) de funciones en L_0^∞. Pero si $g \in L^\infty \cap \Lambda^p$ y $w \notin L^1$, $\lim_{t\to\infty} g^*(t) = 0$ y las funciones $g_n = g\chi_{\{|g|>g^*(n)\}} \in L_0^\infty$, $n = 1, 2, \ldots$, verifican $(g-g_n)^* \le g^*(n) \to 0$ y dado que $(g-g_n)^* \le g^*$, el teorema de la convergencia dominada nos dice que $\|g-g_n\|_{\Lambda^p} \to 0$.

Sólo queda por probar que L_0^∞ no es denso en $\Lambda^p(w)$ si $w \in L^1$ y $\mu(X) = \infty$. Pero en este caso sabemos por el Teorema 3.12, que L_0^∞ no es denso en L^∞ y tampoco puede serlo en $\Lambda^p \supset L^\infty$. $\square$

En el caso débil tenemos el siguiente resultado de densidad.

Teorema 3.14. *Si X es resonante, $0 < p < \infty$ y $\Lambda_X^{p,\infty}(w)$ es cuasi-normado,*

(i) L_0^∞ es denso en $\Lambda^{p,\infty} \cap L^\infty$ si y sólo si $\mu(X) < \infty$ y entonces coinciden (la densidad se considera con respecto a la topología de $\Lambda^{p,\infty}$).

(ii) $\Lambda^{p,\infty} \cap L^\infty$ es denso en $\Lambda^{p,\infty}$ si y sólo si X es atómico y entonces coinciden. Así en ambos casos, si dos de estos espacios no coinciden el menor de ellos no es denso en el otro.

Demostración. (i) Si $\mu(X) < \infty$ ambos espacios coinciden y no hay nada que probar. Si $\mu(X) = \infty$ y X es no atómico, podemos tomar $f \in L^\infty \cap \Lambda^{p,\infty}$ con

$$f^* = W^{-1/p}(1)\chi_{[0,1)} + W^{-1/p}\chi_{[1,\infty)}.$$

Si $g \in L_0^\infty$ y $E = \{g = 0\}$ entonces $b = \mu(X \setminus E) < \infty$ y

$$(f-g)^*(t) \ge \big((f-g)\chi_E\big)^*(t) = \big(f\chi_E\big)^*(t) \ge f^*(b+t) = W^{-1/p}(t+b), \quad t > 1,$$

y se tiene,

$$\|f-g\|_{\Lambda^{p,\infty}} = \sup_t W^{1/p}(t)(f-s)^*(t) \ge \sup_{t>1} \frac{W^{1/p}(t)}{W^{1/p}(t+b)}.$$

Si $w \in L^1$ el supremo anterior es 1 y, en caso contrario, como $W \in \Delta_2$, $W(t+b) \leq C\big(W(t) + W(b)\big)$ (cf. 2.13 y 2.12) y se obtiene $\|f-g\|_{\Lambda^{p,\infty}} \geq C^{-1/p}$ y f no puede ser límite de funciones en L_0^∞. Esto prueba que L_0^∞ no es denso en $L^\infty \cap \Lambda^{p,\infty}$ en el caso no-atómico. Si $\mu(X) = \infty$ y X es atómico resonante, $X = \bigcup_{n=0}^\infty X_n$ con cada X_n átomo de medida constante $b > 0$ y $X_n \cap X_m = \emptyset$, $n \neq m$, y la función

$$f = \sum_{n=0}^\infty W^{-1/p}\big((n+1)b\big)\chi_{X_n}$$

está en $\Lambda_X^{p,\infty}(w) \cap L^\infty$ y tiene norma 1. Si $g \in L_0^\infty$, tiene soporte de medida finita (una unión finita $X_{n_1} \cup \cdots \cup X_{n_k}$ de átomos) y existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $g = 0$ en $\bigcup_{n=N}^\infty X_n$. Así, $(f-g)^*(nb) \geq f^*\big((n+N)b\big) = W^{-1/p}\big((n+N+1)b\big)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, y procediendo como en la demostración del Teorema 3.7 se concluye $\|f-g\|_{\Lambda^{p,\infty}} \geq C > 0$. Con ello f no es límite de funciones en L_0^∞ y este conjunto no es denso en $\Lambda^{p,\infty} \cap L^\infty$ y (i) queda así probado.

(ii) Igual que antes, si X es atómico ambos espacios son iguales y no hay nada que probar. Si X es no-atómico, existe $0 \leq f \in \mathcal{M}(X)$ con $f^* = W^{-1/p}$ en $[0, \mu(X))$. Así, $\|f\|_{\Lambda^{p,\infty}} = 1$ y $f \in \Lambda^{p,\infty} \setminus L^\infty$. Si $g \in L^\infty(X)$ con $\|g\|_\infty = b$, $|f-g| \geq |f| - b$ y, por lo tanto, $(f-g)^*(t) \geq f^*(t) - b = W^{-1/p}(t) - b$ si $0 \leq t < \lambda_f(b) = t_0$. Entonces,

$$\|f-g\|_{\Lambda^{p,\infty}} = \sup_t W^{1/p}(t)(f-g)^*(t) \geq \sup_{0<t<t_0} \big(1 - bW^{1/p}(t)\big) = 1,$$

ya que $t_0 = \lambda_f(b) > 0$. Concluimos que f no es límite en $\Lambda^{p,\infty}$ de funciones en $L^\infty(X)$. Esto prueba que $L^\infty \cap \Lambda^{p,\infty}$ no es denso en $\Lambda^{p,\infty}$ en este caso. □

4. Dualidad

En esta sección (X, μ) será, por defecto, un espacio de medida σ-finito. $d(\Omega, p)$ y su versión débil $d^\infty(\Omega, p)$ serán los espacios de Lorentz sobre $\mathbb{N}^*$ introducidos en el Ejemplo 2.3(iv). Aquí $\Omega = (\Omega_n)_{n=0}^\infty$ es una sucesión de números positivos con $\Omega_0 \neq 0$.

Estudiaremos los espacios duales y los asociados de los espacios de Lorentz sobre X con especial atención al caso X resonante (Definición 2.15). Describiremos el asociado y su norma y deduciremos la condición necesaria y suficiente para que el dual y el asociado sean iguales. En algunos casos daremos la envoltura de Banach de Λ que tiene interés si este espacio no es normado. En nuestro estudio incluimos, como novedad, los espacios de Lorentz de sucesiones $d(\Omega, p)$ con una sucesión Ω cualquiera. Hasta ahora, las referencias conocidas sólo consideraban el caso normable (Ω decreciente).

Introduciremos el espacio asociado generalizando la definición que encontramos en [BS] en el contexto de los espacios funcionales de Banach.

Definición 4.1. Si $\|\cdot\| : \mathcal{M}(X) \to [0, \infty]$ es un funcional positivamente homogéneo y $E = \big\{ f \in \mathcal{M}(X) \, : \, \|f\| < \infty \big\}$, se define la "norma" asociada

$$\|f\|_{E'} = \sup \bigg\{ \int_X |fg| \, : \, \|g\| \leq 1, \ g \in E \bigg\}, \quad f \in \mathcal{M}(X).$$

El espacio asociado de E es entonces $E' = \big\{ f \in \mathcal{M}(X) \, : \, \|f\|_{E'} < \infty \big\}$.

Observación 4.2. Las siguientes propiedades son inmediatas:

(i) $\|\cdot\|_{E'}$ es subaditiva y positivamente homogénea y, si E contiene las funciones características de conjuntos de medida finita, $\big(E', \|\cdot\|_{E'}\big)$ es espacio normado.

(ii) Si $(E, \|\cdot\|)$ es un retículo ($\|f\| \leq \|g\|$, si $|f| \leq |g|$) también lo es E'. Si $\|\cdot\|$ tiene la propiedad de Fatou, $\|\cdot\|_{E'}$ también.

(iii) Si denotamos $E'' = (E')'$ se tiene $E \subset E''$ y $\|f\|_{E''} \leq \|f\|$ para toda $f \in \mathcal{M}(X)$.

Definición 4.3. Un espacio funcional de Banach E en X es un subespacio de $\mathcal{M}(X)$ definido por $E = \{f : \|f\| < \infty\}$ donde $\|\cdot\| = \|\cdot\|_E$ es una norma (llamada "norma funcional de Banach") que verifica las siguientes propiedades (véase [BS):

(i) $\|f\| \leq \|g\|$ si $|f| \leq |g|$,

(ii) $0 \leq f_n \leq f_{n+1} \to f \Rightarrow \|f_n\| \to \|f\|$,

(iii) $\chi_A \in E$ si $\mu(A) < \infty$ y $E \neq \{0\}$,

(iv) $\int_A |f| \leq C_A \|f\|$ si $\mu(A) < \infty$,

para $f, g, f_n \in E, \ A \subset X$ medible.

El resultado que ahora sigue establece que el asociado Λ'_X de un espacio de Lorentz cuasi-normado es un espacio funcional de Banach cuando X es resonante.

Teorema 4.4. *Si Λ_X es un espacio de Lorentz cuasi-normado sobre X resonante, el asociado Λ'_X es un espacio funcional de Banach invariante por reordenación. Para cada $f \in \Lambda'$,*

$$\|f\|_{\Lambda'} = \sup\left\{ \int_0^\infty f^* g^* \,:\, \|g\|_\Lambda \leq 1 \right\}.$$

Además, una función $f \in \mathcal{M}(X)$ está en Λ' si y sólo si $\int_X |fg| < \infty$ para toda $g \in \Lambda$ y $\Lambda'_X \neq \{0\}$ si y sólo si $\Lambda_X \subset L^1_{\mathrm{loc}}(X)$.

Demostración. Probaremos primero la fórmula. Si $f, g \in \mathcal{M}(X)$, $\int_X |fg| \leq \int_0^\infty f^* g^*$ y por lo tanto,

$$\|f\|_{\Lambda'} \leq \sup\left\{ \int_0^\infty f^* g^* \,:\, \|g\|_\Lambda \leq 1 \right\}.$$

Para ver la desigualdad contraria observamos que para $g \in \Lambda$ con $\|g\|_\Lambda \leq 1$ se tiene, al ser X resonante,

$$\int_0^\infty f^* g^* = \sup_{h^* = g^*} \int_X |fh| \leq \sup_{\|h\|_\Lambda \leq 1} \int_X |fh| = \|f\|_{\Lambda'}.$$

Se sigue que el funcional $\|\cdot\|_{\Lambda'}$ es invariante por reordenación.

Probaremos ahora que $f \in \Lambda'$ si y sólo si $\int_X |fg| < \infty$ para toda $g \in \Lambda$. La necesidad es consecuencia de la definición de Λ'. La suficiencia se sigue del teorema de la gráfica cerrada (véase [Ru2]) ya que bajo la hipótesis, la aplicación lineal $T_f(g) = fg$, $T_f : \Lambda \to L^1(X)$ está bien definida y ambos son F-espacios continuamente incluidos en $\mathcal{M}(X)$ (de lo cual se deduce inmediatamente que la gráfica es cerrada). T_f es entonces continua y ello prueba (Teorema 3.2(v)) que $\int_X |fg| \leq C\|g\|_\Lambda$ y así $f \in \Lambda'$.

Veamos a continuación que Λ' es espacio funcional de Banach. Que $\|\cdot\|_{\Lambda'}$ es una norma es inmediato. También lo son las propiedades (i) y (ii) de la definición de E.F.B. (Definición 4.3). La propiedad (iv) de dicha definición también es obvia, pues si $\mu(A) < \infty$ y $f \in \Lambda'$,

$$\int_A |f| \leq \|\chi_A\|_\Lambda \|f\|_{\Lambda'}.$$

Sólo queda por probar (iii). Es decir que $\chi_A \in \Lambda'$ si $\mu(A) < \infty$ y $\Lambda' \neq \{0\}$. En el caso X atómico esto es trivial. En el caso X no atómico, si $0 \neq f \in \Lambda'$ existe

$t > 0$ tal que, si $E = \{|f| > t\}$, $\mu(E) > 0$. Entonces $t\chi_E \leq |f|$ y $\chi_E \in \Lambda'$. Es decir, si $\Lambda' \neq \{0\}$ existe $\chi_E \in \Lambda'$ con $b = \mu(E) > 0$. Como $\|\cdot\|_{\Lambda'}$ es invariante por reordenación y monótona se tiene $\chi_A \in \Lambda'$ para todo A medible con $\mu(A) \leq b$. Si $\infty > \mu(A) > b$ también es cierto lo anterior pues $A = \bigcup_{n=1}^N A_n$ con $\mu(A_n) \leq b$ y $\|\chi_A\|_{\Lambda'} \leq \sum_n \|\chi_{A_n}\|_{\Lambda'} < \infty$.

Sólo queda por ver que $\Lambda'_X \neq \{0\}$ si y sólo si $\Lambda_X \subset L^1_{\text{loc}}(X)$. La necesidad es inmediata pues si $\Lambda'_X \neq \{0\}$ y $\mu(A) < \infty$ ya hemos visto que $\chi_A \in \Lambda'$ y en particular $\int_A |f| < \infty$, $f \in \Lambda$. Por otra parte si $\Lambda_X \subset L^1_{\text{loc}}(X)$ y $0 < \mu(A) < \infty$ se tiene $\int_X |f\chi_A| < \infty$ para toda $f \in \Lambda$ y ello (ya se ha visto) implica $\chi_A \in \Lambda'$ y $\Lambda' \neq \{0\}$. $\square$

Observación 4.5. Si en el enunciado del teorema anterior omitimos la condición de que X sea resonante (X σ-finito cualquiera) aún puede probarse que Λ'_X es espacio de Banach con norma monótona y con la propiedad de Fatou. La convergencia en Λ' implica la convergencia en medida sobre conjuntos de medida finita (lo mismo con las sucesiones de Cauchy) y también es cierto que $f \in \Lambda'$ si y sólo si $\int_X |fg| < \infty$ para toda $g \in \Lambda$. La última afirmación del enunciado no es cierta (en general) en este caso.

El resultado que sigue describe el espacio asociado de los Λ_X en el caso X no-atómico. Antes necesitaremos definir los espacios de Lorentz Γ.

Definición 4.6. Si $0 < p \leq \infty$ definimos

$$\Gamma^p_X(w) = \left\{ f \in \mathcal{M}(X) \,:\, \|f\|_{\Gamma^p_X(w)} = \left(\int_0^\infty (f^{**})^p w \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

La versión débil del espacio anterior es

$$\Gamma^{p,\infty}_X(w) = \left\{ f \in \mathcal{M}(X) \,:\, \|f\|_{\Gamma^{p,\infty}_X(w)} = \sup_{t>0} W^{1/p}(t) f^{**}(t) < \infty \right\}.$$

La última definición puede extenderse en el siguiente sentido. Si Φ es cualquier función positiva en $\mathbb{R}^+$ escribiremos

$$\Gamma^{p,\infty}_X(\mathrm{d}\Phi) = \left\{ f \in \mathcal{M}(X) \,:\, \|f\|_{\Gamma^{p,\infty}_X(\mathrm{d}\Phi)} = \sup_{t>0} \Phi^{1/p}(t) f^{**}(t) < \infty \right\}.$$

Siempre podemos suponer que la función Φ de la definición anterior es creciente ya que si no fuera así se puede sustituir por $\widetilde{\Phi}(t) = \sup_{0<s<t} \Phi(s),\ t > 0$, que sí lo es y verifica $\|f\|_{\Gamma_X^{p,\infty}(\mathrm{d}\Phi)} = \|f\|_{\Gamma_X^{p,\infty}(\mathrm{d}\widetilde{\Phi})}$.

El apartado (ii) del siguiente resultado es consecuencia directa de la fórmula de E. Sawyer enunciada en el Teorema 5.7 del Capítulo 1. El apartado (i) ya se encuentra, de hecho, probado en [CS2].

Teorema 4.7. *Sea X un espacio no-atómico y w un peso cualquiera en $\mathbb{R}^+$.*

(i) Si $0 < p \leq 1$, entonces

$$\Lambda_X^p(w)' = \Gamma_X^{1,\infty}(\mathrm{d}\Phi) \qquad \textit{(con igualdad de normas),}$$

donde $\Phi(t) = tW^{-1/p}(t),\ t > 0$.

(ii) Si $1 < p < \infty$ y $f \in \mathcal{M}(X)$, entonces

$$\begin{aligned}\|f\|_{\Lambda_X^p(w)'} &\approx \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{W(t)}\int_0^t f^*\right)^{p'} w(t)\,dt\right)^{1/p'} + \frac{\int_0^\infty f^*}{W^{1/p}(\infty)} \\ &\approx \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{W(t)}\int_0^t f^*\right)^{p'-1} f^*(t)\,dt\right)^{1/p'}.\end{aligned}$$

(iii) Si $0 < p < \infty$, entonces

$$\Lambda_X^{p,\infty}(w)' = \Lambda^1(W^{-1/p}) \qquad \textit{(con igualdad de normas).}$$

Demostración. Como X es no-atómico y σ-finito, toda función decreciente en $[0, \mu(X))$ es igual a.e. a la reordenada decreciente de una función en $\mathcal{M}(X)$. Además X es resonante ([BS]) y entonces,

$$\|f\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)'} = \sup_{g \in \Lambda_X^{p,q}(w)} \frac{\int_X |fg|}{\|g\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)}} = \sup_{g\downarrow} \frac{\int_0^\infty gf^*}{\|g\|_{L^{p,q}(w)}}.$$

El caso (i) se resuelve entonces aplicando el Corolario I.2.14 (con $p_1 = 1$, $T = \mathrm{Id}$) a la clase regular $L = \mathcal{M}_{\mathrm{dec}}(\mathbb{R}^+)$ o, si se quiere, el Teorema 2.12 en [CS1]. El caso (ii) es consecuencia inmediata del Teorema I.5.7 (E. Sawyer). El caso (iii) corresponde a $q = \infty$ y se tiene,

$$\|f\|_{\Lambda_X^{p,\infty}(w)'} = \sup\left\{\int_0^\infty f^* g \,:\, \|g\|_{L^{p,\infty}(w)} = 1,\ g\downarrow\right\}.$$

Ahora bien, si $g \downarrow$, $\|g\|_{L^{p,\infty}(w)} = \sup_t W^{1/p}(t)g(t)$ y $\|g\|_{L^{p,\infty}}(w) = 1$ implica $g \leq W^{-1/p}$, con lo cual

$$\|f\|_{\Lambda_X^{p,\infty}(w)'} \leq \int_0^\infty f^* W^{-1/p} = \|f\|_{\Lambda^1(W^{-1/p})}.$$

Por otra parte $W^{-1/p}$ es decreciente y $\left\|W^{-1/p}\right\|_{L^{p,\infty}}(w) = 1$ y se tiene la igualdad. □

Observación 4.8.

(i) Si $p > 1$ y $\tilde{w}(t) = t^{p'} W^{-p'}(t) w(t)$, $t > 0$. Entonces el apartado (ii) del teorema anterior se puede enunciar de este modo:

$$\begin{aligned} &\Lambda_X^p(w)' = \Gamma_X^{p'}(\tilde{w}), \qquad \text{si } w \notin L^1, \\ &\Lambda_X^p(w)' = \Gamma_X^{p'}(\tilde{w}) \cap L^1(X), \qquad \text{si } w \in L^1. \end{aligned}$$

Se supone que la norma en el espacio intersección es el máximo (o bien la suma) de cada una de las normas y en estas igualdades se supone equivalencia de normas.

(ii) Si $w \notin L^1$, $p > 1$ y $\tilde{w}$ (definido arriba) está en $B_{p'}$ el operador de Hardy A verifica la acotación $A : L^{p'}_{\text{dec}}(\tilde{w}) \to L^{p'}(\tilde{w})$ y entonces,

$$\|f\|_{\Lambda_X^p(w)'} \approx \|f\|_{\Lambda_X^{p'}(\tilde{w})}, \quad f \in \mathcal{M}(X).$$

Es fácil ver que esta condición sobre el peso w es equivalente a

$$\left(\int_0^r \left(\frac{W(t)}{t} \right)^{-p'} w(t)\, dt \right)^{1/p'} W^{1/p}(r) \geq Cr, \quad r > 0, \tag{4.9}$$

que es la desigualdad contraria a la de la condición $w \in B_{p,\infty} = B_p$ (Teorema I.6.5(a.iii)). Como una de las inclusiones se da siempre, se sigue que la condición (4.9) es necesaria y suficiente (en el caso $w \notin L^1$) para tener la identidad

$$\Lambda_X^p(w) = \Lambda_X^{p'}(\tilde{w}) \qquad \text{(con normas equivalentes)}.$$

(iii) Si $1 < p < \infty$ el espacio $\Lambda_X^{p'}(w^{1-p'})$ está contenido en $\Lambda_X^p(w)'$ ya que, por la desigualdad de Hölder,

$$\int_X |fg| \leq \int_0^\infty (f^* w^{1/p})(g^* w^{-1/p}) \leq \|f\|_{\Lambda^p(w)} \|g\|_{\Lambda^{p'}(w^{1-p'})}.$$

Si $\tilde{w}$ es el peso definido arriba se tiene entonces

$$\Lambda_X^{p'}(w^{1-p'}) \subset \Lambda_X^p(w)' \subset \Gamma_X^{p\prime}(\tilde{w}) \subset \Lambda_X^{p'}(\tilde{w}). \tag{4.10}$$

(iv) Los comentarios posteriores a la Definición 4.6 y el Teorema 4.7(i) nos dicen que, para $0 < p \leq 1$,

$$\Lambda_X^p(w)' = \Gamma_X^{1,\infty}(\mathrm{d}\Phi_p) \qquad \text{(con igualdad de normas)},$$

donde $\Phi_p(t) = \sup_{0<s<t} sW^{-1/p}(s),\ t > 0$. Notemos que

$$\Phi_p(t) = \frac{t}{\inf_{0<s<t} \frac{t}{s} W^{1/p}(s)} = \frac{t}{\inf_{s>0} \max\left(1, \frac{t}{s}\right) W^{1/p}(s)} = \frac{t}{W_p(t)},$$

donde $W_p(t) = \inf_{s>0} \max\left(1, \frac{t}{s}\right) W^{1/p}(s),\ t > 0$. Es fácil comprobar que esta función es cuasi-cóncava ([BS]). De hecho, es la mayor función cuasi-cóncava mayorada por $W^{1/p}$ y en consecuencia se denomina mayor minorante cuasi-cóncava de $W^{1/p}$ (véase [CPSS]). Podemos así escribir,

$$\|f\|_{\Lambda_X^p(w)'} = \sup_{t>0} \frac{1}{W_p(t)} \int_0^t f^*, \qquad f \in \mathcal{M}(X).$$

Como primera consecuencia del Teorema 4.7 obtenemos la caracterización de los pesos w para los que $\Lambda'(w) = \{0\}$.

Teorema 4.11. *Si X es no-atómico:*

(i) *Si* $0 < p \leq 1,\ \Lambda_X^p(w)' \neq \{0\} \Leftrightarrow \sup_{0<t<1} \frac{t^p}{W(t)} < \infty.$

(ii) *Si* $1 < p < \infty,\ \Lambda_X^p(w)' \neq \{0\} \Leftrightarrow \int_0^1 \left(\frac{t}{W(t)}\right)^{p'-1} dt < \infty.$

(iii) *Si* $0 < p < \infty,\ \Lambda_X^{p,\infty}(w)' \neq \{0\} \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{1}{W^{1/p}} < \infty.$

Observación 4.12. Dado que la función W es continua en $\mathbb{R}^+$, las condiciones en el teorema anterior sólo dependen del comportamiento local del peso w en el 0.

Demostración del Teorema 4.11. Como Λ' es E.F.B., es no nulo si y sólo si contiene las funciones χ_E con $\mu(E) < \infty$, es decir si y sólo si $\|\chi_E\|_{\Lambda'} < \infty,\ \mu(E) < \infty$. Las condiciones se obtienen entonces inmediatamente aplicando el Teorema 4.7. $\square$

Definición 4.13. Un peso w en $\mathbb{R}^+$ se llama regular (véase [Re]) si verifica la condición

$$\frac{W(t)}{t} \leq C\, w(t), \qquad t > 0,$$

con $C > 0$ independiente de t. Una sucesión de números positivos $(\Omega_n)_{n=0}^{\infty}$ se dice, análogamente, regular si

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \Omega_k \leq C\, \Omega_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Todo peso (sucesión) creciente y todo peso (sucesión) potencia es regular. En [Re] se demuestra que si w es decreciente y regular los espacios $\Lambda_X^{p'}(w^{1-p'})$ y $\Lambda_X^p(w)'$ son iguales. En el enunciado que sigue extendemos este resultado al caso de un peso w cualquiera.

Teorema 4.14. *Sea $1 < p < \infty$ y X no-atómico. Entonces:*

(i) Si $w \notin L^1$, $\Lambda_X^p(w)' = \Lambda_X^{p'}(w^{1-p'})$ si y sólo si existe $C > 0$ tal que,

$$\int_0^r w^{1-p'} \leq C\left(r^{p'} W^{1-p'}(r) + \int_0^r t^{p'} W^{-p'}(t) w(t)\, dt \right), \qquad r > 0.$$

(ii) Si w es regular,

$$\Lambda_X^{p'}(w^{1-p'}) = \Lambda_X^p(w)' = \Gamma_X^{p\prime}(\tilde{w}) = \Lambda_X^{p'}(\tilde{w}),$$

donde $\tilde{w}(t) = t^{p'} W^{-p'}(t) w(t),\ t > 0$.

(iii) Si w es creciente, $\Lambda_X^p(w)' = \Lambda_X^{p'}(w^{1-p'})$ con igualdad de normas.

Demostración. (i) Ya hemos notado en la Observación 4.8 que se tiene siempre $\Lambda_X^{p'}(w^{1-p'}) \subset \Lambda_X^p(w)' = \Gamma_X^{p'}(\tilde{w})$. Así, la igualdad de estos dos espacios es equivalente a la inclusión

$$\Gamma_X^{p'}(\tilde{w}) \subset \Lambda_X^{p'}(w^{1-p'}),$$

que equivale, asimismo, a la desigualdad inversa para el operador de Hardy,

$$\|g\|_{L^{p'}(w^{1-p'})} \leq C \|Ag\|_{L^{p'}(\tilde{w})}, \qquad g \downarrow .$$

La condición necesaria y suficiente para ello se puede encontrar en [CPSS] o en [Ne1] o si se quiere, aplicando el Teorema 3.2(b) del Capítulo 1. Esta condición es

$$\int_0^r w^{1-p'} \leq C\left(\widetilde{W}(r) + r^{p'}\int_r^\infty t^{-p'}\tilde{w}(t)\,dt\right),$$

que coincide con la del enunciado ya que $\widetilde{W}(r) = \int_0^r t^{p'}W^{-p'}(t)w(t)\,dt$ y

$$r^{p'}\int_r^\infty t^{-p'}\tilde{w}(t)\,dt = r^{p'}\int_r^\infty W^{-p'}w = \frac{1}{p'-1}r^{p'}W^{1-p'}(r).$$

(ii) Si el peso w es regular se tiene

$$w^{1-p'}(t) = w(t)w^{-p'}(t) \leq Cw(t)t^{p'}W^{-p'}(t) = C\tilde{w}(t).$$

Con ello $\Lambda^{p'}(\tilde{w}) \subset \Lambda^{p'}(w^{1-p'})$ y teniendo en cuenta la Observación 4.8(iii), se concluye la igualdad de los cuatro espacios del enunciado.

(iii) Si $f \in \mathcal{M}(X)$ y el peso w es creciente, la función $g_0 = (f^*w^{-1})^{p'-1}$ es decreciente en $\mathbb{R}^+$ y se tiene

$$\|f\|_{\Lambda^p(w)'} = \sup_{g\downarrow}\frac{\int f^*g}{\left(\int g^p w\right)^{1/p}} \geq \frac{\int f^*g_0}{\left(\int g_0^p w\right)^{1/p}} = \|f\|_{\Lambda^{p'}(w^{1-p'})}.$$

Como la desigualdad contraria se da siempre (Obervación 4.8(iii)), se concluye la afirmación del enunciado. $\square$

El resultado que sigue describe el biasociado de Λ^p en el caso $p \leq 1$. Véase también [CPSS].

Teorema 4.15. *Sea X no-atómico y w un peso en $\mathbb{R}^+$. Sea $0 < p \leq 1$ y W_p la mayor minorante cuasi-cóncava de $W^{1/p}$ (Observación 4.8(iv)). Entonces existe un peso $\tilde{w}_p$ decreciente con $\frac{1}{2}\widetilde{W}_p \leq W_p \leq \widetilde{W}_p$ y tal que $\Lambda_X^p(w)'' = \Lambda_X^1(\tilde{w}_p)$. Además,*

$$\frac{1}{2}\|\cdot\|_{\Lambda_X^1(\tilde{w}_p)} \leq \|\cdot\|_{\Lambda_X^p(w)''} \leq \|\cdot\|_{\Lambda_X^1(\tilde{w}_p)}.$$

Demostración. Notemos que $\|g\|_{\Lambda^p(w)'} = \sup_{t>0} W^{-1/p}(t)\int_0^t g^*$ (véase el Teorema 4.7) y esta norma es menor o igual que 1 si y sólo si $\int_0^t g^* \leq W^{1/p}(t),\ t > 0$. Por el Lema 2.4 y la Proposición 2.5, se tiene, para $f \in \mathcal{M}(X)$,

$$\begin{aligned}\|f\|_{\Lambda^p(w)''} &= \sup\left\{\int_0^\infty f^* g^* \,:\, \|g\|_{\Lambda^p(w)'} \le 1\right\}\\ &= \sup\left\{\int_0^\infty f^* \tilde{w} \,:\, \tilde{w}\downarrow,\ \int_0^t \tilde{w} \le W^{1/p}(t),\ \forall t>0\right\}\\ &= \sup\left\{\int_0^\infty \widetilde{W}\big(\lambda_f(t)\big)\,dt \,:\, \widetilde{W}\in\Upsilon\right\},\end{aligned}$$

donde $\Upsilon = \left\{\widetilde{W} \,:\, \tilde{w}\downarrow, \widetilde{W} \le W^{1/p}\right\}$. Toda función en Υ es cuasi-cóncava y está mayorada por $W^{1/p}$. Por lo tanto $\widetilde{W} \le W_p$ para toda $\widetilde{W} \in \Upsilon$. Por otra parte W_p es cuasi-cóncava y existe una función concava $\widetilde{W}_p(t) = \int_0^t \tilde{w}_p$, $t>0$, con $\frac{1}{2}\widetilde{W}_p \le W_p \le \widetilde{W}_p$ (véase [BS]). En particular $\tilde{w}_p \downarrow$ y $\frac{1}{2}\widetilde{W}_p \in \Upsilon$. Se sigue que

$$\frac{1}{2}\|f\|_{\Lambda^1_X(\tilde{w}_p)} = \int_0^\infty \frac{1}{2}\widetilde{W}_p\big(\lambda_f(t)\big)\,dt \le \|f\|_{\Lambda^p(w)''} \le \int_0^\infty \widetilde{W}_p\big(\lambda_f(t)\big)\,dt = \|f\|_{\Lambda^1_X(\tilde{w}_p)}.$$

□

Será conveniente ahora recordar la definición del operador de Hardy discreto A_d que ya apareció en el Capítulo 1. Éste actúa sobre sucesiones $f = \big(f(n)\big)_n$ en la forma,

$$A_d f(n) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n f(k), \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Podemos describir el espacio asociado también cuando X es resonante totalmente atómico. Si $\mu(X)<\infty$, $\Lambda^{p,q}_X(w) = L^\infty(X)$ (con normas equivalentes) y este caso no tiene interés. Si $\mu(X)=\infty$ sólo hay, salvo isomorfismos, dos espacios: $d(\Omega,p)$ y $d^\infty(\Omega,p)$ (Ejemplos 2.3(iv)) y el caso interesante se da si $\Omega \notin \ell^1$. Hasta ahora, el espacio $d(\Omega,p)'$ había sido identificado sólo en algunos casos. En [Al] se resuelve para $p\ge 1$ con Ω decreciente y regular. En [Po] y [NO] se estudia el caso $0<p<1$ y $\Omega\downarrow$, mientras que en [AEP] se encuentra el asociado con la condición $\Omega\uparrow$ no acotada (ésta parece ser la única referencia en donde se trabaja con sucesiones Ω no decrecientes). Aquí identificaremos estos espacios en el caso más general:

Teorema 4.16. *Sea* $W_n = \sum_{k=0}^n \Omega_k$, $n=0,1,2,\ldots$ *Entonces se tiene, para toda* $f = \big(f(n)\big)_{n=0}^\infty \subset \mathbb{C}$, *(i) Si* $0 < p \leq 1$,

$$\|f\|_{d(\Omega,p)'} = \sup_{n\geq 0} W_n^{-1/p} \sum_{k=0}^{n} f^*(k).$$

(ii) Si $1 < p < \infty$ *y* $\Omega \notin \ell^1$,

$$C_1\|f\|_{d(\Omega,p)'} \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} \big(A_d f^*(n)\big)^{p'} \widetilde{\Omega}_n \right)^{1/p'} \leq C_2 \|f\|_{d(\Omega,p)'},$$

con $\widetilde{\Omega}_0 = W_0^{1-p'}$, $\widetilde{\Omega}_n = (n+1)^{p'}\big(W_{n-1}^{1-p'} - W_n^{1-p'}\big)$, $n \geq 1$, *y las constantes* C_1, C_2 *dependiendo sólo de* p.

(iii) Si $0 < p < \infty$,

$$\|f\|_{d^\infty(\Omega,p)'} = \sum_{n=0}^{\infty} f^*(n) W_n^{-1/p} = \|f\|_{d(W^{-1/p},1)}.$$

Demostración. Por definición

$$\|f\|_{d(\Omega,p)'} = \sup_g \frac{\sum_{n=0}^\infty f(n)g(n)}{\|g\|_{d(\Omega,p)}} = \sup_{g\downarrow} \frac{\sum_{n=0}^\infty f^*(n)g(n)}{\left(\sum_{n=0}^\infty g(n)^p \Omega_n\right)^{1/p}}.$$

Entonces el apartado (i) se deduce directamente aplicando la primera parte del Teorema 6.11 del Capítulo 1. Al aplicar la segunda expresión en el apartado (ii) del mismo teorema, obtenemos, para $p > 1$,

$$\|f\|_{d(\Omega,p)'}^{p'} \approx \int_0^\infty \left(\frac{\widetilde{V}}{\widetilde{W}}\right)^{p'} \tilde{w},$$

donde, $\tilde{v} = \sum_{n=0}^\infty f^*(n)\chi_{[n,n+1)}$, $\tilde{w} = \sum_{n=0}^\infty \Omega_n \chi_{[n,n+1)}$, $\widetilde{V}(t) = \int_0^t \tilde{v}$, $\widetilde{W}(t) = \int_0^t \tilde{w}$, $t > 0$. Por ser f^* decreciente se tiene, para $n \geq 1$, $t \in [n, n+1)$,

$$\frac{1}{2}\big(f^*(0) + \cdots + f^*(n)\big) \leq \widetilde{V}(t) \leq \big(f^*(0) + \cdots + f^*(n)\big).$$

Por otra parte

$$\int_n^{n+1} \frac{\tilde{w}}{\widetilde{W}^{p'}} = \int_0^1 \Omega_n\big(\Omega_0 + \cdots + \Omega_{n-1} + \Omega_n t\big)^{-p'} = \frac{W_{n-1}^{1-p'} - W_n^{1-p'}}{p'-1} = C_p \frac{\widetilde{\Omega}_n}{(n+1)^{p'}}.$$

Así,

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{d(\Omega,p)'}^{p'} &\approx \int_0^1 \left(\frac{\widetilde{V}}{\widetilde{\widetilde{W}}}\right)^{p'} \tilde{w} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{\widetilde{V}}{\widetilde{\widetilde{W}}}\right)^{p'} \tilde{w} \\
&\approx f^*(0)^{p'} \Omega_0^{1-p'} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} f^*(k)\right)^{p'} \frac{\widetilde{\Omega}_n}{(n+1)^{p'}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \big(A_d f^*(n)\big)^{p'} \widetilde{\Omega}_n .
\end{aligned}
$$

Sólo queda por demostrar (iii). Nótemos que

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{d^\infty(\Omega,p)'} &= \sup \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} f^*(n) g^*(n) \; : \; \|g\|_{d^\infty(\Omega,p)} \leq 1 \right\} \\
&= \sup \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} f^*(n) g^*(n) \; : \; g^*(k) \leq W_k^{-1/p}, \; \forall k \geq 0 \right\},
\end{aligned}
$$

y que este supremo es en realidad un máximo que se alcanza con la sucesión $W^{-1/p} = \big(W_n^{-1/p}\big)_n$. Así,

$$
\|f\|_{d^\infty(\Omega,p)'} = \sum_{n=0}^{\infty} f^*(n) W_n^{-1/p}. \qquad \square
$$

Observación 4.17.

(i) Tanto $d(\Omega,p)$ como $d^\infty(\Omega,p)$ están incluidos con continuidad en ℓ^∞ y, por lo tanto $\ell^1 \subset d(\Omega,p)'$ (y también $\ell^1 \subset d^\infty(\Omega,p)'$) para $0 < p < \infty$. En particular, el asociado de estos espacios nunca es trivial.

(ii) El argumento usado en la Observación 4.8(iii) sigue siendo válido aquí y se sigue que, para $1 < p < \infty$,

$$
d(\Omega^{1-p'}, p') \subset d(\Omega,p)'
$$

y $\|f\|_{d(\Omega,p)'} \leq \|f\|_{d(\Omega^{1-p'},p')}$ para toda sucesión f. Si $\Omega \uparrow$ también se puede trasladar aquí el argumento usado en la demostración del Teorema 4.14(iii) y concluir (como en [AEP]) que los dos espacios anteriores (y sus normas) son iguales.

En [Al], Allen demuestra, en el caso $\Omega \downarrow$, $p > 1$, que $d(\Omega,p)' = d(\Omega^{1-p'}, p')$ si Ω es regular. El enunciado que sigue extiende este resultado al caso general.

Teorema 4.18. *Sea* $1 < p < \infty$ *y* $\Omega \notin \ell^1$. *Entonces* $d(\Omega, p)' = d(\Omega^{1-p'}, p')$ *si y sólo si*

$$\sum_{k=0}^{n} \Omega_k^{1-p'} \leq C \sum_{k=0}^{n} \big(A_d \Omega(k)\big)^{1-p'}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

En particular $d(\Omega, p)' = d(\Omega^{1-p'}, p')$ *si* Ω *es regular.*

Demostración. La igualdad de los dos espacios del enunciado es equivalente (véase la Observacion 4.17) a la inclusión $d(\Omega, p)' \subset d(\Omega^{1-p'}, p')$ que, por el Teorema 4.16(ii), se da si y sólo si la desigualdad

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} g(n)^{p'} \Omega_n^{1-p'} \right)^{1/p'} \leq C \left(\sum_{n=0}^{\infty} \big(A_d g(n)\big)^{p'} \widetilde{\Omega}_n \right)^{1/p'} \tag{4.19}$$

vale para toda sucesión $g = \big(g(n)\big)_n$ positiva y decreciente. Aquí $\widetilde{\Omega}$ es la sucesión definida por $\widetilde{\Omega}_0 = \Omega_0^{1-p'}$,

$$\frac{\widetilde{\Omega}_n}{(n+1)^{p'}} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \Omega_k \right)^{1-p'} - \left(\sum_{k=0}^{n} \Omega_k \right)^{1-p'}, \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

La clase de las sucesiones positivas decrecientes es regular (Definición I.2.4) en $\mathbb{N}^*$ y se puede aplicar el Teorema 3.2(b) del Capítulo 1 con $T_0 = A_d$ (que es orden continuo, lineal y positivo) para caracterizar (4.19). La condición se obtiene imponiendo la desigualdad a las sucesiones del tipo $(1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots)$ (funciones características decrecientes en $\mathbb{N}^*$) y equivale, por lo tanto a,

$$\sum_{k=0}^{n} \Omega_k^{1-p'} \lesssim \Omega_0^{1-p'} + \sum_{k=1}^{n} (k+1)^{p'} \big(W_{k-1}^{1-p'} - W_k^{1-p'}\big) + (n+1)^{p'} \sum_{k=n+1}^{\infty} \big(W_{k-1}^{1-p'} - W_k^{1-p'}\big),$$

$n = 1, 2, \dots$, con $W_k = \sum_{j=0}^{k} \Omega_j$. El segundo miembro es equivalente, para $n \geq 1$, a la expresión

$$\begin{aligned} \Omega_0^{1-p'} + \sum_{k=1}^{n} (k+1)^{p'} (W_{k-1}^{1-p'} - W_k^{1-p'}) + (n+1)^{p'} W_n^{1-p'} &\approx \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{W_k}{k+1} \right)^{1-p'} \\ &\approx \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{W_k}{k+1} \right)^{1-p'}. \end{aligned}$$

Se obtiene, así, la condición del enunciado.

La segunda afirmación es inmediata, ya que todo peso regular verifica, trivialmente, la condición dada. $\square$

En [NO], M. Nawrocki y A. Ortyński muestran, para el caso en que Ω es decreciente, que el asociado de $d(\Omega, p)$, $p \leq 1$, es ℓ^∞ si se verifica la condición $\sum_{k=0}^n \Omega_k \geq C(n+1)^p$. Extendemos ahora este resultado viendo que esa condición vale en el caso general. Además, es también necesaria.

Teorema 4.20. *Sea $0 < p \leq 1$. Entonces $d(\Omega, p)' \subset \ell^\infty$ y estos dos espacios son iguales si y sólo si existe $C > 0$ tal que*

$$\sum_{k=0}^{n} \Omega_k \geq C(n+1)^p, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Demostración. Por el Teorema 4.16(i), se tiene con $W_n = \sum_{k=0}^n \Omega_k$,

$$\|f\|_{d(\Omega,p)'} \geq W_0^{-1/p} f^*(0) = W_0^{-1/p} \|f\|_{\ell^\infty}.$$

Así que $d(\Omega, p)' \subset \ell^\infty$.

Si se verifica la desigualdad del enunciado, entonces

$$W_n^{-1/p} \sum_{k=0}^{n} f^*(k) = \frac{n+1}{W_n^{1/p}} A_d f^*(n) \leq C^{-1/p} A_d f^*(n) \leq C^{-1/p} \|f\|_{\ell^\infty},$$

para todo $n = 0, 1, 2, \ldots$ Así, $\|f\|_{d(\Omega,p)'} = \sup_n W_n^{-1/p} \sum_{k=0}^n f^*(k) \leq C^{-1/p} \|f\|_{\ell^\infty}$ y se tiene $\ell^\infty = d(\Omega, p)'$.

Recíprocamente, si $\ell^\infty \subset d(\Omega, p)'$, entonces $1 \in d(\Omega, p)'$ y $\sup_n \frac{n+1}{W_n^{1/p}} = \|1\|_{d(\Omega,p)'}$ $= C < \infty$. Ello implica la condición del enunciado. $\square$

El resultado que ahora sigue describe el biasociado de $d(\Omega, p)$ en el caso $p \leq 1$ de forma análoga a como ya se hizo en el caso no-atómico (Teorema 4.15). Omitimos la demostración al ser ésta una adaptación inmediata, al caso discreto, de la del Teorema 4.15.

Teorema 4.21. *Sea $0 < p \leq 1$ y denotemos $W_n = \sum_{k=0}^n \Omega_k$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Existe una sucesión decreciente $\widetilde{\Omega} = (\widetilde{\Omega}_n)_n$ verificando*

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \widetilde{\Omega}_k \leq \inf_{m \geq 0} \max\left(1, \frac{n+1}{m+1}\right) W_m^{1/p} \leq \sum_{k=0}^{n} \widetilde{\Omega}_k$$

y tal que $d(\Omega,p)'' = d(\widetilde{\Omega},1)$ *con normas equivalentes. Más concretamente,*

$$\frac{1}{2}\|\cdot\|_{d(\widetilde{\Omega},1)} \le \|\cdot\|_{d(\Omega,p)''} \le \|\cdot\|_{d(\widetilde{\Omega},1)}\,.$$

Pasamos ahora al estudio del dual topológico y su relación con el asociado.

Definición 4.22. Si $(E,\|\cdot\|)$ es un espacio cuasi-normado definimos el dual E^* de la manera usual:

$$E^* = \{u : E \to \mathbb{C} \,:\, u \text{ lineal y continua}\}.$$

Si $u \in E^*$ denotamos $\|u\| = \|u\|_{E^*} = \sup\big\{|u(f)| \,:\, \|f\| \le 1,\ f \in E\big\} \in [0,\infty)$.

El dual E^* de un espacio cuasi-normado $\big(E,\|\cdot\|_E\big)$ es un espacio de Banach. Si E^* separa puntos, toda $f \in E$ se identifica con la forma lineal continua $\tilde{f} : E^* \to \mathbb{C}$ tal que $\tilde{f}(u) = u(f),\ u \in E^*$. Se tiene así una inyección continua,

$$\big(E,\|\cdot\|_E\big) \hookrightarrow \big(E^{**},\|\cdot\|_{E^{**}}\big),$$

y la constante de esta inclusión es menor o igual que 1 ya que, para $f \in E$,

$$\|f\|_{E^{**}} = \|\tilde{f}\|_{(E^*,\|\cdot\|_{E^*})^*} = \sup_{u\in E^*} \frac{\big|u(f)\big|}{\|u\|_{E^*}} \le \|f\|_E.$$

La topología de Mackey en E asociada al par dual (E,E^*), es la que tiene como base local las envolturas convexas de las bolas en E (véase [Ko]). Es la topología localmente convexa más fina en E que tiene a E^* como dual topológico. El completado $\widetilde{E}$ por esta topología se llama completado Mackey o, también, envoltura de Banach de E. En un espacio cuasi-normado cuyo dual separa puntos, esta topología corresponde a la inducida en E por el bidual $\big(E^{**},\|\cdot\|_{E^{**}}\big)$ y el completado Mackey no es más que la adherencia de E en $\big(E^{**},\|\cdot\|_{E^{**}}\big)$.

En nuestro caso $E = \Lambda$ es un espacio de Lorentz cuasi-normado. Si $f \in \Lambda'$ la aplicación $u_f : \Lambda \to \mathbb{C}$ tal que $u_f(g) = \int fg$ es evidentemente lineal y continua con norma igual a $\|f\|_{\Lambda'}$. Así Λ' es isométricamente isomorfo a un subespacio de Λ^* y de hecho identificaremos las funciones de Λ' con formas lineales continuas sobre Λ:

$$\Lambda' \subset \Lambda^*.$$

Por otra parte Λ está incluido con continuidad en $\big(\Lambda'', \|\cdot\|_{\Lambda''}\big)$ (Observación 4.2), así que (si Λ^* separa puntos) estamos tratando con tres topologías independientes en Λ y dos inclusiones con constante 1:

$$\begin{aligned}\big(\Lambda, \|\cdot\|_{\Lambda}\big) &\hookrightarrow \big(\Lambda^{**}, \|\cdot\|_{\Lambda^{**}}\big),\\ \big(\Lambda, \|\cdot\|_{\Lambda}\big) &\hookrightarrow \big(\Lambda'', \|\cdot\|_{\Lambda''}\big).\end{aligned}$$

Proposición 4.23. *Si Λ un espacio de Lorentz cuasi-normado cuyo dual separa puntos,*

$$\big(\Lambda, \|\cdot\|_{\Lambda}\big) \hookrightarrow \big(\Lambda, \|\cdot\|_{\Lambda^{**}}\big) \hookrightarrow \big(\Lambda, \|\cdot\|_{\Lambda''}\big)$$

y $\|f\|_{\Lambda''} \leq \|f\|_{\Lambda^{**}} \leq \|f\|_{\Lambda}$, $f \in \Lambda$. Si además, $\Lambda' = \Lambda^*$, entonces Λ'' se identifica isométricamente a un subespacio de Λ^{**}. En particular, $\|f\|_{\Lambda''} = \|f\|_{\Lambda^{**}}$, $\forall f \in \Lambda$, en este caso.

Demostración. Si $f \in \Lambda$, en particular $f \in \Lambda^{**}$ y

$$\|f\|_{\Lambda} \geq \|f\|_{\Lambda^{**}} = \sup_{u \in \Lambda^*} \frac{|u(f)|}{\|u\|_{\Lambda^*}} \geq \sup_{g \in \Lambda'} \frac{\int |fg|}{\|g\|_{\Lambda'}} = \|f\|_{\Lambda''}.$$

Si $\Lambda' = \Lambda^*$, toda forma lineal continua $u \in \Lambda^*$ es de la forma $u(f) = u_g(f) = \int fg$ con $g \in \Lambda'$. Asimismo, a toda función $f \in \Lambda''$ se puede asociar la forma lineal $\tilde{f} : \Lambda' = \Lambda^* \to \mathbb{C}$ definida por $\tilde{f}(g) = \tilde{f}(u_g) = \int fg$ y con norma

$$\|\tilde{f}\|_{\Lambda^{**}} = \sup_{u_g \in \Lambda^*} \frac{\big|\tilde{f}(u_g)\big|}{\|u_g\|_{\Lambda^*}} = \sup_{g \in \Lambda'} \frac{\int |fg|}{\|g\|_{\Lambda'}} = \|f\|_{\Lambda''}. \qquad \square$$

Abordaremos, entre otras, estas dos cuestiones: (i) Caracterización de los pesos w para los que $\Lambda(w)^* = \{0\}$. (ii) ¿ Cuándo se tiene $\Lambda' = \Lambda^*$? Como en el caso de los espacios de Lebesgue L^p, el teorema de Radón-Nikodym es la clave del siguiente resultado.

Proposición 4.24. *Sea Λ un espacio de Lorentz cuasi-normado sobre X. Si $u \in \Lambda^*$ existe una única función $g \in \Lambda'$ con $\|g\|_{\Lambda'} \leq \|u\|$, verificando*

$$u(f) = \int_X fg, \quad f \in L_0^\infty.$$

Demostración. Supongamos primero $\mu(X) < \infty$ (en este caso $\mathcal{S} \subset L^\infty \subset \Lambda$). Para cada $E \subset X$ sea

$$\sigma(E) = u(\chi_E) \in \mathbb{C}.$$

Entonces σ es una medida compleja en X (el hecho de que sea σ-aditiva es consecuencia de que $\mu(X) < \infty$) absolutamente continua respecto a la medida σ-finita μ de X, ya que $\mu(E) = 0$ implica $\|\chi_E\|_\Lambda = 0$ y entonces $u(\chi_E) = 0$. Por el teorema de Radón-Nikodym existe una función $g \in L^1(X)$ tal que $\sigma(E) = \int_E g\,d\mu$ para todo $E \subset X$ medible. En particular (ya que u es lineal) $u(f) = \int_X fg$ para $f \in \mathcal{S} \subset \Lambda$. También si $f \in L^\infty(X) \subset \Lambda$ es cierto lo anterior pues existe una sucesión $(s_n)_n \subset \mathcal{S} \subset \Lambda$ que converge a f en Λ y uniformemente (véase la demostración del Teorema 3.12).

Si $\mu(X) = \infty$ el razonamiento anterior es válido en cada subconjunto $Y \subset X$ de medida finita: Se define una medida compleja σ_Y en Y y se llega a la existencia de una función $g_Y \in L^1(Y)$ con $u(f) = \int_X fg$ para toda $f \in L^\infty(X)$ soportada en Y. Si Y_1, Y_2 son dos conjuntos con medida finita ha de ser $\int_E g_{Y_1} = \int_E g_{Y_2}$ para todo medible $E \subset Y_1 \cap Y_2$ y se sigue $g_{Y_1}(x) = g_{Y_2}(x)$ a.e. $x \in Y_1 \cap Y_2$. Así, siendo X σ-finito podemos asegurar la existencia de una función $g \in L^1_{\text{loc}}(X)$ tal que $u(f) = \int_X fg$ para todo $f \in L_0^\infty(X)$.

Para ver que $\|g\|_{\Lambda'} \le \|u\|$ sea $\alpha \in \mathcal{M}(X)$ con $|\alpha| = 1$, $\alpha g = |g|$ y sea también $(X_n)_n$ una sucesión creciente de conjuntos de medida finita con $\bigcup_n X_n = X$. Si $f \in \Lambda$ hacemos $f_n = |f|\chi_{\left\{|f|\le n\right\}\cap X_n}$. Entonces $0 \le f_n \le f_{n+1} \to |f|$ y cada f_n es acotada y con soporte en un conjunto de medida finita. Así,

$$\int_X |fg| = \lim_n \left| \int_X \alpha f_n g \right| = \lim_n \left|u(\alpha f_n)\right| \le \|u\| \lim_n \|f_n\|_\Lambda = \|u\|\|f\|_\Lambda,$$

con lo cual $g \in \Lambda'$ y $\|g\|_{\Lambda'} \le \|u\|$.

Finalmente la unicidad de g también está clara, pues si g_1 es otra función con las mismas propiedades que g, se tiene $\int_E g = \int_E g_1 = u(\chi_E)$ para todo $E \subset X$ medible de medida finita, lo que implica $g = g_1$. $\square$

Observación 4.25. Si $\mu(X) = \infty$ y $w \in L^1$ toda función simple (aunque no tenga soporte de medida finita) está en $\Lambda_X(w)$. Podría definirse entonces, para cada forma lineal $u \in \Lambda'$,

$$\sigma(E) = u(\chi_E), \quad E \subset X \text{ medible.}$$

Pero esta función de conjunto, definida sobre toda la σ-algebra de X, no es σ-aditiva en general. Para ello hace falta que, para cada familia de conjuntos medibles disjuntos $(E_n)_n$, las funciones $\chi_{\bigcup_1^N E_n}$ tengan límite en Λ y que éste sea $\chi_{\bigcup_1^\infty E_n}$. Esto (que sí ocurre si $\mu(X) < \infty$) no es cierto en general en este caso. Por ejemplo, en $\Lambda^1_{\mathbb{R}}\big(\chi_{(0,1)}\big)$ los conjuntos $E_n = (n, n+1)$ constituyen un contraejemplo.

Esto explica el porqué de la restricción "soporte de medida finita" en la proposición anterior.

Corolario 4.26. *Si Λ es un espacio de Lorentz cuasi-normado sobre X, $\Lambda' = \{0\}$ si y sólo si todo funcional $u \in \Lambda^*$ se anula sobre $L_0^\infty(X)$. En particular, si X es resonante, Λ^*_X separa puntos si y sólo si $\Lambda'_X \neq \{0\}$.*

Corolario 4.27. *Si Λ es un espacio de Lorentz cuasi-normado y $f \in \Lambda$ tiene norma absolutamente continua, $\|f\|_{\Lambda^{**}} = \|f\|_{\Lambda''}$.*

Demostración. Como f es límite puntual de una sucesión $(f_n)_n$ en L_0^∞ con $|f_n| \leq |f|$ y tiene n.a.c., se tendrá $f = \lim_n f_n$ en Λ y, por continuidad (Proposición 4.23), la convergencia también se da en Λ'' y en Λ^{**}. Así, es suficiente probar el enunciado suponiendo $f \in L_0^\infty$. Por la Proposición 4.24, para toda $u \in \Lambda^*$ existe $g \in \Lambda'$ con $\|g\|_{\Lambda'} = \|u_g\|_{\Lambda^*} \leq \|u\|_{\Lambda^*}$ y tal que $u(f) = u_g(f) = \int_X fg$. Con ello,

$$\|f\|_{\Lambda^{**}} = \sup_{u\in\Lambda^*} \frac{|u(f)|}{\|u\|_{\Lambda^*}} = \sup_{g\in\Lambda'} \frac{|u_g(f)|}{\|u_g\|_{\Lambda^*}} = \sup_{g\in\Lambda'} \frac{\int |fg|}{\|g\|_{\Lambda'}} = \|f\|_{\Lambda''}. \qquad \square$$

Ahora podemos dar una representación del dual de Λ^p_X para un espacio X σ-finito cualquiera.

Teorema 4.28. *Si $0 < p < \infty$ y $W \in \Delta_2(X)$,*

$$\Lambda^p_X(w)^* = \Lambda^p_X(w)' \oplus \Lambda^p_X(w)^s\,,$$

donde

$$\Lambda^p_X(w)^s = \big\{u \in \Lambda^p(w)^* \,:\, |u(f)| \leq C \lim_{t\to\infty} f^*(t), \forall f \in \Lambda^p_X(w)\big\}.$$

Este último subespacio está constituido por funcionales que se anulan sobre las funciones con soporte de medida finita y sólo es no nulo si $\mu(X)=\infty$ y $w \in L^1$.

Demostración. Que todo funcional en $\Lambda^p(w)^s$ se anula sobre las funciones con soporte de medida finita es inmediato a partir de la definición, pues para una tal función f se tiene $\lim_{t\to\infty} f^*(t)=0$. Ello también nos dice que $\Lambda^p(w)' \cap \Lambda^p(w)^s = \{0\}$ ya que si $u=u_g$ está en la anterior intersección ha de ser $\int_X fg = u(f)=0$ para toda $f\in\Lambda^p$ con soporte de medida finita y al ser X σ-finito se sigue $\int_X fg=0$ para toda $f\in\Lambda^p$ con lo que $u=0$. Veamos ahora la descomposición $\Lambda^*=\Lambda'+\Lambda^s$ (que por lo anterior será $\Lambda^*=\Lambda'\oplus\Lambda^s$). Para ello sea $u\in\Lambda^p(w)^*$. Por la Proposición 4.24, existe $g\in\Lambda^p(w)'$ tal que el funcional lineal continuo $u_g(f)=\int_X fg$ coincide con u en L_0^∞. Si $f\in\Lambda^p$ y $Y=\{f\neq 0\}$ tiene medida finita, también $u(f)=u_g(f)$ ya que u, u_g son formas lineales continuas sobre $\Lambda_Y^p(w)$ y coinciden en $L_0^\infty(Y)$ que es denso en $\Lambda_Y^p(w)$ (Teorema 3.13). Sea $u^s=u-u_g$. Entonces u^s se anula sobre las funciones de Λ^p soportadas en un conjunto de medida finita. Por lo tanto, si f es cualquier función en Λ^p y $a=\lim_{t\to\infty} f^*(t)$ y $f_n=f\chi_{\{|f|\le a+1/n\}}$, $n=1,2,\ldots,$ se tiene $u^s(f)=u^s(f_n)$ para todo n (ya que $f-f_n$ tiene soporte de medida finita). Así,

$$|u^s(f)|=|u^s(f_n)|\le \|u^s\|\|f_n\|_{\Lambda^p}, \quad n=1,2,\ldots$$

Pueden darse dos casos: (i) $w\notin L^1$. Entonces $a=0$ y además $\Lambda^p(w)$ tiene norma absolutamente continua (Teorema 3.5). Como $|f_n|\le|f|$ y $|f_n|\to 0$ a.e. se sigue $\|f_n\|_{\Lambda^p}\to 0$ y $|u^s(f)|=0=a$. (ii) $w\in L^1$. Entonces $\|f_n\|_{\Lambda^p}\le\|f_n\|_\infty\|w\|_1^{1/p}\le (a+1/n)\|w\|_1^{1/p}$ y se tiene $|u^s(f)|\le\|u^s\|\|w\|_1^{1/p}a=Ca=C\lim_{t\to\infty}f^*(t)$. En cualquiera de los dos casos, existe $C\in(0,+\infty)$ (independiente de f) tal que $|u^s(f)|\le C\lim_{t\to\infty}f^*(t)$. Es decir $u^s\in\Lambda^p(w)^s$ y se tiene $\Lambda^*=\Lambda'\oplus\Lambda^s$.

Falta probar que $\Lambda^p(w)^s\neq\{0\}$ si y sólo si $\mu(X)=\infty$ y $w\in L^1$. Si $\mu(X)<\infty$ o si $w\notin L^1$ toda función $f\in\Lambda^p(w)$ verifica $\lim_{t\to\infty}f^*(t)=0$ y por lo tanto, para $u\in\Lambda^s$, se tiene $u(f)=0$, $\forall f\in\Lambda^p$. Es decir $u=0$ o si se quiere, $\Lambda^s=\{0\}$. Si $\mu(X)=\infty$ y $w\in L^1$, el funcional $p(f)=\lim_{t\to\infty}f^*(t)$, $p:\Lambda^p\to[0,+\infty)$, es una seminorma:

$$(i) \quad p(\lambda f) = |\lambda p(f)| \quad \text{(obvio)},$$

$$(ii) \quad p(f+g) = \lim_{t\to\infty}(f+g)^*(t) \le \lim_{t}\big(f^*(t/2)+g^*(t/2)\big) = p(f)+p(g).$$

Como $p(1) = 1$ (la función constante 1 está en $\Lambda^p(w)$ en este caso) p es no nulo y existe una forma lineal no nula u sobre Λ^p verificando

$$|u(f)| \le p(f) = \lim_{t\to\infty} f^*(t), \quad \forall f \in \Lambda^p \tag{4.29}$$

(véase [Ru2] por ejemplo). En particular u es continuo pues

$$\|f\|_{\Lambda^p(w)} = \left(\int_0^\infty (f^*)^p w\right)^{1/p} \ge p(f)\|w\|_1^{1/p}, \quad \forall f,$$

y se sigue $|u(f)| \le p(f) \le C\|f\|_{\Lambda^p}, \forall f$. Finalmente la desigualdad (4.29) nos dice que $u \in \Lambda^s$ y así $\Lambda^s \neq \{0\}$. $\square$

Enunciemos dos consecuencias inmediatas del último teorema que resuelven, en el caso $\Lambda = \Lambda^p$, las dos cuestiones sobre dualidad que nos habíamos planteado anteriormente.

Corolario 4.30. *Sea $0 < p < \infty$ y $W \in \Delta_2(X)$.*

(i) Si $\mu(X) < \infty$ o $w \notin L^1$,

$$\Lambda_X^p(w)' = \Lambda_X^p(w)^*.$$

En particular $d(\Omega, p)^* = d(\Omega, p)'$ si $\Omega \notin \ell^1$ y $d(\Omega, p)$ es cuasi-normado.

(ii) Si $\mu(X) = \infty$ y $w \in L^1$,

$$\Lambda_X^p(w)' \subsetneq \Lambda_X^p(w)^*.$$

En particular $\Lambda_X^p(w)^* \neq \{0\}$ en este caso.

Como consecuencia de este último resultado, los Teoremas 4.16, 4.18, 4.20 y la Observación 4.17, siguen siendo válidos (en el caso $d(\Omega, p)$ cuasi-normado, $\Omega \notin \ell^1$) si se sustituye en sus enunciados $d(\Omega, p)'$ por $d(\Omega, p)^*$.

Corolario 4.31. *Sea X no-atómico y $W \in \Delta_2$.*

(i) Si $0 < p \leq 1$, $\Lambda^p_X(w)^* = \{0\}$ si y sólo si se verifican estas dos condiciones:

$$i.1) \quad \mu(X) < \infty \text{ o bien } \mu(X) = \infty \text{ y } w \notin L^1.$$

$$i.2) \quad \sup_{0<t<1} \frac{t^p}{W(t)} = \infty.$$

(ii) Si $1 < p < \infty$, $\Lambda^p_X(w)^* = \{0\}$ si y sólo si se verifican estas dos condiciones:

$$ii.1) \quad \mu(X) < \infty \text{ o bien } \mu(X) = \infty \text{ y } w \notin L^1.$$

$$ii.2) \quad \int_0^1 \left(\frac{t}{W(t)}\right)^{p'-1} dt = \infty.$$

Los espacios $d(\Omega, p)$ han sido estudiados hasta ahora en el caso $\Omega \downarrow$. Como veremos esta condición asegura (si $p \geq 1$) que $\|\cdot\|_{d(\Omega,p)}$ es una norma. En el caso $\Omega \downarrow, p < 1$ ha habido interés por encontrar la envoltura de Banach de $d(\Omega, p)$ y se ha trabajado en ello en [Po] y [NO] por ejemplo. El siguiente enunciado resuelve este problema en el caso general con $w \notin L^1$.

Teorema 4.32. *Sea $0 < p \leq 1$.*

(i) Sea X no-atómico y supongamos que

$$(a) \qquad W \in \Delta_2,$$

$$(b) \qquad w \notin L^1 \text{ o bien } \mu(X) < \infty,$$

$$(c) \qquad \sup_{0<t<1} \frac{t^p}{W(t)} < \infty.$$

Entonces existe un peso $\tilde{w}$ decreciente con $\widetilde{W}(t) \approx \inf_{s>0} \max(1, t/s) W^{1/p}(s), t > 0$, y tal que la topología de Mackey en $\Lambda^p_X(w)$ es la inducida por la norma $\|\cdot\|_{\Lambda^1_X(\tilde{w})}$. La envoltura de Banach de $\Lambda^p(w)$ es $\Lambda^1(\tilde{w})$ si $\tilde{w} \notin L^1$ y es el espacio

$$\Lambda^1(\tilde{w})_0 = \left\{f \in \Lambda^1(\tilde{w}) \,:\, \lim_{t\to\infty} f^*(t) = 0\right\}$$

en caso contrario.

(ii) Si $\Omega \notin \ell^1$ y el espacio $d(\Omega, p)$ es cuasi-normado, existe una sucesión decreciente $\widetilde{\Omega} = (\widetilde{\Omega}_n)_n$ tal que

$$\sum_{k=0}^{n} \widetilde{\Omega}_k \approx \sup_{m\geq 0} \max\left(1, \frac{n+1}{m+1}\right) \left(\sum_{k=0}^{m} \Omega_k\right)^{1/p}, \ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

y la norma $\|\cdot\|_{d(\widetilde{\Omega},1)}$ induce la topología de Mackey en $d(\Omega,p)$. Si $\widetilde{\Omega}\notin\ell^1$ el completado Mackey de $d(\Omega,p)$ es $d(\widetilde{\Omega},1)$ y este espacio es $c_0=c_0(\mathbb{N}^*)$ en caso contrario.

Demostración. Ambos apartados són análogos. Por el Corolario 4.30 el dual y el asociado de $\Lambda=\Lambda^p_X(w)$ ($=d(\Omega,p)$ en el caso (ii)) coinciden (además $\Lambda^p(w)'=\Lambda^p(w)^*\neq\{0\}$ por el Teorema 4.11). Se sigue entonces de la Proposición 4.23 que la topología de Mackey en Λ (la topología de la norma del bidual) es la inducida por la norma del biasociado y, dado que Λ'' es completo, el completado Mackey $\widetilde{\Lambda}$ está incluido en Λ''. Por el Teorema 4.15 (Teorema 4.21 en el caso (ii)), $\Lambda''=\Lambda^1(\tilde{w})$ ($d(\widetilde{\Omega},1)$ resp.). Si $\tilde{w}\notin L^1$ ($\widetilde{\Omega}\notin\ell^1$), el Teorema 3.13 nos dice que Λ es denso en Λ'' (porque $L_0^\infty\subset\Lambda$) y ha de ser $\widetilde{\Lambda}=\Lambda''$. Si, por el contrario $\tilde{w}\in L^1$, el espacio $\Lambda^1(\tilde{w})_0$ es cerrado en $\Lambda^1(\tilde{w})$ y contiene a $\Lambda^p(w)$. Si $f\in\Lambda^1(\tilde{w})_0$ las funciones $f_n=f\chi_{\{|f|>f^*(n)\}}$ tienen soporte en un conjunto de medida finita y convergen a f en $\Lambda^1(\tilde{w})$. Cada una de estas fuciones f_n tiene norma absolutamente continua (Corolario 3.6) y, por lo tanto, cada f_n es límite en $\Lambda^1(\tilde{w})$ de funciones en L_0^∞. Se sigue que este último espacio es denso en $\Lambda^1(\tilde{w})_0$ y dado que $L_0^\infty\subset\Lambda^p(w)$, concluimos que la envoltura de Banach de $\Lambda^p(w)$ es $\Lambda^1(\tilde{w})_0$. En el caso atómico, $\widetilde{\Omega}\in\ell^1$ implica $\Lambda''=d(\widetilde{\Omega},1)=\ell^\infty$ y $\widetilde{\Lambda}=c_0$. □

Observación 4.33. Las condiciones (a) y (c) en el apartado (i) del teorema anterior son naturales ya que si $W\notin\Delta_2$ no hay topología en $\Lambda^p(w)$ y, si la condición (c) falla, $\Lambda^*=\{0\}$ (Teorema 4.11) y carece de sentido considerar la topología de Mackey en $\Lambda^p(w)$ "respecto al par dual $\big(\Lambda^p(w),\Lambda^p(w)^*\big)$". Las condiciones sobre Ω en el apartado (ii) no son restrictivas en absoluto ya que, si $\Omega\in\ell^1$, $d(\Omega,1)=\ell^\infty$ y el completado Mackey es, en este caso, el mismo espacio $d(\Omega,p)=\ell^\infty$.

N. Popa prueba en [Po], para el caso $\Omega\downarrow$, que el completado Mackey de $d(\Omega,p)$ $(0<p<1)$ es ℓ^1 si y sólo si $d(\Omega,p)\subset\ell^1$. Gracias al Teorema 4.32 podemos extender este resultado al caso general.

Corolario 4.34. *Sea $0<p\leq 1$, $\Omega\notin\ell^1$. Entonces la envoltura de Banach de $d(\Omega,p)$ es ℓ^1 si y sólo si $d(\Omega,p)\subset\ell^1$.*

Demostración. Si $d(\Omega,p)\subset\ell^1$ entonces $\ell^\infty=\big(\ell^1\big)'\subset d(\Omega,p)'$ y se sigue (Teorema 4.20) que estos dos últimos espacios son iguales y así, $d(\Omega, p)'' = \ell^1$. Como $d(\Omega, p)'' = d(\widetilde{\Omega}, 1)$ para cierta sucesión $\widetilde{\Omega}$ (Teorema 4.21), se sigue que $\widetilde{\Omega} \notin \ell^1$ y, por el teorema anterior, la envoltura de Banach de $d(\Omega, p)$ es $d(\Omega, p)'' = \ell^1$.

El recíproco es inmediato. $\square$

Pasamos a estudiar ahora los espacios débiles $\Lambda^{p,\infty}$. Primero investigaremos el caso X no-atómico.

Teorema 4.35. *Si $0 < p < \infty$, $W \in \Delta_2$ y X es no-atómico, $\Lambda_X^{p,\infty}(w)' = \Lambda_X^{p,\infty}(w)^*$ si y sólo si estos dos espacios son nulos.*

Demostración. La suficiencia es obvia. Para ver la necesidad es suficiente probar que $\Lambda_X^{p,\infty}(w)' \neq \Lambda_X^{p,\infty}(w)^*$ si el primero de estos espacios no es trivial. Pero si $\Lambda_X^{p,\infty}(w)' \neq \{0\}$ la función $W^{-1/p}$ es localmente integrable en $[0, \infty)$ (Teorema 4.11) y se puede definir la seminorma

$$p(f) = \limsup_{t \to 0} \frac{\int_0^t f^*}{\int_0^t W^{-1/p}}, \qquad f \in \Lambda^{p,\infty}.$$

Si $f \in \Lambda_X^{p,\infty}(w)$ se tiene $f^*(t) \leq \|f\|_{\Lambda^{p,\infty}} W^{-1/p}(t)$, así que p está bien definida y es continua. Además es no nula porque existe $f_0 \in \Lambda^{p,\infty}$ con $f_0^* = W^{-1/p}$ en $[0, \mu(X))$ y será $p(f_0) = 1$. Por los teoremas de Hahn-Banach ([Ru2]) existe $u \in \Lambda^*$ no nula tal que $|u(f)| \leq p(f)$, $\forall f$. Esta forma lineal no está en Λ' pues se anula sobre toda función $f \in L_0^\infty$:

$$p(f) = \limsup_{t \to 0} \frac{\int_0^t f^*}{\int_0^t W^{-1/p}} \leq \|f\|_{L^\infty} \limsup_{t \to 0} \frac{1}{\frac{1}{t}\int_0^t W^{-1/p}} = 0.$$

Se sigue que $\Lambda_X^{p,\infty}(w)^* \neq \Lambda_X^{p,\infty}(w)'$. $\square$

Teorema 4.36. *Sea $0 < p < \infty$ y $d^\infty(\Omega, p)$ cuasi-normado. Sea $W_n = \sum_{k=0}^n \Omega_k$ $n = 0, 1, \ldots$ Entonces, si $\Omega \notin \ell^1$ y $W^{-1/p} \notin \ell^1$, se tiene $d^\infty(\Omega, p)^* \neq d^\infty(\Omega, p)'$.*

Demostración. La seminorma

$$p(f) = \limsup_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=0}^n f^*(k)}{\sum_{k=0}^n W_k^{-1/p}}, \qquad f \in d^\infty(\Omega, p),$$

es continua y no nula y, si $W^{-1/p} \notin \ell^1$, se anula sobre las sucesiones finitas. Se sigue, por un argumento análogo al de la demostración anterior, que existe $u \in d^\infty(\Omega,p)^* \setminus d^\infty(\Omega,p)'$. $\square$

Falta ahora, en el caso X no-atómico, caracterizar la identidad $\Lambda_X^{1,\infty}(w)^* = \{0\}$. Para ello necesitaremos una serie de resultados previos.

Lema 4.37. *Sea $W \in \Delta_2$. Si $\mu(X) = \infty$ y $w \in L^1$ entonces $\Lambda^{1,\infty}(w)^* \neq \{0\}$.*

Demostración. Bajo las hipótesis, $p(f) = \lim_{t\to\infty} f^*(t)$, $p : \Lambda^{1,\infty} \to [0,\infty)$, es una seminorma continua en $\Lambda^{1,\infty}(w)$ no nula (ya que $1 \in \Lambda^{1,\infty}(w)$ y $p(1) = 1 \neq 0$). De los teoremas de Hahn-Banach (véase [Ru2]) se sigue que $\Lambda^{1,\infty}(w)^* \neq \{0\}$. $\square$

Lema 4.38. *Sea X no-atómico y $f \in \Lambda_X^{1,\infty}(w)$. Si $\lim_{t\to\infty} f^*(t) = 0$ existe $F \in \Lambda_X^{1,\infty}(w)$ verificando:*

$$(i)\quad |f(x)| \leq F(x) \text{ a.e. } x \in X$$
$$(ii)\quad F^*(t) = \|f\|_{\Lambda^{1,\infty}} W^{-1}(t), \quad 0 < t < \mu(X).$$

Demostración. Podemos suponer $\|f\|_{\Lambda^{1,\infty}} = 1$. Sea $A = \{f \neq 0\}$, $a = \mu(A)$. Dado que $f^*(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$, existe una transformación $\sigma : A \to (0,a)$ que conserva la medida tal que $|f(x)| = f^*\big(\sigma(x)\big)$ a.e. $x \in A$ (véase Corolario II.7.6 en [BS]). Defínase

$$F_0(x) = W^{-1}\big(\sigma(x)\big)\chi_A(x), \quad x \in X.$$

Como σ preserva la medida, $F_0^*(t) = W^{-1}(t)$, $0 < t < a$. Además, puesto que $f^* \leq W^{-1}$, se tiene

$$F_0(x) \geq f^*\big(\sigma(x)\big) = |f(x)| \quad \text{a.e. } x \in A.$$

Si $a = \mu(X)$ la función que buscamos es claramente, $F = F_0$. Si por el contrario, $a < \mu(X)$ tomamos $0 \leq F_1 \in \mathcal{M}(X\setminus A)$ con $F_1^*(t) = W^{-1}(a+t)$, $0 \leq t < \mu(X\setminus A)$. Es inmediato comprobar entonces que la función $F = F_0 + F_1\chi_{X\setminus A}$ satisface el enunciado. $\square$

Introducimos ahora la seminorma N cuyas propiedades (Proposición 4.40) nos serán de utilidad.

Definición 4.39. Si $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio cuasi-normado se define la seminorma $\mathrm{N} : E \to [0, +\infty)$ por

$$\mathrm{N}(f) = \mathrm{N}_E(f) = \inf\left\{ \sum_{k=1}^{K} \|f_k\| \,:\, (f_k)_k \subset E,\, f = \sum_k f_k \right\}, \quad f \in E.$$

Podría probarse que N es la norma del bidual:

$$N(f) = \sup_{u \in \Lambda^*} \frac{|u(f)|}{\|u\|_{\Lambda^*}} = \|f\|_{\Lambda^{**}},$$

aunque ello no será usado en ningún momento.

Proposición 4.40. *Sea Λ un espacio de Lorentz cuasi-normado y $N = N_\Lambda$. Entonces para $f, g \in \Lambda$ se tiene,*

$$(i) \quad N(f) \leq \|f\|_\Lambda.$$

$$(ii) \quad |f| \leq |g| \Rightarrow N(f) \leq N(g).$$

$$(iii) \quad N(f) = N(|f|).$$

$$(iv) \quad N(f) = \inf\left\{ \sum_{k=1}^{K} \|f_k\|_\Lambda \,:\, |f| \leq \sum_k |f_k| \right\}.$$

Además $\Lambda^* = \{0\}$ si y sólo si $N = 0$.

Demostración. (i) es inmediato. Para ver (ii), si $g = \sum_k g_k$ se tiene $f = (f/g)g = \sum_k (f/g)g_k$, por lo que $\mathrm{N}(f) \leq \sum_k \left\|(f/g)g_k\right\|_\Lambda \leq \sum_k \|g_k\|_\Lambda$ y así $\mathrm{N}(f) \leq \mathrm{N}(g)$. (iii) y (iv) son corolarios de (ii).

Probemos ahora la última afirmación. Si existe $0 \neq u \in \Lambda^*$ podemos encontrar $f \in \Lambda$ con $u(f) \neq 0$. Para toda descomposición finita $f = \sum_k f_k$ se tiene entonces, $|u(f)| \leq \sum_k |u(f_k)| \leq \|u\| \sum_k \|f_k\|_\Lambda$. Con ello $\sum_k \|f_k\|_\Lambda \geq |u(f)|/\|u\|$ y al tomar el ínfimo obtenemos $\mathrm{N}(f) \geq |u(f)|/\|u\| > 0$, es decir, $\mathrm{N} \neq 0$. Recíprocamente, dado que N es una seminorma continua en Λ (por la propiedad (i)), si $\mathrm{N} \neq 0$ existe (teoremas de Hahn-Banach, [Ru2]) una forma lineal continua u no nula en Λ. $\square$

En el siguiente resultado, probado inicialmente por A. Haaker en [Ha] para el caso $X = \mathbb{R}^+$, exponemos una condición necesaria para que el dual de $\Lambda^{1,\infty}(w)$ sea nulo. Como quedará implícito en la demostración del Teorema 4.45, la condición es también suficiente. La prueba que damos aquí es una adaptación de la de Haaker al caso X no-atómico.

Lema 4.41. *Sea X no-atómico y $W \in \Delta_2$. Si $\Lambda^{1,\infty}_X(w)^* = \{0\}$ y $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\int_{nt}^{s} W^{-1} \leq \epsilon \int_{t}^{s} W^{-1}, \quad 0 < t < nt < s \leq \mu(X).$$

Demostración. Podemos suponer que W es estrictamente creciente (si es necesario sustituyendo esta función por $W(t)(1+2t)/(1+t)$ por ejemplo, que sí lo es y, al ser comparable a W, no altera nada). Sea $0 \leq f \in \Lambda^{1,\infty}(w)$ con $f^* = W^{-1}$ en $\big(0, \mu(X)\big)$. Por la Proposición 4.40, $\mathrm{N}(f) = 0$ y existen funciones positivas $f_1, \ldots, f_{n-1} \in \Lambda^{1,\infty}(w)$ con

$$f \leq \sum_k f_k$$

y tal que, si $a_k = \|f_k\|_{\Lambda^{1,\infty}}$, $k = 1, \ldots, n-1$, se tiene

$$\sum_k a_k < \epsilon.$$

Por el Lema 4.37, $\mu(X) < \infty$ o bien $\mu(X) = \infty$ y $w \notin L^1$. En cualquier caso $\lim_{t\to\infty} f_k^*(t) = 0$, $k = 1, \ldots, n-1$. Podemos entonces tomar funciones $g_1, \ldots, g_{n-1} \in \Lambda^{1,\infty}(w)$ con $g_k \geq f_k$ a.e. y $g_k^*(t) = a_k W^{-1}(t)$, $0 < t < \mu(X)$ (Lema 4.38). Resumiendo,

$$\begin{aligned} (i) &\quad f \leq g_1 + \cdots + g_{n-1} \ \text{ a.e.,} \\ (ii) &\quad g_k^*(t) = a_k W^{-1}(t),\ 0 < t < \mu(X), \\ (iii) &\quad a_1 + \cdots + a_{n-1} < \epsilon. \end{aligned}$$

Si ahora es $s, t > 0$ con $nt < s < \mu(X)$, definimos

$$\begin{aligned} F &= \big\{x \in X \,:\, W^{-1}(s) < f(x) \leq W^{-1}(t)\big\}, \\ E_k &= \big\{x \in F \,:\, g_k(x) \leq a_k W^{-1}(t)\big\}, \quad k = 1, \ldots, n-1, \\ E &= \bigcap_{k=1}^{n-1} E_k. \end{aligned}$$

Como $f^* = W^{-1}$ y esta función es estrictamente decreciente,

$$\mu(F) = \lambda_{f^*}\big(W^{-1}(s)\big) - \lambda_{f^*}\big(W^{-1}(t)\big) = s - t.$$

Además,

$$\mu(F \setminus E_k) = \mu\big(\{x \in F \,:\, g_k(x) > a_k W^{-1}(t)\}\big) \le \lambda_{g_k^*}\big(a_k W^{-1}(t)\big) = t$$

y $\mu(F \setminus E) = \mu\big((F \setminus E_1) \cup \cdots \cup (F \setminus E_{n-1})\big) \le (n-1)t$. Por lo tanto,

$$\mu(E) \ge \mu(F) - (n-1)t = s - nt.$$

Dado que $E \subset F$, si $G = \big\{W^{-1}(s) < f \le W^{-1}(s - \mu(E))\big\}$, la función de distribución de $f\chi_E$ mayora a la de $f\chi_G$ y se tiene,

$$\int_E f = \int_0^\infty (f\chi_E)^* \ge \int_0^\infty (f\chi_G)^* = \int_{s-\mu(E)}^s W^{-1} \ge \int_{nt}^s W^{-1}. \tag{4.42}$$

Por otra parte,

$$\int_E f \le \sum_{k=1}^{n-1} \int_E g_k \le \sum_k \int_{E_k} g_k = \sum_k \int_0^\infty (g_k \chi_{E_k})^*.$$

Pero $\mu(E_k) \le \mu(F) = s - t$ y en este conjunto $g_k \le a_k W^{-1}(t) = g_k^*(t)$. Así, si $H_k = \{g_k^*(t) \ge g_k > g_k^*(s)\}$, la función de distribución de χ_{H_k} mayora a la de χ_{E_k} (nótese que $g_k^* = a_k W^{-1}$ es estrictamente decreciente) y se tiene, $\int (g_k \chi_{E_k})^* \le \int_t^s g_k^* = a_k \int_t^s W^{-1}$ con lo cual,

$$\int_E f \le \sum_k a_k \int_t^s W^{-1} < \epsilon \int_t^s W^{-1}.$$

Ello, combinado con (4.42), concluye la demostración. $\square$

Definición 4.43. Una función $f \in \mathcal{M}(X)$ es escalonada si tiene la forma

$$f = \sum_{n=1}^\infty a_n \chi_{E_n},$$

donde $(a_n)_n \subset \mathbb{C}$ y $(E_n)_n$ es una sucesión de conjuntos medibles en X disjuntos dos a dos.

La demostración del siguiente enunciado es totalmente análoga a la del Lema 7 en [Cw1], en donde se hace para el caso $W(t) = t^{1/p}$.

Lema 4.44 (M. Cwikel). *Toda función* $0 \leq f \in \Lambda_X^{1,\infty}(w)$ *está mayorada por una función escalonada* $F \in \Lambda^{1,\infty}$.

El resultado al que queríamos llegar es el siguiente.

Teorema 4.45. *Sea* X *no-atómico y* $W \in \Delta_2$*. Si* $0 < p < \infty$*,*

$$\Lambda_X^{p,\infty}(w)^* = \{0\}$$

si y sólo si

$$\lim_{t\to 0^+} \sup_{0<r<\mu(X)} \frac{W^{1/p}(tr)}{tW^{1/p}(r)} = 0. \tag{4.46}$$

Demostración. Por la Observación 2.6, podemos suponer $p = 1$.

Suficiencia. Supondremos (4.46) y probaremos que $\mathrm{N} = \mathrm{N}_{\Lambda^{1,\infty}} = 0$. Como consecuencia de la Proposición 4.40 se tendrá $\Lambda_X^{p,\infty}(w)^* = \{0\}$. Sea pues $f \in \Lambda^{1,\infty}$ y veamos que $\mathrm{N}(f) = 0$. Por el Lema 4.44 y la Proposición 4.40(ii), podemos suponer que f es escalonada y positiva:

$$f = \sum_n a_n \chi_{A_n}, \quad (a_n)_n \subset (0,\infty),\ A_n \cap A_m = \emptyset,\ n \neq m.$$

Nótese que o bien $\mu(X) < \infty$ o bien, por (4.46), $W(\infty) = \infty$. Ha de ser por lo tanto, $\lim_{t\to\infty} f^*(t) = 0$, por lo que $\mu(A_n) < \infty$ para todo $n = 1, 2, \ldots$ También por (4.46), para todo $\epsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$2^m \frac{W(2^{-m}r)}{W(r)} < \epsilon, \quad 0 < r < \mu(X).$$

Es decir,

$$W^{-1}(2^m t) < \epsilon\, 2^{-m} W^{-1}(t), \quad 0 < t < 2^{-m}\mu(X).$$

Dividimos ahora cada uno de los conjuntos A_n en 2^m subconjuntos medibles $(A_n^k)_{k=1}^{2^m}$ disjuntos entre si y con igual medida. Para cada $k = 1, 2, \ldots, 2^m$ será

$$f_k = \sum_n a_n \chi_{A_n^k}.$$

Entonces $f = \sum_k f_k$ y para $0 < t < 2^{-m}\mu(X)$ (f_k^* es nula fuera de ese intervalo) se tiene,

$$f_k^*(t) = f^*(2^m t) \le W^{-1}(2^m t)\|f\|_{\Lambda^{1,\infty}} < \epsilon\, 2^{-m} W^{-1}(t)\|f\|_{\Lambda^{1,\infty}}, \quad k = 1, \dots, 2^m.$$

Así, $\|f_k\|_{\Lambda^{1,\infty}} \le \epsilon\, 2^{-m}\|f\|_{\Lambda^{1,\infty}}$ y por lo tanto,

$$\mathrm{N}(f) \le \sum_k \|f_k\|_{\Lambda^{1,\infty}} \le \epsilon\, \|f\|_{\Lambda^{1,\infty}}.$$

Como ello es válido para cualquier $\epsilon > 0$ se concluye $\mathrm{N}(f) = 0$.

Necesidad. Supongamos ahora que $\Lambda_X^{p,\infty}(w)^* = \{0\}$. Por el Lema 4.41, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{nt}^{s} W^{-1} \le \frac{1}{2}\int_t^s W^{-1}, \quad t, s > 0,\ nt < s < \mu(X). \tag{4.47}$$

Para ver (4.46) probaremos que para $K \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{0<r<\mu(X)} \frac{W(tr)}{tW(r)} \le 4n\, 2^{-K}$$

si $0 < t < n^{-2K}$. En efecto, para $0 < r < \mu(X)$ defínase

$$A_k = \int_{n^k tr}^{r} W^{-1}, \quad k = 0, 1, \dots, K.$$

Por (4.47),

$$A_0 \ge 2A_1 \ge 4A_2 \ge \cdots \ge 2^K A_K$$

y

$$\frac{1}{2} \ge \frac{A_1}{A_0} = 1 - \frac{A_0 - A_1}{A_0} \ge 1 - 2^{-K}\frac{A_0 - A_1}{A_K}.$$

Pero $A_0 - A_1 = \int_{tr}^{ntr} W^{-1} \le (n-1)trW^{-1}(tr)$ y $A_K \ge (1 - n^K t)rW^{-1}(r)$. Por lo tanto,

$$\frac{1}{2} \ge 1 - 2^{-K}\frac{(n-1)tW(r)}{(1 - n^K t)W(rt)}.$$

De donde,

$$\frac{W(tr)}{tW(r)} \le 2^{1-K}\frac{n-1}{1 - n^K t} \le 4n\, 2^{-K}. \qquad \square$$

Observación 4.48.

(i) La condición (4.46) aparece por primera vez en [Ha] en donde A. Haaker prueba el resultado anterior para el caso $X = \mathbb{R}^+$, $w \notin L^1$. La parte de la demostración vista aquí que prueba la necesidad de dicha condición, así como el Lema 4.41, es una adaptación, al contexto X no-atómico, del argumento usado en [Ha].

(ii) En la demostración se ha visto que la condición del Lema 4.41 implica (4.46). Por lo tanto dicha condición es equivalente también a $\Lambda^{1,\infty}(w)^* = \{0\}$.

El siguiente enunciado resume en parte lo anterior.

Corolario 4.49. *Sea $0 < p < \infty$, X no-atómico y $\Lambda = \Lambda_X^{p,\infty}(w)$ cuasi-normado. Entonces:*

(i) Si $\lim_{t\to 0^+} \sup_{0<r<\mu(X)} \frac{W^{1/p}(tr)}{tW^{1/p}(r)} = 0$,

$$\{0\} = \Lambda' = \Lambda^*.$$

(ii) Si la anterior condición falla pueden darse dos casos:

(ii.1) Si $\int_0^1 W^{-1/p} = \infty$,

$$\{0\} = \Lambda' \subsetneq \Lambda^*.$$

(ii.2) Si $\int_0^1 W^{-1/p} < \infty$,

$$\{0\} \neq \Lambda' \subsetneq \Lambda^*.$$

Demostración. Es consecuencia inmediata de los Teoremas 4.11, 4.35 y 4.45.

Ejemplos 4.50.

(i) Podemos aplicar los resultados anteriores al cálculo de los duales y asociados de los espacios de Lorentz $L^{p,q}(X)$ (X no atómico), observando que $L^{p,q} = \Lambda^q\big(t^{q/p-1}\big)$ y $L^{p,\infty} = \Lambda^{p,\infty}(1)$. Obtenemos así por otros métodos, resultados ya conocidos (véase [Hu], [CS], [Cw1], [Cw2]):

(i.1) $L^{p,q}(X)' = L^{p,q}(X)^* = \{0\}$ si $0 < p < 1$, $0 < q < \infty$,

(i.2) $L^{1,q}(X)' = L^{1,q}(X)^* = L^\infty(X)$ si $0 < q \leq 1$, (i.3) $L^{1,q}(X)' = L^{1,q}(X)^* = \{0\}$ si $1 < q < \infty$,

(i.4) $L^{p,q}(X)' = L^{p,q}(X)^* = L^{p',\infty}(X)$ si $1 < p < \infty,\ 0 < q \le 1$,

(i.5) $L^{p,q}(X)' = L^{p,q}(X)^* = L^{p',q'}(X)$ si $1 < p < \infty,\ 1 < q < \infty$,

(i.6) $L^{p,\infty}(X)' = L^{p,\infty}(X)^* = \{0\}$ si $0 < p < 1$,

(i.7) $\{0\} = L^{1,\infty}(X)' \subsetneq L^{1,\infty}(X)^*$,

(i.8) $\{0\} \neq L^{p,\infty}(X)' \subsetneq L^{p,\infty}(X)^*$ si $1 < p < \infty$.

(ii) Si $w = \chi_{(0,1)}$, $\Lambda^p_{\mathbb{R}^+}(w) \supset \Lambda^p_{\mathbb{R}^+}(1) = L^p(\mathbb{R}^+)$. $\Lambda^p_{\mathbb{R}^+}(w)^* \neq \{0\}$ para todo $p \in (0,\infty)$ mientras que, al igual que L^p, $\Lambda^p_{\mathbb{R}^+}(w)' \neq \{0\}$ si y sólo si $p \ge 1$. En el caso débil $\Lambda^{p,\infty}_{\mathbb{R}^+}(w)^* \neq \{0\}$ para todo $p \in (0,\infty)$ y el asociado sólo es no nulo si $p > 1$.

5. Normabilidad

En esta sección (X,μ) será un espacio de medida σ-finito cualquiera. Estudiaremos cuándo $\Lambda^{p,q}_X(w)$ es un espacio de Banach. Con ello queremos decir que existe una norma en $\Lambda^{p,q}_X(w)$ equivalente al funcional $\|\cdot\|_{\Lambda^{p,q}_X(w)}$. En el caso X no-atómico, existen resultados parciales ya conocidos en este sentido. G.G. Lorentz ([Lo2], 1951) ya probó que, para $p \ge 1$, $\|\cdot\|_{\Lambda^p_{(0,l)}(w)}$ es una norma si y sólo si w es decreciente (es decir, igual a.e. a una función decreciente) en $(0,l)$. A. Haaker ([Ha], 1970) caracteriza la normabilidad de los $\Lambda^{p,\infty}_{\mathbb{R}^+}(w)$, $0 < p < \infty$ (véase también [So]) y da algunos resultados parciales para los $\Lambda^p_{\mathbb{R}^+}(w)$, $p < \infty$. E. Sawyer ([Sa2], 1990) da la condición necesaria y suficiente para que $\Lambda^p_X(w)$ sea normado en el caso $1 < p < \infty$, $X = \mathbb{R}^n$, mientras que M.J. Carro, A. García del Amo y J. Soria ([CGS], 1996) hacen lo mismo en el caso $0 < p < \infty$, $\mu(X) = \infty$, X no-atómico.

En el caso $X = \mathbb{N}^*$ (espacios $d(\Omega,p)$) no conocemos ningún resultado previo sobre normabilidad. Salvo en algún caso aislado, todas las referencias sobre los espacios $d(\Omega,p)$ suponen que la sucesión Ω es decreciente lo que, en el caso $p \ge 1$, asegura que $\|\cdot\|_{d(\Omega,p)}$ es una norma.

Aquí resolveremos el caso general para un espacio X resonante unificando de esta manera todos los resultados anteriores e incluyendo los, hasta ahora ausentes, análogos para los espacios $d(\Omega,p)$. En el caso X atómico reduciremos el problema a $\mathbb{R}^n$ y aquí usaremos los resultados ya conocidos.

Empezamos con resultados generales.

Teorema 5.1. *Si* $1 \le p < \infty$ *y* $w \downarrow$, *entonces* $\|\cdot\|_{\Lambda^p_X(w)}$ *es una norma.*

Demostración. En el caso X no-atómico,

$$\|f+g\|_{\Lambda^p_X(w)} = \left(\int_0^\infty \big((f+g)^*\big)^p w\right)^{1/p} = \sup_{h^*=w}\left(\int_X |f+g|^p h\right)^{1/p}$$

y es inmediata la desigualdad triangular. Por otra parte si X es σ-finito cualquiera, sabemos (método de los retractos) que existe un espacio no-atómico $\bar{X}$ y una aplicación lineal $F : \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(\bar{X})$ tal que $F(f)^* = f^*$ (c.f. [BS]) y el resultado se sigue inmediatamente del caso atómico. $\square$

El enunciado que sigue da condiciones suficientes de normabilidad.

Teorema 5.2. *Sea* X σ*-finito. Entonces,*

(i) si $1 \le p < \infty$ *y* $w \in B_{p,\infty}$, $\Lambda^p_X(w)$ *es normable,*

(ii) si $0 < p < \infty$ *y* $w \in B_p$, $\Lambda^{p,\infty}_X(w)$ *es normable.*

Demostración. (i) Si $p = 1$ y $w \in B_{p,\infty} = B_{1,\infty}$, existe ([CGS]) una función decreciente $\tilde{w}$ con $\widetilde{W} \approx W$. Se sigue que $\|\cdot\|_{\Lambda^1(\tilde{w})}$ es una norma en $\Lambda^1(w)$ equivalente a la original. Si $p > 1$ y $w \in B_{p,\infty}$, el operdor de Hardy A verifica $A : L^p_{\mathrm{dec}}(w) \to L^p(w)$ y se sigue que el funcional $\|f\| = \|f^{**}\|_{L^p(w)}$ es una norma equivalente a la cuasi-norma original.

(ii) Si $w \in B_p$ se tiene $A : L^{p,\infty}_{\mathrm{dec}}(w) \to L^{p,\infty}(w)$ (véase [So]) y el funcional $\|f\| = \|f^{**}\|_{L^{p,\infty}(w)}$ es una norma equivalente. $\square$

Observación 5.3. El funcional $\|\cdot\|_{\Lambda^{p,\infty}}$ no es, salvo casos muy triviales, una norma. De hecho, si (X,μ) es un espacio de medida cualquiera y existen dos conjuntos medibles $E \subset F \subset X$ con $1 < a = W\big(\mu(F)\big)/W\big(\mu(E)\big) < \infty$ (siendo w un peso cualquiera en $\mathbb{R}^+$), se tiene $\|f+g\|_{\Lambda^{p,\infty}} > \|f\|_{\Lambda^{p,\infty}} + \|g\|_{\Lambda^{p,\infty}}$ para $f = a\chi_E + \chi_{F\setminus E}$, $g = \chi_E + a\chi_{F\setminus E}$ (suponiendo sin pérdida de generalidad que $\mu(F\setminus E) \le \mu(E)$). Podemos afirmar que son equivalentes estos enunciados:

(i) $\|\cdot\|_{\Lambda^{p,\infty}}$ es un norma.

(ii) $\|\cdot\|_{\Lambda^{p,\infty}} = C\|\cdot\|_{L^\infty}$.

(iii) La restricción de W al rango de μ es constante.

Teorema 5.4. *Un espacio de Lorentz Λ_X sobre X σ-finito es normable si y sólo si $\Lambda = \Lambda''$ con normas equivalentes. En particular, todo espacio de Lorentz normable Λ es espacio funcional de Banach con la norma $\|\cdot\|_{\Lambda''}$.*

Demostración. La suficiencia de la condición es obvia. Recíprocamente, si Λ es normable con una norma $\|\cdot\|$, ésta ha de ser, por el Teorema de Hahn-Banach, equivalente a $\|\cdot\|_{\Lambda^{**}}$ y por el Corolario 4.27, se tiene $\|f\|_\Lambda \approx \|f\|_{\Lambda''}$ para toda función f con norma absolutamente continua en Λ. Como toda $|f| \in \Lambda$ es límite puntual creciente de funciones en L_0^∞ (las cuales tienen n.a.c. por 3.6 y 3.9) y los funcionales $\|\cdot\|_\Lambda$ y $\|\cdot\|_{\Lambda''}$ tienen la propiedad de Fatou, se sigue que $\|f\|_\Lambda \approx \|f\|_{\Lambda''}$ para toda $f \in \Lambda$. Con ello hemos probado la primera afirmación. Por otra parte es inmediato comprobar que la norma $\|\cdot\|_{\Lambda''}$ verifica las propiedades de la definición de espacio funcional de Banach (Definición 4.3). $\square$

Observación 5.5. Si $\|\cdot\|_\Lambda$ es una norma, entonces $(\Lambda, \|\cdot\|_\Lambda)$ es espacio funcional de Banach y $\|\cdot\|_\Lambda = \|\cdot\|_{\Lambda''}$ (véase [BS]).

A partir de ahora nos dedicaremos al caso X resonante. Veremos cómo las condiciones anteriores son también necesarias (en el caso atómico). Como consecuencia inmediata del teorema anterior y del teorema de representación de Luxemburg ([BS]) tenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.6. *Sea X no-atómico, $0 < p, q \leq \infty$. Si $\Lambda_X^{p,q}$ es normable entonces también lo es $\Lambda^{p,q}_{(0,\mu(X))}$ y, si $\|\cdot\|_{\Lambda_X^{p,q}}$ es una norma también lo es $\|\cdot\|_{\Lambda^{p,q}_{(0,\mu(X))}}$.*

Antes de seguir necesitaremos un elemental lema técnico.

Lema 5.7. *Sea $A \subset \mathbb{R}$ medible y w un peso con $w = w\chi_{(0,|A|)}$. Entonces,*

(i) $\|\cdot\|_{\Lambda_A(w)}$ *es una norma si y sólo si* $\|\cdot\|_{\Lambda_\mathbb{R}(w)}$ *es una norma,*

(ii) $\Lambda_A(w)$ *es normable si y sólo si* $\Lambda_\mathbb{R}(w)$ *es normable.*

Demostración. Como $\Lambda_A(w) \subset \Lambda_\mathbb{R}(w)$ la implicación "si" es inmediata. Para ver el "sólo si", supongamos que

$$\left\| \sum_{j=1}^n f_j \right\|_{\Lambda_A(w)} \leq C \sum_j \|f_j\|_{\Lambda_A(w)}, \quad \forall f_1, \ldots, f_n \in \Lambda_A(w),$$

y veamos, primero, que se tiene una desigualdad análoga sustituyendo A por cualquier conjunto $Y \subset \mathbb{R}$ de medida menor o igual que $|A|$. Por monotonía podemos suponer $|Y| < |A|$. Entonces existe un abierto $G \supset Y$ con $b = |G| < |A|$. Sea $\tilde{A} \subset A$ con $|\tilde{A}| = b$ y sea $\sigma_1 : \tilde{A} \to (0, b)$ una transformación que conserva la medida (Proposición 7.4 en [BS]). Como G es una unión numerable de intervalos, es fácil construir $\sigma_2 : (0, b) \to G$ conservando la medida. Entonces $\sigma = \sigma_2 \circ \sigma_1 : \tilde{A} \to G$ conserva la medida y para cada $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{M}(Y) \subset \mathcal{M}(G)$, las funciones $\tilde{f}_j = f_j \circ \sigma \in \mathcal{M}(A)$, $j = 1, \ldots, n$, verifican $\tilde{f}_j^* = f_j^*$, $\forall j$ y $(\tilde{f}_1 + \cdots + \tilde{f}_n)^* = (f_1 + \cdots + f_n)^*$. Por lo tanto

$$\|f_1 + \cdots + f_n\|_{\Lambda_Y(w)} = \|\tilde{f}_1 + \cdots + \tilde{f}_n\|_{\Lambda_A(w)} \leq C \sum_j \|\tilde{f}_j\|_{\Lambda_A(w)} = C \sum_j \|f_j\|_{\Lambda_Y(w)}.$$

Si ahora $f_1, \ldots, f_n$ son funciones cualesquiera medibles en $\mathbb{R}$ y elegimos $Y \subset \big\{|f_1 + \cdots + f_n| \geq (f_1 + \cdots + f_n)^*(|A|)\big\}$ con $|Y| = |A|$, por tener w soporte en $(0, |A|)$ se verifica

$$\|f_1 + \cdots + f_n\|_{\Lambda_{\mathbb{R}}(w)} = \big\|(f_1 + \cdots + f_n)\chi_Y\big\|_{\Lambda_{\mathbb{R}}(w)} = \Big\|\sum_j f_j \chi_Y\Big\|_{\Lambda_Y(w)}$$

y se sigue, por lo probado arriba, que

$$\|f_1 + \cdots + f_n\|_{\Lambda_{\mathbb{R}}(w)} \leq C \sum_j \big\|f_j \chi_Y\big\|_{\Lambda_Y(w)} \leq C \sum_j \|f_j\|_{\Lambda_{\mathbb{R}}(w)}.$$

Si $C = 1$ se concluye que $\|\cdot\|_{\Lambda_{\mathbb{R}}(w)}$ es una norma. Si $1 < C < \infty$, la desigualdad anterior prueba que $\Lambda_{\mathbb{R}}(w)$ es normable (el funcional N definido en 4.39 sería una norma equivalente, por ejemplo). $\square$

El siguiente resultado caracteriza la normabilidad en el caso X no-atómico.

Teorema 5.8. *Sea (X, μ) un espacio de medida no atómico, $0 < p < \infty$, $w = w\chi_{(0,\mu(X))}$. Entonces:*

(i) $\|\cdot\|_{\Lambda^p_X(w)}$ *es una norma si y sólo si* $p \geq 1$, $w \downarrow$.

(ii) $\Lambda^p_X(w)$ *es normable si y sólo si* $p \geq 1$, $w \in B_{p,\infty}$.

(iii) $\|\cdot\|_{\Lambda^{p,\infty}_X(w)}$ *no es una norma (salvo si* $\mu(X) = 0$*).*

(iv) $\Lambda_X^{p;\infty}(w)$ *es normable si y sólo si* $w \in B_p$.

Demostración. La suficiencia de las condiciones ya ha sido demostrada en 5.1, 5.2 y 5.3. Para ver la necesidad usamos el Corolario 5.6 y el Lema 5.7 para concluir que podemos sustituir el espacio X por $\mathbb{R}$. Entonces (i) se sigue de [CGS] y [Lo]; (ii) de [CGS] y [Sa2]; (iii) de la Observación 5.3 y (iv) se sigue de [So]. $\square$

Normabilidad de los espacios $d(\Omega, p)$.

Resolveremos ahora la cuestión de la normabilidad para el caso de los espacios de Lorentz de sucesiones $d(\Omega, p)$ y $d^\infty(\Omega, p)$. El primer resultado trata el espacio fuerte.

Teorema 5.9. *Sea* $\Omega = (\Omega_n)_{n=0}^\infty \subset [0, \infty)$.

(i) Si $0 < p < 1$, $\|\cdot\|_{d(\Omega,p)}$ *es una norma si y sólo si* $\Omega = (\Omega_0, 0, 0, \dots)$.

(ii) Si $1 \le p < \infty$, $\|\cdot\|_{d(\Omega,p)}$ *es una norma si y sólo si* $\Omega \downarrow$.

Demostración. La suficiencia en (i) es obvia y en (ii) ya ha sido probada en el Teorema 5.1. Veamos que si $\|\cdot\|_{d(\Omega,p)}$ es una norma ha de ser $\Omega \downarrow$. Para $n \in \mathbb{N}$, $t \in (0,1)$, sea $f = (1, 1, \dots, 1, t, 0, 0, 0, \dots)$ (es decir $f(0) = \cdots = f(n) = 1$, $f(n+1) = t$, $f(k) = 0$, $k \ge n+2$) y sea $g = (1, \dots, 1, t, 1, 0, 0 \dots)$ (es decir intercambiando las posiciones n y $n+1$ de f). Entonces,

$$\|f\|_{d(\Omega,p)} = \|g\|_{d(\Omega,p)} = \big(\Omega_0 + \cdots + \Omega_n + t^p \Omega_{n+1}\big)^{1/p},$$
$$\|f+g\|_{d(\Omega,p)} = \big(2^p \Omega_0 + \cdots + 2^p \Omega_{n-1} + (1+t)^p (\Omega_n + \Omega_{n+1})\big)^{1/p}.$$

De la desigualdad $\|f+g\|_{d(\Omega,p)} \le \|f\|_{d(\Omega,p)} + \|g\|_{d(\Omega,p)}$ se sigue

$$\Omega_{n+1} \le \frac{2^p - (1+t)^p}{(1+t)^p - 2^p t^p} \Omega_n$$

y haciendo tender t hacia 1 obtenemos $\Omega_{n+1} \le \Omega_n$ y (ii) queda probado.

Supongamos ahora que $\|\cdot\|_{d(\Omega,p)}$ es una norma y $p < 1$. Entonces (Observación 5.5) coincide con la norma del biasociado que, por el Teorema 4.16(i), es igual a $\|\cdot\|_{d(\widetilde{\Omega},1)''}$ siendo $\widetilde{\Omega}_0 = \Omega_0^{1/p}$, $\widetilde{\Omega}_n = \big(\sum_{k=0}^n \Omega_k\big)^{1/p} - \big(\sum_{k=0}^{n-1} \Omega_k\big)^{1/p}$, $n = 1, 2, \dots$ Aplicando esta desigualdad de normas a la sucesión $f = (1, t, 0, 0, \dots)$, $t \in (0,1)$, se obtiene

$$(\Omega_0 + t^p \Omega_1)^{1/p} = \|f\|_{d(\Omega,p)} = \|f\|_{d(\widetilde{\Omega},1)''} \le \|f\|_{d(\widetilde{\Omega},1)} = \Omega_0^{1/p} + t\big((\Omega_0 + \Omega_1)^{1/p} - \Omega_0^{1/p}\big),$$

de donde

$$\frac{(\Omega_0 + t^p\Omega_1)^{1/p} - \Omega_o^{1/p}}{t} \leq C < \infty.$$

Si $\Omega_1 \neq 0$ el límite, cuando $t \to 0$, de la parte izquierda es $+\infty$, así que ha de ser $\Omega_1 = 0$ y, como ya se ha probado que la sucesión es decreciente, se tiene $\Omega_n = 0,\ n \geq 1.$ $\square$

Veamos ahora la normabilidad de los espacios $d(\Omega, p)$.

Teorema 5.10. *Sea* $\Omega = (\Omega_n)_{n=0}^{\infty} \subset [0, \infty)$ *y denotemos* $W_n = \sum_{k=0}^{n} \Omega_k,\ n = 0, 1, 2, \ldots$

(i) Si $0 < p < 1,\ d(\Omega, p)$ *es normable si y sólo si* $\Omega \in \ell^1$.

(ii) $d(\Omega, 1)$ *es normable si y sólo si*

$$\frac{W_n}{n+1} \leq C \frac{W_m}{m+1}, \qquad 0 < m < n.$$

(iii) Si $1 < p < \infty,\ d(\Omega, p)$ *es normable si y sólo si*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{W_k^{1/p}} \leq C \frac{n+1}{W_n^{1/p}}. \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Es decir, si $p < 1$, $d(\Omega, p)$ no es normable salvo en el caso trivial $\Omega \in \ell^1$ y entonces $d(\Omega, p) = \ell^{\infty}$.

Demostración. (i) Si $\Omega \in \ell^1$, $d(\Omega, p) = \ell^{\infty}$ y no hay nada que probar. Recíprocamente, si $d(\Omega, p)$ es normable, $\|\cdot\|_{d(\Omega,p)''}$ es una norma en este espacio (Teorema 5.4) que esta mayorada por la norma de $d(\widetilde{\Omega}, 1)$ con $\widetilde{\Omega}_0 = \Omega_0^{1/p}$, $\widetilde{\Omega}_n = \big(\sum_{k=0}^{n} \Omega_k\big)^{1/p} - \big(\sum_{k=0}^{n-1} \Omega_k\big)^{1/p}$, $n = 1, 2, \ldots$ (véase la demostración del teorema anterior). Se tiene así la desigualdad,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} g(n)^p \Omega_n \right)^{1/p} \leq C \sum_{n=0}^{\infty} g(n) \widetilde{\Omega}_n, \qquad g \downarrow .$$

Si $r = 1/p > 1$ la expresión anterior es equivalente a

$$S = \sup_{g\downarrow} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} g(n)\Omega_n}{\big(\sum_{n=0}^{\infty} g(n)^r \widetilde{\Omega}_n\big)^{1/r}} < \infty.$$

Por el Teorema I.6.11,

$$S \approx \left(\int_0^\infty \left(\frac{W}{\widetilde{W}} \right)^{p/(1-p)} w \right)^{1-p},$$

con $w = \sum_{k=0}^\infty \Omega_k \chi_{[k,k+1)}$, $W(t) = \int_0^t w$ y análogamente $\tilde{w}$, $\widetilde{W}$. Usando que $W \in \Delta_2$ (porque $d(\Omega, p)$ es cuasi-normado), se comprueba sin dificultad que el integrando arriba es comparable en cada intervalo $[n, n+1)$ a la función $\frac{w}{W}$. Se tiene así

$$\int_1^\infty \frac{w}{W} = \log \frac{W(\infty)}{W(1)} \lesssim S < \infty,$$

lo que implica $w \in L^1$ y $\Omega \in \ell^1$.

(ii) y (iii): Sea $w(t) = \sum_{k=0}^\infty \Omega_k \chi_{[k,k+1)}(t)$, $t > 0$. Entonces la condición del enunciado implica $w \in B_{p,\infty}$ (c.f. Teoremas 6.5 y 6.18 del Capítulo 1) y por el Teorema 5.2, $d(\Omega, p) = \Lambda^p_{\mathbb{N}^*}(w)$ es normable. Par ver el recíproco sea $f \geq 0$ una sucesión decreciente en $d(\Omega, p)$. Si $n \geq 1$ definimos $g_n = \sum_{j=-n}^n f_j$ donde, para cada $j \in \mathbb{N}^*$, $f_j(k) = f(k+j)\chi_{\{k \geq -j\}}(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Entonces

$$\|g_n\|_{d(\Omega,p)} \leq C \sum_{j=-n}^n \|f_j\|_{d(\Omega,p)} \leq (2n+1)C\|f\|_{d(\Omega,p)}, \quad \forall n, \tag{5.11}$$

y por otra parte se tiene $g_n \geq \big(f(0) + \cdots + f(n)\big)\chi_{\{0,\ldots,n\}}$ por lo que $\|g_n\|_{d(\Omega,p)} \geq \big(f(0) + \cdots + f(n)\big)\big\|\chi_{\{0,\ldots,n\}}\big\|_{d(\Omega,p)} = \big(f(0) + \cdots + f(n)\big)W_n^{1/p}$. Combinando esto último con (5.11) se obtiene

$$A_d f(n) W_n^{1/p} \leq 2C\|f\|_{d(\Omega,p)} = 2C\|f\|_{\ell^p(\Omega)}, \qquad n \in \mathbb{N}, \ f \downarrow,$$

lo que equivale a la acotación $A_d : \ell^p_{\text{dec}}(\Omega) \to \ell^{p,\infty}(\Omega)$. Ahora del Teorema I.6.13 se siguen las condiciones en el enunciado. $\square$

Para terminar caracterizamos la normabilidad en el caso débil.

Teorema 5.12. *Sea $0 < p < \infty$, $\Omega = (\Omega_n)_{n=0}^\infty \subset [0, \infty)$ y denotemos $W_n = \sum_{k=0}^n \Omega_k$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Entonces:*

(i) $\|\cdot\|_{d^\infty(\Omega,p)}$ es una norma si y sólo si $\Omega = (\Omega_0, 0, 0, \ldots)$

(ii) $d^\infty(\Omega, p)$ es normable si y sólo si

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{W_k^{1/p}} \leq C \frac{n+1}{W_n^{1/p}}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Demostración. (i) es consecuencia de la Observación 5.3. Para ver (ii) basta observar que la normabilidad de $d^\infty(\Omega, p)$ es equivalente a la acotación

$$A_d : \ell^{p,\infty}_{\text{dec}}(\Omega) \to \ell^{p,\infty}(\Omega), \tag{5.13}$$

ya que si (5.13) se tiene, entonces $\|f\| = \|A_d f^*\|_{\ell^{p,\infty}(\Omega)}$ es una norma en $d^\infty(\Omega, p)$ equivalente a la cuasi-norma original y si $d^\infty(\Omega, p)$ es normable, exactamente el mismo argumento usado en la última parte de la demostración del teorema anterior (sólo hay que cambiar $\|f\|_{d(\Omega,p)}$ por $\|f\|_{d^\infty(\Omega,p)}$) prueba (5.13). Aplicando ahora el Teorema I.6.16 se concluye la demostración. $\square$

6. Operadores en espacios de Lorentz

En esta sección $(X, \mu), (\bar{X}, \bar{\mu})$ serán espacios de medida σ-finitos (aunque esto no es necesario en los teoremas de interpolación) cualesquiera. Deduciremos teoremas de interpolación para los espacios $\Lambda^{p,q}_X(w)$. En algún caso (Teorema 6.3) no se necesitará ninguna condición sobre el peso w. En el resultado mas general (Teorema 6.5) hará falta sin embargo, que los espacios sean cuasi-normados ($W \in \Delta_2(X)$). Se verá que el comportamiento, en cuanto a interpolación se refiere, de los espacios $\Lambda^p_X(w)$ es totalmente análogo al de los $L^{p,q}$ y de hecho el Teorema 6.5 no es más que la versión del teorema general de Marcinkiewicz adaptada al contexto de los espacios $\Lambda^{p,q}(w)$.

Para finalizar, veremos como algunos de los resultados del Capítulo 1 sobre acotación de operadores orden continuos se extienden en el contexto de los espacios de Lorentz.

Empezaremos recordando algunos conceptos relacionados con el método real de interpolación. En esta sección llamaremos retículo funcional a cuaquier clase A formada por funciones medibles (en un espacio de medida dado) y definida por

$$A = \{f : \|f\|_A < \infty\},$$

donde $\|\cdot\|_A$ es un funcional no negativo que actúa sobre las funciones medibles y verifica $\|rf\|_A = r\|f\|_A$, $r > 0$, y $\|f\|_A \le \|g\|_A$ si $|f(x)| \le |g(x)|$ a.e. x. En particular los espacios de Lorentz $\Lambda^{p,q}_X(w)$ entran en esta categoría. En lo que sigue A, B, A_0, A_1, B_0, B_1 denotarán retículos funcionales cualesquiera. Escribiremos $A \approx B$ si $A = B$ y $\|\cdot\|_A \approx \|\cdot\|_B$. Recordemos la definición del funcional K asociado al par (A_0, A_1). Para cada función $f \in A_0 + A_1$ éste está definido, para $t > 0$, por

$$K(f, t, A_0, A_1) = \inf_{f=f_0+f_1} \big(\|f_0\|_{A_0} + t\|f_1\|_{A_1}\big),$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las descomposiciones $f = f_0 + f_1,\ f_i \in A_i,\ i = 0, 1$. Escribiremos simplemente $K(t, f)$ si el par (A_0, A_1) es sobreentendido. Las propiedades relevantes de K son

(i) $K(rf, t) = rK(f, t), \quad r > 0,$

(ii) $|f| \le |g| \Rightarrow K(f, t) \le K(g, t),$

(iii) $A_i \approx B_i,\ i = 0, 1 \Rightarrow K(f, t, A_0, A_1) \approx K(g, t, B_0, B_1).$

Las propiedades (i) y (iii) son inmediatas mientras que (ii) puede verse en [KPS]. Para cada $0 < \theta < 1,\ 0 < q \le \infty$, se define la siguiente "norma"en $A_0 + A_1$:

$$\|f\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}} = \left(\int_0^\infty \big(t^{-\theta} K(f, t, A_0, A_1)\big)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}$$

($\sup_t t^{-\theta} K(f, t, A_0, A_1)$ si $q = \infty$). Como es natural se define entonces el espacio

$$(A_0, A_1)_{\theta,q} = \big\{f \in A_0 + A_1 \,:\, \|f\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}} < \infty\big\}.$$

Diremos que el operador T, definido en $A_0 + A_1$ y con valores en $B_0 + B_1$, es cuasi-aditivo si existe $k > 0$ tal que

$$\big|T(f + g)(x)\big| \le k\big(|Tf(x)| + |Tg(x)|\big) \quad \text{a.e. } x,$$

para todo par de funciones $f, g, f + g \in A_0 + A_1$.

El resultado fundamental de la teoría (su demostración es inmediata) puede enunciarse entonces como sigue.

Teorema 6.1 (método K). *Sea T un operador cuasi-aditivo definido en $A_0 + A_1$ que verifica:*

$$T \,:\, A_0 \longrightarrow B_0,$$

$$T \,:\, A_1 \longrightarrow B_1.$$

Entonces, para $0 < \theta < 1,\ 0 < q \leq \infty$, *se tiene,*

$$T\,:\,(A_0, A_1)_{\theta,q} \longrightarrow (B_0, B_1)_{\theta,q}.$$

La tarea ahora consiste en identificar el espacio $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ o, equivalentemente, el funcional $\|\cdot\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}}$ en función de A_0, A_1 cuando son espacios de Lorentz. Como veremos $\|\cdot\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}}$ será, bajo condiciones adecuadas, equivalente a la "norma" de un cierto espacio de Lorentz. El resultado clave es el siguiente.

Teorema 6.2. *Si* $0 < p < \infty$ *y* $f \in \mathcal{M}(X)$,

$$K\big(f, t, \Lambda^p_X(w), L^\infty(X)\big) \approx K\big(f^*, t, L^p(w), L^\infty(w)\big), \qquad t > 0,$$

con las constantes implícitas en el símbolo $\approx$ *dependiendo sólo de* p. *En particular, para* $0 < \theta < 1$, $0 < q \leq \infty$,

$$\big(\Lambda^p_X(w), L^\infty(X)\big)_{\theta,q} \approx \Lambda^{\bar{p},q}_X(w)$$

donde,

$$\frac{1}{\bar{p}} = \frac{1-\theta}{p}.$$

Demostración. Si $f = f_0 + f_1$ con $f_0 \in \Lambda^p_X(w)$, $f_1 \in L^\infty(X)$, se tiene $f^*(s) \leq f_0^*(s) + f_1^*(0) = f_0^*(s) + \|f_1\|_{L^\infty(X)}$, $s > 0$. Por lo tanto,

$$K\big(f^*, t, L^p(w), L^\infty(w)\big) \leq \|f_0^*\|_{L^p(w)} + t\|f_1\|_{L^\infty(X)} = \|f_0\|_{\Lambda^p_X(w)} + t\|f_1\|_{L^\infty(X)}.$$

Tomando el ínfimo sobre todas las descomposiciones $f = f_0 + f_1 \in \Lambda^p_X(w) + L^\infty(X)$ se obtiene,

$$K\big(f^*, t, L^p(w), L^\infty(w)\big) \leq K\big(f, t, \Lambda^p_X(w), L^\infty(X)\big).$$

Para probar la desigualdad contraria, si $f \in \mathcal{M}(X)$, $t > 0$ sea $a = (f^*)^*_w(t^p)$ y sean

$$f_0 = \left(f - a\frac{f}{|f|}\right)\chi_{\{|f|>a\}}, \qquad f_1 = f - f_0.$$

Entonces $(f_0^*)_w^* = \big((f^*)_w^* - a\big)\chi_{[0,t^p)}$ mientras que $f_1^* \le a$. Como $f = f_0 + f_1$ se tiene

$$
\begin{aligned}
K\big(f,t,\Lambda_X^p(w),L^\infty(X)\big) &\le \|f_0\|_{\Lambda_X^p(w)} + t\|f_1\|_{L^\infty(X)} \\
&\le \|f_0^*\|_{L^p(w)} + ta \\
&= \big\|(f_0^*)_w^*\big\|_p + ta \\
&= \bigg(\int_0^{t^p} \big((f^*)_w^*(s) - a\big)^p\, ds\bigg)^{1/p} + \bigg(\int_0^{t^p} a^p\, ds\bigg)^{1/p} \\
&\le C_p\bigg(\int_0^{t^p} \big((f^*)_w^*(s)\big)^p\, ds\bigg)^{1/p}.
\end{aligned}
$$

Como la última expresión es equivalente a $K\big(f^*,t,L^p(w),L^\infty(w)\big)$ (véase [BL]), la primera parte del enunciado queda probada.

La segunda parte es consecuencia inmediata de la primera. En efecto, como la "norma"en $\big(\Lambda_X^p(w),L^\infty(X)\big)_{\theta,q}$ está definida a partir del funcional K se tendrá,

$$\|f\|_{\left(\Lambda_X^p(w),L^\infty(X)\right)_{\theta,q}} = \|f^*\|_{\left(L^p(w),L^\infty(w)\right)_{\theta,q}}$$

y la última "norma"es (véase [BL]),

$$\|f^*\|_{L^{\bar{p},q}(w)} = \|f\|_{\Lambda_X^{\bar{p},q}(w)}. \qquad \square$$

Una consecuencia del último resultado es el siguiente teorema de interpolación con $L^\infty(X)$.

Teorema 6.3. *Si $0 < p,\bar{p} < \infty$ y T es un operador cuasi-aditivo en $\Lambda_X^p(w) + L^\infty(X)$ tal que,*

$$
\begin{aligned}
T &: L^\infty(X) \longrightarrow L^\infty(X), \\
T &: \Lambda_X^p(w) \longrightarrow \Lambda_{\bar{X}}^{\bar{p},\infty}(\bar{w}),
\end{aligned}
$$

entonces para $q,\bar{q} \in (0,\infty)$ verificando $q/p = \bar{q}/\bar{p} > 1$, se tiene

$$T : \Lambda_X^{q,r}(w) \longrightarrow \Lambda_{\bar{X}}^{\bar{q},r}(\bar{w}), \qquad 0 < r \le \infty.$$

Demostración. El argumento desarrollado al principio de la demostración del resultado anterior para probar la desigualdad

$$K\big(f^*,t,L^p(w),L^\infty(w)\big) \le K\big(f,t,\Lambda_X^p(w),L^\infty(X)\big),$$

funciona exactamente igual si se sustituyen los espacios $L^p(w)$, $\Lambda^p_X(w)$ por $L^{\bar{p},\infty}(\bar{w})$ y $\Lambda^{\bar{p},\infty}_{\bar{X}}(\bar{w})$ respectivamente. Por lo tanto se sigue igualmente (con $1/\bar{q} = (1-\theta)/\bar{p}$) que (véase [BL]),

$$\begin{aligned}\|Tf\|_{\Lambda^{\bar{q},r}_{\bar{X}}(\bar{w})} &= \left\|(Tf)^*\right\|_{L^{\bar{q},r}(\bar{w})} = \left\|(Tf)^*\right\|_{\left(L^{\bar{p},\infty}(\bar{w}),L^\infty(w)\right)_{\theta,r}}\\ &\leq \|Tf\|_{\left(\Lambda^{\bar{p},\infty}(\bar{w}),L^\infty\right)_{\theta,r}}\end{aligned}$$

y el resto es consecuencia del Teorema 6.1 y el Teorema 6.2. □

Observación 6.4. Nótese que en los dos últimos enunciados no hace falta que los espacios de Lorentz que intervienen sean cuasi-normados.

Si se impone la condición de que los espacios sean cuasi-normados (es decir $W \in \Delta_2$) se puede usar el llamado teorema de reiteración para obtener un resultado más general y análogo al teorema de interpolación de Marcinkiewicz.

Teorema 6.5. *Sea* $0 < p_i, q_i, \bar{p}_i, \bar{q}_i \leq \infty$, $i = 0, 1$, *con* $p_0 \neq p_1$, $\bar{p}_0 \neq \bar{p}_1$ *y sea* T *un operador cuasi-aditivo definido en* $\Lambda^{p_0,q_0}_X(w) + \Lambda^{p_1,q_1}_X(w)$ *verificando*

$$\begin{aligned}T \,:\, \Lambda^{p_0,q_0}_X(w) &\longrightarrow \Lambda^{\bar{p}_0,\bar{q}_0}_{\bar{X}}(\bar{w}),\\ T \,:\, \Lambda^{p_1,q_1}_X(w) &\longrightarrow \Lambda^{\bar{p}_1,\bar{q}_1}_{\bar{X}}(\bar{w}).\end{aligned}$$

Supongamos $W \in \Delta_2(X)$, $\bar{W} \in \Delta_2(\bar{X})$. *Entonces, para* $0 < \theta < 1$, $0 < r \leq \infty$,

$$T \,:\, \Lambda^{p,r}_X(w) \longrightarrow \Lambda^{\bar{p},r}_{\bar{X}}(\bar{w}),$$

donde

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{\bar{p}} = \frac{1-\theta}{\bar{p}_0} + \frac{\theta}{\bar{p}_1}.$$

Demostración. Sea $0 < s < \min\{p_0, p_1\}$ y tómense $\theta_0, \theta_1 \in (0,1)$ tales que $1/p_i = (1-\theta_i)/s$, $i = 0, 1$. Entonces, del Teorema 6.2 se sigue,

$$\left(\Lambda^{p_0,q_0}_X(w), \Lambda^{p_1,q_1}_X(w)\right)_{\theta,r} \approx \left(\left(\Lambda^s_X(w), L^\infty(X)\right)_{\theta_0,q_0}, \left(\Lambda^s_X(w), L^\infty(X)\right)_{\theta_1,q_1}\right)_{\theta,r}.$$

Pero la hipótesis $W \in \Delta_2(X)$ implica que $\Lambda^s_X(w)$ es un espacio cuasi-Banach (igual que $L^\infty(X)$) y se puede aplicar el teorema de reiteración (Teorema 3.11.5 en [BL] por ejemplo) para identificar el espacio de arriba. Éste es:

$$\left(\Lambda^s_X(w), \Lambda^\infty_X(w)\right)_{\eta,r}$$

con $\eta = (1-\theta)\theta_0 + \theta\theta_1$. Aplicando ahora otra vez el Teorema 6.2 obtenemos finalmente,

$$\big(\Lambda_X^{p_0,q_0}(w), \Lambda_X^{p_1,q_1}(w)\big)_{\theta,r} \approx \Lambda_X^{p,r}(w)$$

ya que $(1-\eta)/s = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$. El mismo argumento vale para los espacios $\Lambda_{\bar{X}}^{\bar{p}_i,\bar{q}_i}(\bar{w})$ y análogamente,

$$\big(\Lambda_{\bar{X}}^{\bar{p}_0,\bar{q}_0}(\bar{w}), \Lambda_{\bar{X}}^{\bar{p}_1,\bar{q}_1}(\bar{w})\big)_{\theta,r} \approx \Lambda_{\bar{X}}^{\bar{p},r}(\bar{w}).$$

El enunciado final es ahora consecuencia del Teorema 6.1. $\square$

Observación 6.6. J. Cerdá y J. Martín ([CM]) han probado, con ciertas condiciones en los pesos w_0, w_1 que,

$$K\big(f, t, \Lambda^{p_0,r_0}(w_0), \Lambda^{p_1,r_1}(w_1)\big) \approx K\big(f^*, t, L^{p_0,r_0}(w_0), L^{p_1,r_1}(w_1)\big)$$

para $0 < p_0, p_1, r_0, r_1 \leq \infty$. Ello les permite obtener un teorema de interpolación más general que el anterior al incluir casos del tipo

$$T\,:\,\big(\Lambda_X^{p_0,q_0}(w_0), \Lambda_X^{p_1,q_1}(w_1)\big) \longrightarrow \big(\Lambda_{\bar{X}}^{\bar{p}_0,\bar{q}_0}(\bar{w}_0), \Lambda_{\bar{X}}^{\bar{p}_1,\bar{q}_1}(\bar{w}_1)\big),$$

con $w_0 \neq w_1, \bar{w}_0 \neq \bar{w}_1$.

El siguiente enunciado, consecuencia directa del Teorema 6.5, es el equivalente del teorema de interpolación Marcinkiewicz.

Corolario 6.7. *Sea* $0 < p_0 < p_1 \leq \infty$, $W \in \Delta_2(X), \bar{W} \in \Delta_2(\bar{X})$. *Si* T *es un operador cuasi-aditivo en* $\Lambda_X^{p_0}(w) + \Lambda_X^{p_1}(w)$ *tal que,*

$$T\,:\,\Lambda_X^{p_0}(w) \longrightarrow \Lambda_{\bar{X}}^{p_0,\infty}(\bar{w}),$$
$$T\,:\,\Lambda_X^{p_1}(w) \longrightarrow \Lambda_{\bar{X}}^{p_1,\infty}(\bar{w}),$$

entonces,

$$T\,:\,\Lambda_X^{p}(w) \longrightarrow \Lambda_{\bar{X}}^{p}(\bar{w})$$

para $p_0 < p < p_1$.

Operadores orden continuos en espacios de Lorentz.

Antes de finalizar el capítulo extenderemos algunos de los resultados sobre acotación de operadores orden continuos vistos en la la sección 2 del Capítulo 1. Se trata de enunciados que garantizan, en algunos casos, la acotación de un operador entre espacios de Lorentz si ésta se da sobre funciones características.

El primer enunciado (desigualdad fuerte) es una generalización del Corolario I.2.14.

Teorema 6.8. *Sea $L \subset \mathcal{M}(X)$ una clase regular y $T : L \to \mathcal{M}(\bar{X})$ un operador sublineal orden continuo. Si $0 < p_0 \leq 1$, $p_0 \leq p_1 < \infty$ y $w_1 \in B_{p_1/p_0,\infty}$, se tiene la desigualdad*

$$\|Tf\|_{\Lambda^{p_1}_{\bar{X}}(w_1)} \leq C\|f\|_{\Lambda^{p_0}_{X}(w_0)}, \qquad f \in L, \tag{6.9}$$

si y sólo si existe $C_0 < \infty$ tal que

$$\big\|T\chi_B\big\|_{\Lambda^{p_1}_{\bar{X}}(w_1)} \leq C_0\big\|\chi_B\big\|_{\Lambda^{p_0}_{X}(w_0)}, \qquad \chi_B \in L.$$

Demostración. Supondremos válida la última desigualdad y probaremos (6.9). Por monotonía, es suficiente hacerlo con $f \geq 0$ simple. Procediendo como en la demostración del Teorema I.2.13,

$$\|Tf\|^{p_0}_{\Lambda^{p_1}_{\bar{X}}(w_1)} = \big\||Tf|^{p_0}\big\|_{\Lambda^{p_1/p_0}_{\bar{X}}(w_1)} \leq \bigg\|\int_0^\infty p_0 t^{p_0-1}\big|T\chi_{\{f>t\}}(\cdot)\big|^{p_0}\,dt\bigg\|_{\Lambda^{p_1/p_0}_{\bar{X}}(w_1)}.$$

Pero la condición $w_1 \in B_{p_1/p_0,\infty}$ implica que $\|\cdot\|_{\Lambda^{p_1/p_0}_{\bar{X}}(w_1)}$ es equivalente a una norma funcional de Banach (Teorema 5.2) y se sigue,

$$\begin{aligned}
\|Tf\|^{p_0}_{\Lambda^{p_1}_{\bar{X}}(w_1)} &\leq C_1\int_0^\infty p_0 t^{p_0-1}\big\|\big|T\chi_{\{f>t\}}\big|^{p_0}\big\|_{\Lambda^{p_1/p_0}_{\bar{X}}(w_1)}\\
&= C_1\int_0^\infty p_0 t^{p_0-1}\big\|T\chi_{\{f>t\}}\big\|^{p_0}_{\Lambda^{p_1}_{\bar{X}}(w_1)}\,dt\\
&\leq C_1 C_0^{p_0}\int_0^\infty p_0 t^{p_0-1}\big\|\chi_{\{f>t\}}\big\|^{p_0}_{\Lambda^{p_0}_{X}(w_0)}\\
&= C^{p_0}\int_0^\infty p_0 t^{p_0-1}W_0\big(\lambda_f(t)\big)\,dt\\
&= C^{p_0}\|f\|^{p_0}_{\Lambda^{p_0}_{X}(w_0)}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Usando la misma idea se demuestra un resultado análogo para el caso débil:

Teorema 6.10. *Sea $L \subset \mathcal{M}(X)$ una clase regular y $T : L \to \mathcal{M}(\bar{X})$ un operador sublineal orden continuo. Si $0 < p_0 \leq 1$, $0 < p_1 < \infty$ y $w_1 \in B_{p_1/p_0}$, se tiene la desigualdad*

$$\|Tf\|_{\Lambda_{\bar{X}}^{p_1,\infty}(w_1)} \leq C\|f\|_{\Lambda_X^{p_0}(w_0)}, \qquad f \in L,$$

si y sólo si existe $C_0 < \infty$ tal que

$$\big\|T\chi_B\big\|_{\Lambda_{\bar{X}}^{p_1,\infty}(w_1)} \leq C_0\big\|\chi_B\big\|_{\Lambda_X^{p_0}(w_0)}, \qquad \chi_B \in L.$$

Podemos combinar los resultados anteriores con el teorema general de interpolación (Teorema 6.5) para obtener una generalización del teorema de Stein y Weiss sobre operadores de tipo débil restringido.

Teorema 6.11. *Sea $0 < p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$, $p_0 \neq p_1$, $q_0 \neq q_1$ y supongamos que $T : \big(\Lambda_X^{p_0}(w) + \Lambda_X^{p_1}(w)\big) \to \mathcal{M}(\bar{X})$ es un operador sublineal orden continuo verificando*

$$\big\|T\chi_B\big\|_{\Lambda^{q_0,\infty}(\bar{w})} \leq C_0\|\chi_B\|_{\Lambda^{p_0}(w)}, \quad B \subset X,$$
$$\big\|T\chi_B\big\|_{\Lambda^{q_1,\infty}(\bar{w})} \leq C_1\|\chi_B\|_{\Lambda^{p_1}(w)}, \quad B \subset X.$$

Entonces, si $W, \bar{W} \in \Delta_2$, se tiene

$$T : \Lambda_X^{p,r}(w) \longrightarrow \Lambda_{\bar{X}}^{q,r}(\bar{w}), \qquad 0 < r \leq \infty,$$

si

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \qquad 0 < \theta < 1.$$

Demostración. Si $\bar{W} \in \Delta_2$ existe $t > 0$ tal que $\bar{w} \in B_t$ (véase [CGS]). Como las clases B_p son crecientes en p, existe un índice $r \in (0,1)$ con $r < p_i$, $i = 0,1$ y tal que $\bar{w} \in B_{q_i/r}$, $i = 0,1$. Dado que $\big\|\chi_B\big\|_{\Lambda^{p_i}} = C_{p_i,r}\big\|\chi_B\big\|_{\Lambda^{p_i,r}}$, $B \subset X$, se tiene

$$\big\|T\chi_B\big\|_{\Lambda^{q_i,\infty}(\bar{w})} \leq C_i'\|\chi_B\|_{\Lambda^{p_i,r}(w)}, \quad B \subset X, \quad i = 0,1.$$

Pero $\Lambda^{p_i,r}(w) = \Lambda^r(\tilde{w}_i)$ con $\tilde{w}_i = W^{r/p_i - 1}w$ (Observación 2.6) y del Teorema 6.10 se sigue

$$T : \Lambda_X^{p_i,r}(w) \longrightarrow \Lambda_{\bar{X}}^{q_i,\infty}(\bar{w}), \qquad i = 0,1.$$

Aplicando entonces el Teorema 6.5 se obtiene el resultado final. $\square$

Observación 6.12.

(i) Dado que $\|\chi_B\|_{\Lambda^{p_i}} = C_{p_i,r}\|\chi_B\|_{\Lambda^{p_i,r}}$, $B \subset X$, el teorema anterior sigue siendo válido si se sustituyen los espacios de partida $\Lambda^{p_i}(w)$ por $\Lambda^{p_i,r_i}(w)$ con $0 < r_i \leq \infty$, $i = 0, 1$.

(ii) Un resultado análogo se verifica, sin la hipótesis $W \in \Delta_2$, si sustituimos el espacio $\Lambda^{p_1}(w)$ por L^∞ y con $1/p = (1-\theta)/p_0$. Ello es debido a que, en este caso, puede usarse el Teorema 6.2 (que no necesita esa hipótesis) para identificar el espacio interpolado de partida.

CAPÍTULO 3

EL OPERADOR MAXIMAL DE HARDY-LITTLEWOOD EN ESPACIOS DE LORENTZ CON PESOS

1. Introducción

En el capítulo anterior hemos introducido y estudiado los espacios $\Lambda_X^{p,q}(w)$ de Lorentz sobre un espacio de medida (X, μ) arbitrario. En este capítulo nos interesa el caso en que X es el espacio $\mathbb{R}^n$ y la medida viene dada por un peso: $d\mu(x) = u(x)\,dx$. Si $u = 1$ denotaremos este espacio como $\Lambda^{p,q}(w)$ y nos referiremos a él simplemente con el término "espacio de Lorentz" (en $\mathbb{R}^n$). En el caso general usaremos la notación $\Lambda_u^{p,q}(w)$ y a estos los llamaremos espacios de Lorentz con pesos. Investigaremos acotaciones del operador maximal de Hardy-Littlewood del tipo

$$M : \Lambda_u^p(w) \longrightarrow \Lambda_u^p(w) \tag{1.1}$$

y, su versión débil, $M : \Lambda_u^p(w) \to \Lambda_u^{p,\infty}(w)$. Nuestro objetivo será encontrar condiciones necesarias y/o suficientes en los pesos u y w (en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^+$ respectivamente) para garantizar (1.1) o alguna de sus variantes. De hecho, obtendremos algún resultado válido en el caso no diagonal

$$M : \Lambda_{u_0}^{p_0}(w_0) \longrightarrow \Lambda_{u_1}^{p_1,\infty}(w_1). \tag{1.2}$$

Si $w = 1$, la acotación (1.1) equivale a $M : L^p(u) \longrightarrow L^p(u)$ y este problema fue resuelto por Muckenhoupt ([M]) dando lugar a la condición $u \in A_p,\ 1 < p < \infty$. En el otro extremo, si $u = 1$, la caracterización de (1,1) es equivalente a la de la acotación del operador de Hardy $A : L^p_{\mathrm{dec}}(w) \to L^p(w)$ y fue obtenida ($p > 1$) por Ariño y Muckenhoupt ([AM1]). La condición es, en este caso, $w \in B_p$ (véase la sección 6 del Capítulo 1). El problema (1.2) (y la correspondiente acotación fuerte) cuando w_0, w_1 son pesos potencia ($w_i(t) = t^{\alpha_i}$) se reduce a $M : L^{p_0,q_0}(u) \to$

$L^{p_1,q_1}(u)$ y fue resuelto en algunos casos por Chung, Hunt y Kurtz en [CHK] y [HK] (véase también [L]). La solución del caso general diagonal (1.1) ha estado abierta hasta ahora, aunque hay resultados parciales de Carro-Soria ([CS3]) y de Neugebauer ([Ne2]). En este capítulo encontraremos una caracterización de la acotación (1.1) (Teorema 3.8) y daremos condiciones necesarias o suficientes para la desigualdad débil.

El plan del capítulo es como sigue. En la sección 2 se deducen resultados de carácter general que serán de utilidad en todo lo que va a seguir. Por ejemplo, aquí probamos que el peso u no puede ser integrable y, también, caracterizamos la acotación (1.2) sobre funciones características. En la sección 3 resolvemos el problema (1.1) en su mayor generalidad. De hecho, probamos (Teorema 3.8) que se tiene (1.1) si y sólo si existe $q \in (0,p)$ tal que

$$\frac{W\big(u\big(\bigcup_j Q_j\big)\big)}{W\big(u\big(\bigcup_j E_j\big)\big)} \leq C \max_j \left[\frac{|Q_j|}{|E_j|}\right]^q$$

para toda familia finita de cubos y conjuntos $(Q_j, E_j)_j$ con $E_j \subset Q_j$. En muchos casos, además, esta condición se simplifica. Entre otros resultados, demostramos aquí que, aunque el peso w en (1.1) ha de estar en alguna clase B_p, el peso u no tiene porqué estar en A_∞. De hecho, probamos que existen soluciones de (1,1) con pesos u no doblantes. En la sección 4 estudiamos la desigualdad débil. Aquí usamos un resultado de Carro-Soria, el Teorema 4.1 (que da una condición necesaria para la desigualdad débil (1.2) en el caso más general), para deducir ciertos resultados. Por ejemplo, probamos que si $u_0 = u_1 = u \in A_1$, la acotación (1.2) es equivalente al caso $u_0 = u_1 = 1$ que está caracterizado. Desarrollamos también en esta sección algunas condiciones suficientes. Finalmente, en la sección 5 damos dos aplicaciones de los resultados obtenidos anteriormente. Se completan aquí los casos que todavía estaban pendientes en el problema

$$M \,:\, L^{p,q}(u) \longrightarrow L^{r,s}(u)$$

y se da la solución de (1.2) en el caso en que $u_0 = u_1 = u$ es un peso potencia.

Notación 1.3. Además de los convenios y símbolos adoptados en los dos capítulos anteriores, usaremos estos otros. Las letras $u, u_0, u_1, \ldots$ designarán pesos en $\mathbb{R}^n$. Estos serán funciones medibles no negativas, no idénticamente nulas e integrables sobre conjuntos de medida finita. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es medible, denotaremos por $u(A)$ la medida de A en el espacio $X = \big(\mathbb{R}^n, u(x)dx\big)$, es decir,

$$u(A) = \int_A u.$$

La función de distribución, en este espacio, de $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ vendrá denotada como λ_f^u y la reordenada decreciente como f_u^*. $\Lambda_u^{p,q}(w)$ será el espacio de Lorentz $\Lambda_X^{p,q}(w)$. Si $u = 1$ escribiremos simplemente $\Lambda^{p,q}(w)$. Así, la "norma" de f en el espacio de Lorentz con peso $\Lambda_u^p(w)$ vendrá dada por

$$\|f\|_{\Lambda_u^p(w)} = \left[\int_0^\infty \big(f_u^*(t)\big)^p w(t)\,dt\right]^{1/p}$$

y, en el espacio débil,

$$\|f\|_{\Lambda_u^{p,\infty}(w)} = \sup_{t>0} W^{1/p}(t) f_u^*(t) = \sup_{t>0} t\, W^{1/p}\big(\lambda_f^u(t)\big).$$

Recordamos que w es un peso en $\mathbb{R}^+$ con soporte en $[0, u(\mathbb{R}^n)]$ y que

$$0 \le W(t) = \int_0^t w < \infty, \ t > 0.$$

Lo mismo vale con las letras $w_0, w_1, \dots$ Finalmente, el operador maximal de Hardy-Littlewood M viene definido por

$$Mf(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f|, \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n),$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos Q con lados paralelos a los ejes.

2. Generalidades

Se sabe que la reordenada decreciente de Mf respecto a la medida de Lebesgue es equivalente (c.f. [BS]) a la función f^{**}:

$$(Mf)^*(t) \approx f^{**}(t) = Af^*(t), \qquad t > 0. \tag{2.1}$$

Como toda función positiva y decreciente en $\mathbb{R}^+$ es igual a.e. a la reordenada de una función medible en $\mathbb{R}^n$, se deduce que la acotación $M : \Lambda^p(w) \to \Lambda^{p,\infty}(w)$ (resp. $M : \Lambda^p(w) \to \Lambda^p(w)$) es equivalente a la acotación $A : L^p_{\mathrm{dec}}(w) \to L^{p,\infty}(w)$ (resp. $A : L^p_{\mathrm{dec}}(w) \to L^p(w)$). Como sabemos, la condición necesaria y suficiente para ello es (c.f. la sección 6 del Capítulo 1) $w \in B_{p,\infty}$ (resp. $w \in B_p$). En el otro extremo, cuando $w = 1$, la acotación $M : \Lambda_u^p(w) \to \Lambda_u^{p,\infty}(w)$ no es más que $M : L^p(u) \to L^{p,\infty}(u)$ cuya caracterización (para $p \ge 1$) es $u \in A_p$, la clase de pesos de Muckenhoupt (véase [M], [MW], [CF]). Esto motiva la siguiente definición.

Definición 2.2. Si $0 < p < \infty$ escribimos $w \in B_p(u)$ (respectivamente $w \in B_{p,\infty}(u)$) si se da la acotación $M : \Lambda_u^p(w) \to \Lambda_u^p(w)$ (resp. $M : \Lambda_u^p(w) \to \Lambda_u^{p,\infty}(w)$). También escribiremos $u \in A_p(w)$ si $M : \Lambda_u^p(w) \to \Lambda_u^{p,\infty}(w)$.

Es decir $u \in A_p(w) \Leftrightarrow w \in B_{p,\infty}(u)$. Es claro entonces que $A_p(1) = A_p,\ 1 \leq p < \infty$, y que $B_p(1) = B_p,\ B_{p,\infty}(1) = B_{p,\infty},\ 0 < p < \infty$. Por otra parte, dado que $\Lambda^p \subset \Lambda^{p,\infty}$, se tiene siempre $B_p(u) \subset B_{p,\infty}(u),\ 0 < p < \infty$. Con esta terminología nuestra tarea consistirá en determinar las clases $B_p(u)$ y $B_{p,\infty}(u)$ para la mayor cantidad posible de pesos u o, desde otro punto de vista, determinar las clases $A_p(w)$ para la mayor cantidad posible de pesos w.

También debido a (2.1), el caso no diagonal (con $u = 1$) es igualmente simple: la acotación $M : \Lambda^{p_0,q_0}(w_0) \to \Lambda^{p_1,q_1}(w_1)$ es equivalente a la acotación del operador de Hardy $A : L_{\text{dec}}^{p_0,q_0}(w_0) \to L^{p_1,q_1}(w_1)$ que está caracterizada en la mayoría de los casos (véase la sección 6 del Capítulo 1).

Surge la pregunta de si existe una expresión análoga a (2.1) cuando la reordenada f^* se considera respecto a un peso $u \neq 1$, es decir, si $(Mf)_u^*(t) \approx Af_u^*(t)$ o $(Mf)_u^*(t) \leq CAf_u^*(t)$ (o expresiones similares) cuando u es un peso en $\mathbb{R}^n$ verificando condiciones adecuadas. Carro-Soria han estudiado esta cuestión en [CS3] (véase también [LN1] y [LN2]) y obtienen que $(Mf)_u^* \approx Af_u^*$ si y sólo si $u \approx 1$ y $(Mf)_u^* \leq C\big(Af_u^{*p}\big)^{1/p}$ si y sólo si $M : L^p(u) \to L^{p,\infty}(u),\ p > 1$ (es decir si $u \in A_p$). El resultado que sigue generaliza lo anterior al caracterizar la acotación $M : \Lambda_u^p(w) \to \Lambda_u^{p,\infty}(w)$ en términos de una expresión del tipo (2.1).

Teorema 2.3. *Si $0 < p < \infty$ se tiene la acotación $M : \Lambda_u^p(w) \to \Lambda_u^{p,\infty}(w)$ si y sólo si*

$$(Mf)_u^*(t) \leq C\left[\frac{1}{W(t)}\int_0^t \big(f_u^*\big)^p w\right]^{1/p}, \qquad t > 0,\ f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n).$$

Demostración. La desigualdad del enunciado implica

$$W^{1/p}(t)(Mf)_u^*(t) \leq C\left[\int_0^t \big(f_u^*\big)^p w\right]^{1/p} \leq C\|f\|_{\Lambda_u^p(w)}, \qquad t > 0,$$

o, equivalentemente, $\|Mf\|_{\Lambda_u^{p,\infty}(w)} \leq C\|f\|_{\Lambda_u^p(w)}$. Esto prueba la suficiencia de la condición. Recíprocamente, supongamos $M : \Lambda_u^p(w) \to \Lambda_u^{p,\infty}(w)$ y sea $f \in \Lambda_u^p(w)$.

Si $f = f_0 + f_1$ con $f_1 \in L^\infty$ se tiene para $t > 0$,

$$\begin{aligned}(Mf)_u^*(t) &\le (Mf_0)_u^*(t) + (Mf_1)_u^*(0)\\ &\le W^{-1/p}(t)\|Mf_0\|_{\Lambda_u^{p,\infty}(w)} + \|Mf_1\|_{L^\infty(u)}\\ &\le CW^{-1/p}(t)\big(\|f_0\|_{\Lambda_u^p(w)} + W^{1/p}(t)\|f_1\|_{L^\infty(u)}\big)\end{aligned}$$

y tomando el ínfimo sobre todas las descomposiciones $f = f_1 + f_0$ se obtiene

$$(2.4)\qquad (Mf)_u^*(t) \le CW^{-1/p}(t)K\big(f, W^{1/p}(t), \Lambda_u^p(w), L^\infty(u)\big), \quad t > 0.$$

Por el Teorema 6.2 del Capítulo 2 el funcional K anterior es equivalente a $K\big(f_u^*, W^{1/p}(t), L^p(w), L^\infty(w)\big)$ que a su vez es equivalente (véase [BL]) a la expresión

$$\left[\int_0^{W(t)} \big((f_u^*)_w^*\big)^p\right]^{1/p} = \left[\int_0^t (f_u^*)^p w\right]^{1/p}.$$

Combinando esto último con (2.4) se obtiene la desigualdad del enunciado. □

Observación 2.5. El mismo argumento se puede desarrollar en el caso no diagonal,

$$(2.6)\qquad M\,:\,\Lambda_{u_0}^{p_0}(w_0) \longrightarrow \Lambda_{u_1}^{p_1,\infty}(w_1)$$

para concluir que (2.6) es equivalente, si $0 < p_0, p_1 < \infty$, a la desigualdad

$$(Mf)_{u_1}^*(t) \le C\left[\frac{1}{W_1^{p_0/p_1}(t)}\int_0^{W_1^{p_0/p_1}(t)} \big((f_{u_0}^*)_{w_0}^*\big)^{p_0}\right]^{1/p_0}, \quad t > 0.$$

El siguiente resultado da una condición necesaria y suficiente para tener la desigualdad débil,

$$\|Mf\|_{\Lambda_{u_1}^{p_1,\infty}(w_1)} \le C\|f\|_{\Lambda_{u_0}^{p_0}(w_0)}$$

sobre funciones características $f = \chi_E,\ E \subset \mathbb{R}^n$.

Teorema 2.7. *Sea* $0 < p_0, p_1 < \infty$. *Entonces se tiene*

$$\big\|M\chi_E\big\|_{\Lambda_{u_1}^{p_1,\infty}(w_1)} \le C\big\|\chi_E\big\|_{\Lambda_{u_0}^{p_0}(w_0)}, \qquad E \subset \mathbb{R}^n \text{ medible,}$$

si y sólo si para toda familia finita de cubos $(Q_j)_{j=1}^J$ *y toda familia de conjuntos medibles* $(E_j)_{j=1}^J$ *con* $E_j \subset Q_j$, $\forall j$, *se verifica*

$$(2.8)\qquad \frac{W_1^{1/p_1}\big(u_1\big(\bigcup_j Q_j\big)\big)}{W_0^{1/p_0}\big(u_0\big(\bigcup_j E_j\big)\big)} \le C\max_j \frac{|Q_j|}{|E_j|}.$$

Demostración. Para ver la necesidad consideramos $f = \chi_E$ con $E = \bigcup_j E_j$. Si $t > 0$ es tal que $\frac{1}{t} > \max_j \frac{|Q_j|}{|E_j|}$, entonces $\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f \geq \frac{|E_j|}{|Q_j|} > t$ y se tiene $Q_j \subset \{Mf > t\}$. Esto vale para todo $j = 1, \ldots, J$ y así, $\bigcup_j Q_j \subset \{Mf > t\}$. Con ello,

$$tW_1^{1/p_1}\big(u_1\big(\bigcup_j Q_j\big)\big) \leq tW_1^{1/p_1}\big(\lambda_{Mf}^{u_1}(t)\big) \leq C\|f\|_{\Lambda_{u_0}^{p_0}(w_0)} = CW_0^{1/p_0}\big(u_0\big(\bigcup_j E_j\big)\big)$$

y se sigue que

$$\frac{W_1^{1/p_1}\big(u_1\big(\bigcup_j Q_j\big)\big)}{W_0^{1/p_0}\big(u_0\big(\bigcup_j E_j\big)\big)} \leq C\frac{1}{t}.$$

Como en este argumento $\frac{1}{t} > \max_j \frac{|Q_j|}{|E_j|}$ es arbitrario, queda probada la desigualdad (2.8).

Recíprocamente, supongamos que se da la desigualdad (2.8). Por monotonía, ésta se cumple también si las familias $(Q_j)_j$, $(E_j)_j$ son infinitas numerables. Si $f = \chi_E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ y $t > 0$, para todo $x \in \{Mf > t\}$ existe un cubo Q con $x \in Q$ y tal que $\frac{1}{|Q|}\int_Q f = \frac{|E \cap Q|}{|Q|} > t$. Con nuestra definición de M se tiene $Mf(y) > t$, $\forall y \in Q$ y así, $Q \subset \{Mf > t\}$. Reiterando este proceso obtenemos una familia finita o numerable de cubos $(Q_j)_j$ tal que $\{Mf > t\} = \bigcup_j Q_j$ y verificando (con $E_j = E \cap Q_j$) $\frac{|E_j|}{|Q_j|} > t$, $j = 1, 2, \ldots$ Entonces $t \leq \inf_j \frac{|E_j|}{|Q_j|} = \big(\sup_j \frac{|Q_j|}{|E_j|}\big)^{-1}$ y se tiene, aplicando (2.8),

$$tW_1^{1/p_1}\big(\lambda_{Mf}^{u_1}(t)\big) \leq \frac{W_1^{1/p_1}\big(u_1\big(\bigcup_j Q_j\big)\big)}{\sup_j \frac{|Q_j|}{|E_j|}} \lesssim W_0^{1/p_0}\big(u_0\big(\bigcup_j E_j\big)\big) \lesssim W_0^{1/p_0}\big(u_0(E)\big).$$

Tomando ahora el supremo en t se obtiene

$$\|Mf\|_{\Lambda_{u_1}^{p_1,\infty}(w_1)} \leq CW_0^{1/p_0}\big(u_0(E)\big) = C\|f\|_{\Lambda_{u_0}^{p_0}(w_0)}. \qquad \square$$

Observación 2.9. En la condición 2.8 se puede suponer que los conjuntos $(E_j)_j$ son disjuntos. En efecto, para toda familia finita de cubos $(Q_j)_j$ existe una subfamilia $(Q_{j_k})_k$ formada por cubos disjuntos y tal que $\bigcup_j Q_j \subset \bigcup_k Q_{j_k}^*$ donde cada $Q_{j_k}^*$ es un dilatado de Q_{j_k} con lado tres veces mayor (véase [St] por ejemplo). Los conjuntos $(E_{j_k})_k$ son entonces disjuntos y si la condición se cumple en este caso, se tiene

$$\frac{W_1^{1/p_1}\big(u_1\big(\bigcup_j Q_j\big)\big)}{W_0^{1/p_0}\big(u_0\big(\bigcup_j E_j\big)\big)} \le \frac{W_1^{1/p_1}\big(u_1\big(\bigcup_k Q^*_{j_k}\big)\big)}{W_0^{1/p_0}\big(u_0\big(\bigcup_k E_{j_k}\big)\big)} \le C \max_k \frac{|Q^*_{j_k}|}{|E_{j_k}|}$$

$$\le CC_n \max_k \frac{|Q_{j_k}|}{|E_{j_k}|} \le CC_n \max_j \frac{|Q_j|}{|E_j|}.$$

Corolario 2.10. *Si* $M : \Lambda^{p_0}_{u_0}(w_0) \to \Lambda^{p_1,\infty}_{u_1}(w_1),\ 0 < p_0, p_1 < \infty$, *entonces*

$$\frac{W_1^{1/p_1}\big(u_1(Q)\big)}{|Q|} \le C \frac{W_0^{1/p_0}\big(u_0(E)\big)}{|E|}, \quad E \subset Q,$$

para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$. *En particular* $W_0(t) > 0,\ t > 0$ *y* $u_0(x) > 0$ *a.e.* $x \in \mathbb{R}^n$.

Las dos proposiciones que ahora siguen son consecuencia de los dos últimos resultados.

Proposición 2.11. *Sea* $0 < p_0, p_1 < \infty$ *y supongamos que* $M : \Lambda^{p_0}_{u_0}(w_0) \to \Lambda^{p_1,\infty}_{u_1}(w_1)$. *Entonces* $\int_{\mathbb{R}^n} u_0 = \infty$.

Demostración. Por el Corolario 2.10 se tiene, para todo cubo Q,

$$\frac{|E|}{|Q|} \le C \frac{W_0^{1/p_0}\big(u_0(E)\big)}{W_1^{1/p_1}\big(u_1(Q)\big)}, \quad E \subset Q. \tag{2.12}$$

Supongamos $\int_{\mathbb{R}^n} u_0 = u_0(\mathbb{R}^n) < \infty$ y llegaremos a una contradicción. En efecto, sean $a \in \big(0, u_1(\mathbb{R}^n)\big)$ y $b \in (0,1)$ tal que

$$C \frac{W_0^{1/p_0}\big(bu_0(\mathbb{R}^n)\big)}{W_1^{1/p_1}(a)} < 5^{-n}.$$

Entonces, si $u_1(Q) \ge a$, la desigualdad $\frac{u_0(E)}{u_0(Q)} \le b$ implica, por lo anterior,

$$\frac{|E|}{|Q|} \le C \frac{W_0^{1/p_0}\big(u_0(E)\big)}{W_1^{1/p_1}\big(u_1(Q)\big)} \le C \frac{W_0^{1/p_0}\big(bu_0(\mathbb{R}^n)\big)}{W_1^{1/p_1}(a)} < 5^{-n}.$$

Es decir, si Q es un cubo cualquiera con $u_1(Q) \ge a$,

$$E \subset Q,\ |E| \ge 5^{-n}|Q| \Rightarrow u_0(E) > bu_0(Q). \tag{2.13}$$

Ahora sea Q_0 un cubo con $u_1(3Q_0) \ge a$ (para cada cubo Q, $kQ,\ k = 2, 3, \dots$ denota un cubo con el mismo centro que Q y lado k veces el de Q). Sea $\tilde{Q} \subset 3Q_0$

un cubo con interior disjunto de Q_0 y tal que $|\tilde{Q}| = |Q_0|$. Entonces $5\tilde{Q} \supset 3Q_0$ y así, $u_1(5\tilde{Q}) \geq a$ y se tiene por (2.13),

$$u_0(\tilde{Q}) > bu_0(5\tilde{Q}) \geq bu_0(Q_0).$$

Por lo tanto, $u_0(3Q_0) \geq u_0(Q_0) + u_0(\tilde{Q}) \geq (1+b)u_0(Q_0) = \alpha u_0(Q_0)$, donde $\alpha = 1 + b > 1$. Por el mismo argumento, $u_0(9Q_0) \geq \alpha u_0(3Q_0) \geq \alpha^2 u_0(Q_0)$ y, en general, $u_0(3^n Q_0) \geq \alpha^n u_0(Q_0)$. Puesto que $\lim_n u_0(3^n Q_0) = u_0(\mathbb{R}^n)$ y $\alpha > 1$ se sigue $u_0(\mathbb{R}^n) = \infty$ (nótese que $u_0(Q_0) > 0$ por (2.12)) en contradicción con la suposición original. $\square$

Proposición 2.14. *Sea* $0 < p_0, p_1 < \infty$. *Si* $M : \Lambda_u^{p_0}(w) \to \Lambda_u^{p_1,\infty}(w)$, *entonces* $p_1 \leq p_0$. *Si, además,* $\int w = \infty$, *entonces* $p_1 = p_0$.

Demostración. Por el Corolario 2.10, sabemos que se verifica

$$W^{1/p_1 - 1/p_0}\big(u(Q)\big) \leq C,$$

para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$, lo cual, teniendo en cuenta la Proposición 2.11, implica

$$W^{1/p_1 - 1/p_0}(r) \leq C, \quad r > 0.$$

Como $\lim_{t\to 0} W(t) = 0$, se deduce que $p_1 \leq p_0$. Si $\int w = \infty$, $\lim_{t\to\infty} W(t) = \infty$ y la desigualdad anterior sólo es posible si $p_0 = p_1$. $\square$

Proposición 2.15. *Sea* $0 < p, q, r < \infty$. *Si* $M : \Lambda_u^{p,q}(w) \to \Lambda_u^{p,r}(w)$ *entonces* $r \geq q$.

Demostración. $|f| \leq Mf$ para toda $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ y la acotación del enunciado implica $\Lambda_u^{p,q}(w) \subset \Lambda_u^{p,r}(w)$. Como $\big(\mathbb{R}^n, u(x)dx\big)$ y $\big(\mathbb{R}^+, w(t)dt\big)$ son espacios no atómicos y dado que $\|f\|_{\Lambda_u^{p,q}(w)} = \|f_u^*\|_{L^{p,q}(w)}$, la inclusión anterior implica

$$\left[\int_0^b g^r(t) t^{r/p-1}\,dt\right]^{1/r} \leq C\left[\int_0^b g^q(t) t^{q/p-1}\,dt\right]^{1/q}, \qquad g\downarrow,$$

con $b = W\big(u(\mathbb{R}^n)\big)$. Equivalentemente,

$$\sup_{g\downarrow} \frac{\int_0^b g(t) t^{r/p-1}\,dt}{\left[\int_0^b g(t)^{q/r} t^{q/p-1}\,dt\right]^{r/q}} < \infty.$$

Ahora bien, por el Teorema I.5.7 (Sawyer), este supremo es infinito si $r < q$. $\square$

El siguiente enunciado, muy general, es consecuencia de los teoremas de interpolación desarrollados en la sección 6 del capítulo anterior.

Teorema 2.16. *Sea $0 < p_0, p_1 < \infty$ y supongamos que $W_1 \in \Delta_2$. Entonces la acotación $M : \Lambda^{p_0}_{u_0}(w_0) \to \Lambda^{p_1,\infty}_{u_1}(w_1)$ sobre funciones características, es decir, la desigualdad*

$$\big\|M\chi_E\big\|_{\Lambda^{p_1,\infty}_{u_1}(w_1)} \leq C\|\chi_E\|_{\Lambda^{p_0}_{u_0}(w_0)}, \qquad E \subset \mathbb{R}^n,$$

implica

$$M : \Lambda^{q_0,r}_{u_0}(w_0) \longrightarrow \Lambda^{q_1,r}_{u_1}(w_1), \qquad 0 < r \leq \infty,$$

para $p_i < q_i < \infty,\ i = 0, 1,\ p_1/p_0 = q_1/q_0$. En particular se tiene $M : \Lambda^{q_0}_{u_0}(w_0) \to \Lambda^{q_1}_{u_1}(w_1)$ si $p_1 \geq p_0$.

Demostración. Como $M : L^\infty \to L^\infty$, la tesis del enunciado es consecuencia inmediata del Teorema II.6.11 (véase también la Observación II.6.12). □

Combinado el Teorema 2.7 con resultados del Capítulo 2 sobre acotación de operadores orden continuos en espacios de Lorentz, obtenemos la siguiente caracterización para la acotación débil, válida en el caso $0 < p_0 \leq 1,\ w_1 \in B_{p_1/p_0}$.

Teorema 2.17. *Si $0 < p_0 \leq 1,\ 0 < p_1 < \infty$ y $w_1 \in B_{p_1/p_0}$ se tiene la acotación $M : \Lambda^{p_0}_{u_0}(w_0) \to \Lambda^{p_1,\infty}_{u_1}(w_1)$ si y sólo si para toda familia finita de cubos $(Q_j)_{j=1}^J$ y toda familia de conjuntos medibles $(E_j)_{j=1}^J$ con $E_j \subset Q_j$, $\forall j$, se verfica*

$$\frac{W_1^{1/p_1}\big(u_1\big(\bigcup_j Q_j\big)\big)}{W_0^{1/p_0}\big(u_0\big(\bigcup_j E_j\big)\big)} \leq C \max_j \frac{|Q_j|}{|E_j|}.$$

Demostración. M es un operador orden continuo (Definición I.2.6) sobre la clase regular $L = \Lambda^{p_0}_{u_0}(w_0)$. El Teorema II.6.10 nos dice entonces que la acotación del enunciado es equivalente a la del Teorema 2.7 y así, la condición (2.8) es necesaria y suficiente. □

3. La desigualdad fuerte en el caso diagonal

En esta sección daremos una caracterización para las clases $B_p(u)$ en el caso más general, es decir, obtendremos una condición necesaria y suficiente para que se dé la acotación

$$M : \Lambda^p_u(w) \longrightarrow \Lambda^p_u(w).$$

Necesitaremos antes dos resultados auxiliares.

Lema 3.1. *Sea $0 < p < \infty$ y supongamos que, para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$, se verifica la condición*

$$\frac{W\big(u(Q)\big)}{|Q|^p} \leq C \frac{W\big(u(E)\big)}{|E|^p}, \qquad E \subset Q,$$

con C independiente de Q. Entonces $w \in B_q$ para todo $q > p$. En particular $W \in \Delta_2$.

Demostración. La medida $u(x)dx$ es σ-finita y no-atómica y, por lo tanto, $\big(\mathbb{R}^n, u(x)dx\big)$ es un espacio de medida resonante. En estos espacios se verifica la igualdad

$$\int_0^\infty f^* g^* = \sup_{h^*=g^*} \int fh$$

(véase [BS]) para todo par de funciones medibles f, g. En nuestro caso se tendrá, para $0 < t < u(Q)$,

$$\begin{aligned}\big(u^{-1}\chi_Q\big)_u^{**}(t) &= \frac{1}{t}\int_0^t \big(u^{-1}\chi_Q\big)_u^{*} \\ &= \frac{1}{t}\sup\Big\{\int_Q u^{-1}\chi_E\, u \,:\, u(E)=t,\ E\subset Q\Big\} \\ &= \frac{1}{t}\sup\big\{|E| \,:\, u(E)=t,\ E\subset Q\big\} \leq C\frac{|Q|}{W^{1/p}\big(u(Q)\big)}\frac{W^{1/p}(t)}{t},\end{aligned}$$

debido a la condición del enunciado. Pero la función $\big(u^{-1}\chi_Q\big)_u^{**}$ es decreciente y,

$$\big(u^{-1}\chi_Q\big)_u^{**}(t) \geq \big(u^{-1}\chi_Q\big)_u^{**}\big(u(Q)\big) = \frac{|Q|}{u(Q)}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{W^{1/p}\big(u(Q)\big)}{u(Q)} \leq C\frac{W^{1/p}(t)}{t}, \qquad 0 < t < u(Q),$$

desigualdad que equivale a $\frac{W^{1/p}(r)}{r} \leq C\frac{W^{1/p}(t)}{t}$, $0 < t < r < \infty$ y que implica (véase [So] por ejemplo) $w \in \bigcup_{q>p} B_q$. $\square$

Usaremos el siguiente resultado de Hunt-Kurtz cuya demostración puede verse en [HK].

Lema 3.2 (Hunt-Kurtz). *Si $t > 0$, $E \subset \mathbb{R}^n$, y denotamos $E_t = \big\{M\chi_E > t\big\}$, existe una constante $\alpha > 1$, que sólo depende de la dimensión, tal que*

$$\big(E_t\big)_s \supset E_{\alpha ts}, \qquad s, t \in (0,1).$$

Se sabe que la acotación $M : L^p(u) \to L^p(u),\ p > 1$, implica $M : L^{p-\epsilon}(u) \to L^{p-\epsilon}(u)$ para cierto $\epsilon > 0$. Análogamente $M : \Lambda^p(w) \to \Lambda^p(w)$ es equivalente a $w \in B_p$ que implica $w \in B_{p-\epsilon}$. Como vamos a ver a continuación, esto también es cierto en el caso general $M : \Lambda^p_u(w) \to \Lambda^p_u(w)$. Es decir, si $w \in B_p(u),\ 0 < p < \infty$, existe $\epsilon > 0$ tal que $w \in B_{p-\epsilon}(u)$. En el resultado que sigue se prueba de hecho un resultado algo más fuerte: si $M : \Lambda^p_u(w) \to \Lambda^p_u(w)$ sobre funciones características entonces $w \in B_{p-\epsilon}$. Parte de su demostración sigue la misma idea desarrollada en la demostración del Teorema 2 en [HK].

Teorema 3.3. *Sea $0 < p, r < \infty$ y supongamos que*

$$\big\|M\chi_E\big\|_{\Lambda^{p,r}_u(w)} \le C\|\chi_E\|_{\Lambda^p_u(w)}, \qquad E \subset \mathbb{R}^n.$$

Entonces existe $q \in (0,p)$ tal que $M : \Lambda^q_u(w) \to \Lambda^q_u(w)$.

Demostración. Probaremos primero que la desigualdad del enunciado sigue siendo válida si se sustituyen los índices p, r por ciertos índices $\tilde{p}, \tilde{r}$ con $\tilde{p} < p$. Para ello observemos que la hipótesis del enunciado equivale (c.f. Proposición II.2.5) a la desigualdad

$$\int_0^1 t^{r-1} W^{r/p}\big(u(E_t)\big)\, dt \le B W^{r/p}\big(u(E)\big), \qquad E \subset \mathbb{R}^n, \tag{3.4}$$

con $E_t,\ t > 0$, definido como en el lema anterior y siendo B una constante independiente de E. Sea $\alpha > 1$ la constante, que sólo depende de la dimensión, del Lema 3.2. Probaremos que se verifica, para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$, la siguiente desigualdad,

$$\int_0^1 t^{r-1} W^{r/p}\big(u(E_t)\big) \frac{1}{n!} \log^n \frac{1}{t}\, dt \le B(B\alpha^r)^n W^{r/p}\big(u(E)\big), \qquad E \subset \mathbb{R}^n. \tag{3.5}$$

Si $n = 0$, (3.5) es exactamente (3.4). Por inducción, sólo hay que probar que (3.5) implica una desigualdad análoga con $n+1$ en lugar de n. Para ello, dado $s \in (0,1)$, aplicamos (3.5) al conjunto $E = E_s$ obteniendo

$$\int_0^1 t^{r-1} W^{r/p}\big(u\big((E_s)_t\big)\big) \frac{1}{n!} \log^n \frac{1}{t}\, dt \le B(B\alpha^r)^n W^{r/p}\big(u(E_s)\big). \tag{3.6}$$

Por el Lema 3.2, la parte izquierda de (3.6) es mayor o igual que

$$\begin{aligned}
&\int_0^{1/\alpha} t^{r-1} W^{r/p}\big(u(E_{\alpha st})\big)\frac{1}{n!}\log^n\frac{1}{t}\,dt\\
=&(\alpha s)^{-r}\int_0^s x^{r-1}W^{r/p}\big(u(E_x)\big)\frac{1}{n!}\log^n\frac{\alpha s}{x}\,dx\\
\geq&(\alpha s)^{-r}\int_0^s x^{r-1}W^{r/p}\big(u(E_x)\big)\frac{1}{n!}\log^n\frac{s}{x}\,dx,
\end{aligned}$$

Así, de (3.6) se sigue

$$\frac{1}{s}\int_0^s x^{r-1}W^{r/p}\big(u(E_x)\big)\frac{1}{n!}\log^n\frac{s}{x}\,dx \leq (B\alpha^r)^{n+1}s^{r-1}W^{r/p}\big(u(E_s)\big).$$

Integrando en $s\in(0,1)$ ambos miembros de esta desigualdad y teniendo en cuenta (3.4), deducimos que

$$\int_0^1\frac{1}{s}\int_0^s x^{r-1}W^{r/p}\big(u(E_x)\big)\frac{1}{n!}\log^n\frac{s}{x}\,dx\,ds \leq B(B\alpha^r)^{n+1}W^{r/p}\big(u(E)\big)$$

y al cambiar el orden de integración en la parte izquierda obtenemos

$$\int_0^1 x^{r-1}W^{r/p}\big(u(E_x)\big)\frac{1}{(n+1)!}\log^{n+1}\frac{1}{x}\,dx \leq B(B\alpha^r)^{n+1}W^{r/p}\big(u(E)\big),$$

tal como queríamos probar.

Sea ahora $R\in(0,1)$. La desigualdad (3.5) puede escribirse entonces de la siguiente forma

$$\int_0^1 t^{r-1}W^{r/p}\big(u(E_t)\big)\frac{\big(\frac{R}{B\alpha^r}\log\frac{1}{t}\big)^n}{n!}\,dt \leq BR^nW^{r/p}\big(u(E)\big)$$

y sumando ambos miembros en n obtenemos, con $\delta = R/(B\alpha^r)>0$,

$$\int_0^1 t^{r-\delta-1}W^{r/p}\big(u(E_t)\big)\,dt \leq \frac{B}{1-R}W^{r/p}\big(u(E)\big)$$

que equivale a

$$\big\|M\chi_E\big\|_{\Lambda_u^{\tilde p,\tilde s}(w)} \leq \widetilde{C}\|\chi_E\|_{\Lambda_u^{\tilde p}(w)}, \qquad E\subset\mathbb{R}^n,$$

donde $\tilde p = p(r-\delta)/r<p$, $\tilde s = r-\delta$ (véase la Proposición II.2.5). En particular

$$\big\|M\chi_E\big\|_{\Lambda_u^{\tilde p,\infty}(w)} \leq \widetilde{C}\|\chi_E\|_{\Lambda_u^{\tilde p}(w)}, \qquad E\subset\mathbb{R}^n.$$

Además, por el Teorema 2.7 y el Lema 3.1 se tiene $W\in\Delta_2$. Podemos entonces aplicar el Teorema 2.16 (con $u_0=u_1=u$, $w_0=w_1=w$, $p_0=p_1=\tilde p$) para concluir la tesis del enunciado. $\square$

Una consecuencia inmediata del Teorema 3.3 y del Lema 3.1 es lo siguiente.

Corolario 3.7. *Sea $0 < p < \infty$ y u un peso cualquiera en $\mathbb{R}^n$. Entonces,*

(i) si $w \in B_p(u)$ existe $q < p$ tal que $w \in B_q(u)$.

(ii) $B_p(u) \subset B_p$, es decir, la acotación $M : \Lambda_u^p(w) \to \Lambda_u^p(w)$ implica $M : \Lambda^p(w) \to \Lambda^p(w)$.

Como corolario de lo anterior obtenemos una caracterizacción de la acotación $M : \Lambda_u^p(w) \to \Lambda_u^p(w)$ o, si se quiere, de las clases $B_p(u)$ para cualquier u.

Teorema 3.8. *Sean u, w pesos en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^+$ respectivamente. Si $0 < p < \infty$ los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) $M : \Lambda_u^p(w) \to \Lambda_u^p(w)$,

(ii) $\big\|M\chi_E\big\|_{\Lambda_u^p(w)} \le C\|\chi_E\|_{\Lambda_u^p(w)}, \qquad E \subset \mathbb{R}^n$,

(iii) $M : \Lambda_u^q(w) \to \Lambda_u^q(w)$ con $q \in (0, p)$,

(iv) existe $q \in (0, p)$ tal que $\big\|M\chi_E\big\|_{\Lambda_u^{q,\infty}(w)} \le C\|\chi_E\|_{\Lambda_u^q(w)}, \quad E \subset \mathbb{R}^n$,

(v) existe $q \in (0, p)$ tal que para toda familia finita de cubos $(Q_j)_{j=1}^J$ y toda familia de conjuntos medibles $(E_j)_{j=1}^J$ con $E_j \subset Q_j$, $\forall j$, se verfica

$$\frac{W\big(u\big(\bigcup_j Q_j\big)\big)}{W\big(u\big(\bigcup_j E_j\big)\big)} \le C \max_j \left[\frac{|Q_j|}{|E_j|}\right]^q. \tag{3.9}$$

(vi) $\big((M\chi_E)_u^*(t)\big)^q \le C\frac{W\big(u(E)\big)}{W(t)}$, $t > 0$, $E \subset \mathbb{R}^n$, con $q \in (0, p)$ independiente de t, E.

Demostración. (i)⇒(ii) es inmediato y (ii)⇒(iii) es el Teorema 3.3. (iii)⇒(iv) es asimismo inmediato y (iv)⇒(i) es consecuencia del Teorema 2.16 (ya que $W \in \Delta_2$ por (2.7) y (3.1)). La equivalencia (iv)⇔(v) es el Teorema 2.7. Por otra parte (vi) implica, para $E \subset \mathbb{R}^n$,

$$\big\|M\chi_E\big\|_{\Lambda_u^{q,\infty}(w)} = \sup_{t>0} W^{1/q}(t)(M\chi_E)_u^*(t) \le CW^{1/q}\big(u(E)\big) = C\|\chi_E\|_{\Lambda_u^q(w)},$$

que no es más que la condición (iv). Finalmente, (iii) implica $M : \Lambda_u^q(w) \to \Lambda_u^{q,\infty}(w)$ y del Teorema 2.3 se sigue (vi). □

Observación 3.10.

(i) Como ya apuntábamos en la Observación 2.9 los conjuntos $(E_j)_j$ en la condición (3.9) pueden suponerse disjuntos. Si el peso u es doblante también los cubos $(Q_j)_j$ pueden suponerse disjuntos, como se comprueba fácilmente.

(ii) Supongamos que el peso w tiene la siguiente propiedad: Para cada $\alpha > 1$ existe una constante C_α tal que

$$\frac{W\big(\sum_j r_j\big)}{W\big(\sum_j t_j\big)} \leq C_\alpha \max_j \left[\frac{W(r_j)}{W(t_j)}\right]^\alpha$$

para toda familia finita de pares de números positivos $\big\{(r_j, t_j)\big\}_{j=1}^m$ con $0 < t_j < r_j$, $j = 1, \ldots, m$. Entonces, la condición (3.9) es suficiente verificarla para un sólo cubo Q_j y un sólo E_j, es decir, es equivalente a la desigualdad

$$\frac{W\big(u(Q)\big)}{|Q|^q} \leq C \frac{W\big(u(E)\big)}{|E|^q}, \qquad E \subset Q, \tag{3.11}$$

que ha de ser válida (con $q < p$) para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$. En efecto, la condición anterior es consecuencia de (3.9) y, si se da (3.11) y $(E_j)_j$ es una familia disjunta con $E_j \subset Q_j$, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{W\big(u\big(\bigcup_j Q_j\big)\big)}{W\big(u\big(\bigcup_j E_j\big)\big)} &\leq \frac{W\big(\sum_j u(Q_j)\big)}{W\big(\sum_j u(E_j)\big)} \leq C_\alpha \max_j \left[\frac{W(u(Q_j))}{W(u(E_j))}\right]^\alpha \\ &\leq C C_\alpha \max_j \left[\frac{|Q_j|}{|E_j|}\right]^{\alpha q}\end{aligned}$$

y basta tomar $\alpha > 1$ con $\alpha q < p$.

Todo peso potencia $w(t) = t^\alpha$, $\alpha > -1$, verifica la anterior condición.

(iii) Si $w = 1$, $p > 1$, la condición (3.9) equivale a $u \in A_p$, ya que esta última condición es equivalente (véase [St] por ejemplo) a la existencia de $q \in (1, p)$ tal que

$$\frac{u(Q)}{|Q|^q} \leq C \frac{u(E)}{|E|^q}, \qquad E \subset Q,$$

para todo cubo Q, condición que equivale (por lo observado en (ii)) a (3.9).

(iv) Si $u = 1$ la condición (3.9) equivale a $w \in B_p$, como es inmediato de comprobar.

El enunciado de la última observación se generaliza de la manera siguiente.

Teorema 3.12. *Si $u \in A_1$ entonces,*

$$M : \Lambda^p_u(w) \to \Lambda^p_u(w) \;\Leftrightarrow\; M : \Lambda^p(w) \to \Lambda^p(w), \qquad 0 < p < \infty.$$

Más específicamente, si $0 < p < \infty$, $B_p(u) = B_p$ *si y sólo si* $u \in \bigcap_{q>1} A_q$.

Demostración. Ya sabemos (Corolario 3.7) que $B_p(u) \subset B_p$. Por otra parte, si $w \in B_p$ existe $l < p$ tal que $w \in B_l$ y se tiene $\frac{W(r)}{W(t)} \lesssim \left(\frac{r}{t}\right)^l$, $0 < t < r < \infty$. Sea $s > 1$ tal que $sl < p$. Si $u \in \bigcap_{q>1} A_q$, en particular $u \in A_s$ y se verifica $\frac{u(Q)}{u(E)} \lesssim \left(\frac{|Q|}{|E|}\right)^s$, $E \subset Q$. Con ello se tiene, para toda familia $(Q_j)_j$ de cubos y $E_j \subset Q_j$ (disjuntos dos a dos),

$$\frac{W\big(u(\bigcup_j Q_j)\big)}{W\big(u(\bigcup_j E_j)\big)} \leq \frac{W\big(\sum_j u(Q_j)\big)}{W\big(\sum_j u(E_j)\big)} \lesssim \left[\frac{\sum_j u(Q_j)}{\sum_j u(E_j)}\right]^l \lesssim \max_j \left[\frac{u(Q_j)}{u(E_j)}\right]^l$$
$$\lesssim \max_j \left[\frac{|Q_j|}{|E_j|}\right]^{sl},$$

lo que implica (Teorema 3.8(v)) $w \in B_p(u)$.

Recíprocamente, supongamos ahora que $B_p(u) = B_p$. Para todo $q < p$ el peso $w(t) = t^{q-1}$ está en $B_p = B_p(u)$ y por (3.9) se tiene, con $q_1 \in (q, p)$,

$$\left[\frac{u(Q)}{u(E)}\right]^q = \frac{W\big(u(Q)\big)}{W\big(u(E)\big)} \lesssim \left[\frac{|Q|}{|E|}\right]^{q_1},$$

de donde

$$\frac{u(Q)}{|Q|^{q_1/q}} \leq C\frac{u(E)}{|E|^{q_1/q}}, \qquad E \subset Q,$$

para todo cubo Q y se sigue, si $r = q_1/q \in (1, p/q)$, que $u \in \bigcap_{s>r} A_s$. Como este argumento vale para todo $q < p$ se deduce que $u \in \bigcap_{s>1} A_s$. $\square$

Observación 3.13.

(i) Sabemos que la acotación $M : \Lambda^p(w) \to \Lambda^p(w)$ se da si y sólo si $w \in B_p$ y, en el otro extremo, tenemos $M : \Lambda^p_u \to \Lambda^p_u$, $p > 1$ (es decir, $M : L^p(u) \to L^p(u)$) si y sólo si $u \in A_p$. Podría pensarse entonces que la acotación $M : \Lambda^p_u(w) \to \Lambda^p_u(w)$, $p > 1$, se da si y sólo si $u \in A_p$, $w \in B_p$, es decir, que $B_p(u) = B_p$ si $u \in A_p$. El resultado anterior nos muestra que esto es falso. De hecho, como consecuencia de dicho resultado, $B_p(u) \neq B_p$, $1 < p < \infty$, si $u \in A_p \setminus A_q$ con $1 < q < p$.

(ii) Que $B_p \subset B_p(u)$ si $u \in \bigcap_{q>1} A_q$ ya había sido probado en [CS3] y [Ne2] para el caso $p \geq 1$.

Usando la misma idea se prueba, de manera totalmente análoga, el siguiente resultado. Su enunciado y el del Teorema 3.12 mejoran el Corolario 3.3 en [CS3] y el Teorema 4.1 en [Ne2] en donde, esencialmente, se viene a enunciar lo mismo en el rango $1 \leq q < \infty$.

Teorema 3.14. *Si $1 < p < \infty$ y $u \in A_p$ entonces $B_{q/p,\infty} \subset B_q(u)$, $0 < q < \infty$.*

Ya hemos visto (Proposición 2.11) que la acotación $M : \Lambda^p_u(w) \to \Lambda^p_u(w)$ implica $u(\mathbb{R}^n) = \infty$. Esto es, esencialmente, lo mejor que se puede decir sobre u, ya que puede darse la acotación anterior sin necesidad de que el peso u esté en alguna clase A_p. El siguiente resultado prueba algo aún más fuerte: el peso u puede no ser doblante. Véase también la Proposición 4.18.

Teorema 3.15. *Si $u(x) = e^{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, y $w = \chi_{(0,1)}$, se tiene $M : \Lambda^q_u(w) \to \Lambda^q_u(w)$ para todo $q > 1$. Por lo tanto, no es necesario en general, que el peso u sea doblante para tener la acotación $M : \Lambda^p_u(w) \to \Lambda^p_u(w)$.*

Demostración. Como el peso w verifica la condición de la Observación 3.10(ii) basta probar que, para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}$ se tiene,

$$\frac{W(u(Q))}{|Q|} \leq C \frac{W(u(E))}{|E|}, \qquad E \subset Q. \tag{3.16}$$

Si $u(E) \geq 1$ entonces $u(Q) \geq 1$ y $W(u(E)) = W(u(Q)) = 1$ y (3.16) se verifica (con $C = 1$) trivialmente. Podemos así suponer que $u(E) < 1$. Entonces $W(u(E)) = u(E)$ y (3.16) equivale, por el teorema de diferenciación de Lebesgue, a

$$\frac{W(u(Q))}{|Q|} \leq C u(x), \qquad \text{a.e. } x \in Q. \tag{3.17}$$

A la hora de probar (3.17) podemos suponer $Q = (a, b)$ con $0 \leq a < b$ ya que, al ser u una función par se tendrá también (3.17) para cubos de la forma $Q = (-b, -a)$, mientras que para los cubos de la forma $Q = (-a, b)$ tenemos

$$\frac{W(u(Q))}{|Q|} \leq \frac{W\big(2u(0,b)\big)}{|(0,b)|} \leq 2 \frac{W\big(u(0,b)\big)}{|(0,b)|}$$

y se usa que el ínfimo esencial de u en $(0, b)$ y en $(-a, b)$ son iguales. Sea pues $Q = (a, b)$ con $0 \leq a < b$ y veamos (3.17). El ínfimo de u en Q es e^a y, por lo tanto, hay que ver que $\frac{W(u(Q))}{|Q|} \leq Ce^a$. Si $e^b - e^a = u(Q) \geq 1$ entonces $b \geq \log(1+e^a)$ y se tiene

$$\frac{W(u(Q))}{|Q|} = \frac{1}{b-a} \leq \frac{1}{\log(1+e^a)-a} = \frac{1}{\log(1+e^{-a})} \leq Ce^a.$$

Si, por el contrario, $e^b - e^a = u(Q) < 1$, se tiene $b-a < e^b - e^a < 1$ y así,

$$\frac{W(u(Q))}{|Q|} = \frac{u(Q)}{|Q|} = \frac{e^b - e^a}{b-a} \leq e^b = e^a e^{b-a} \leq ee^a. \qquad \square$$

4. La desigualdad débil

En esta sección estudiaremos condiciones necesarias y/o suficientes para que se verifique la desigualdad débil

$$M \,:\, \Lambda_u^p(w) \longrightarrow \Lambda_u^{p,\infty}(w).$$

El siguiente resultado, debido a M.J. Carro y J. Soria, nos da una interesante condición necesaria. Puede verse su demostración en [CS3].

Teorema 4.1 (Carro-Soria). *Sea $0 < p_0, p_1 < \infty$ y supongamos que M : $\Lambda_{u_0}^{p_0}(w_0) \longrightarrow \Lambda_{u_1}^{p_1,\infty}(w_1)$. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\left\|u_0^{-1}\chi_Q\right\|_{\Lambda_{u_0}^{p_0}(w_0)'}\left\|\chi_Q\right\|_{\Lambda_{u_1}^{p_1}(w_1)} \leq C|Q| \tag{4.2}$$

para cada cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$. Aquí $\|\cdot\|_{\Lambda_{u_0}^{p_0}(w_0)'}$ denota la norma en el espacio asociado (c.f. Definición II.4.1, Teorema II.4.7).

Desarrollaremos la condición de este teorema y obtendremos algunas consecuencias interesantes. Por ejemplo, al combinar el enunciado anterior con resultados sobre dualidad del Capítulo 2, obtenemos una condición que limita (en función de w_0) el rango de índices p_0 para los cuales es posible la acotación $M \,:\, \Lambda_{u_0}^{p_0}(w_0) \to \Lambda_{u_1}^{p_1,\infty}(w_1)$. Para enunciarlo, antes debemos definir el índice $p_w \in [0,\infty)$ que asociamos a cada peso w de la siguiente forma,

$$p_w = \inf\left\{p > 0 \,:\, \frac{t^p}{W(t)} \in L^{p'-1}\left((0,1), \frac{dt}{t}\right)\right\} \tag{4.3}$$

(con el convenio de que $p' = \infty$ si $0 < p \leq 1$).

Teorema 4.4. *Sea $0 < p_1 < \infty$ y supongamos que se da la acotación $M : \Lambda_{u_0}^{p_0}(w_0) \longrightarrow \Lambda_{u_1}^{p_1,\infty}(w_1)$. Entonces $p_0 \geq p_{w_0}$. Si $p_{w_0} > 1$ la desigualdad anterior es estricta.*

Demostración. Si $M : \Lambda_{u_0}^{p_0}(w_0) \longrightarrow \Lambda_{u_1}^{p_1,\infty}(w_1)$, ha de ser, por el Teorema 4.1, $\Lambda_{u_0}^{p_0}(w_0)' \neq \{0\}$. Entonces el Teorema II.4.11 (apartados (i) y (ii)) implica $\frac{t^{p_0}}{W(t)} \in L^{p_0'-1}\big((0,1), \frac{dt}{t}\big)$. Es decir,

$$p_0 \in \left\{ p > 0 \, : \, \frac{t^p}{W(t)} \in L^{p'-1}\left((0,1), \frac{dt}{t} \right) \right\} = I.$$

El enunciado se sigue del hecho de que I es un intervalo en $[0, \infty)$ no acotado por la derecha y abierto en su extremo inferior, p_{w_0}, si $p_{w_0} > 1$. $\square$

Corolario 4.5. *Si $p_0 < 1$ no existen pesos u_0, u_1 tales que $M : L^{p_0}(u_0) \to L^{p_1,\infty}(u_1)$, $0 < p_1 < \infty$.*

Demostración. Basta observar que $L^{p_0}(u_0) = \Lambda_{u_0}^{p_0}(1)$ y que, si $w = 1$, $p_w = 1$ (c.f. (4.3)). $\square$

Con el fin de encontrar expresiones integrales equivalentes a (4.2) será útil asociar a cada peso u en $\mathbb{R}^n$ la familia de funciones $\{\phi_Q\}_Q$ definida de la siguiente manera. Para cada cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$,

$$\phi_Q(t) = \phi_{Q,u}(t) = \frac{u(Q)}{|Q|} \int_0^t \big(u^{-1}\chi_Q\big)_u^*, \quad t \geq 0. \tag{4.6}$$

Nos será de interés, también, la derivada por la derecha, ϕ_Q', de la función anterior. Viene definida, obviamente, por

$$\phi_Q'(t) = \frac{u(Q)}{|Q|} \big(u^{-1}\chi_Q\big)_u^*(t), \quad t \geq 0. \tag{4.7}$$

Notemos que $\phi_Q'(t) = 0$ si $t \geq u(Q)$ y que $\phi_Q'(t) \leq \frac{1}{t}\phi_Q(t)$, $t \geq 0$. Ahora podemos traducir la condición (4.2) de Carro-Soria en términos de estas funciones. Tal es el contenido de la siguiente proposición. Como puede observarse se obtienen expresiones integrales muy semejantes a las correspondientes a las clases $B_{p_0,p_1,\infty}$ (Teorema I.6.5).

Proposición 4.8. *Sea* $\phi_Q = \phi_{Q,u_0}$.

(a) Si $1 < p_0 < \infty$ *cada una de las siguientes expresiones es equivalente a la condición del Teorema 4.1:*

$$(i) \quad \left[\int_0^{u_0(Q)} W_0^{1-p_0'}\, d\phi_Q^{p_0'}\right]^{1/p_0'} W_1^{1/p_1}\big(u_1(Q)\big) \le C u_0(Q),$$

$$(ii) \quad \left[\int_0^{u_0(Q)} \left[\frac{W_0}{\phi_Q}\right]^{-p_0'} w_0\right]^{1/p_0'} W_1^{1/p_1}\big(u_1(Q)\big) \le C u_0(Q),$$
$$W_1^{1/p_1}\big(u_1(Q)\big) \le C W_0^{1/p_0}\big(u_0(Q)\big).$$

(b) Si $0 < p_0 \le 1$ *la condición necesaria en el Teorema 4.1 es equivalente a*

$$\frac{W_1^{1/p_1}\big(u_1(Q)\big)}{u_0(Q)} \le C \frac{W_0^{1/p_0}(t)}{\phi_Q(t)}, \qquad 0 < t \le u_0(Q).$$

Tanto en (a) como en (b) se supone que las desigualdades valen para cada cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$ *y que la constante* C *es independiente de* Q.

Demostración. Nótese que, por definición, $\int_0^t \left(u_0^{-1}\chi_Q\right)_{u_0}^* = \frac{|Q|}{u_0(Q)}\phi_Q(t)$. Así que, por el Teorema II.4.7 (con $r = u_0(Q)$),

$$\begin{aligned}\left\|u_0^{-1}\chi_Q\right\|_{\Lambda_{u_0}^{p_0}(w_0)'} &\approx \frac{|Q|}{u_0(Q)}\left[\int_0^{u_0(Q)} W_0^{1-p_0'}\, d\phi_Q^{p_0'}\right]^{1/p_0'} \\ &\approx \frac{|Q|}{u_0(Q)}\left[\int_0^{u_0(Q)} \left[\frac{W_0}{\phi_Q}\right]^{-p_0'} w_0\right]^{1/p_0'} + \frac{\int_0^\infty (u_0^{-1}\chi_Q)_{u_0}^*}{W_0^{1/p_0}\big(u_0(Q)\big)},\end{aligned}$$

en el caso $p_0 > 1$, y

$$\left\|u_0^{-1}\chi_Q\right\|_{\Lambda_{u_0}^{p_0}(w_0)'} = \frac{|Q|}{u_0(Q)} \sup_{t>0} \frac{\phi_Q(t)}{W_0^{1/p_0}(t)},$$

en el caso $0 < p_0 \le 1$. Puesto que $\left\|\chi_Q\right\|_{\Lambda_{u_1}^{p_1}(w_1)} = W_1^{1/p_1}\big(u_1(Q)\big)$ y $\int_0^\infty \left(u_0^{-1}\chi_Q\right)_{u_0}^* = \int_{\mathbb{R}^n} u_0^{-1}\chi_Q u_0 = |Q|$, las expresiones dadas se deducen inmediatamente a partir de la condición (4.2). □

Observación 4.9. Es notable el hecho de que la condición necesaria de Carro-Soria (Teorema 4.1) resulta también suficiente en una gran variedad de casos. Por ejemplo:

(i) Si $w_0 = w_1 = 1,\ p_0 = p_1 = p \geq 1$ la desigualdad (4.2) es

$$\|u_0^{-1}\chi_Q\|_{L^{p'}(u_0)}\|\chi_Q\|_{L^p(u_1)} \leq C|Q|,$$

o, equivalentemente,

$$\left[\frac{1}{|Q|}\int_Q u_1\right]\left[\frac{1}{|Q|}\int_Q u_0^{-1/(p-1)}\right]^{p-1} \leq C,$$

en el caso $p > 1$, y

$$\frac{u_1(Q)}{|Q|} \leq C\frac{u_0(E)}{|E|}, \qquad E \subset Q,$$

en el caso $p = 1$. Esta es la llamada condición A_p para el par (u_1, u_0) y se sabe que es suficiente para tener la acotación $M : L^p(u_0) \to L^{p,\infty}(u_1)$ o, en otros términos, $M : \Lambda^p_{u_0}(1) \to \Lambda^{p,\infty}_{u_1}(1)$ (véase [Du]).

(ii) Si $u_0 = u_1 = 1,\ \phi_Q(t) = t,\ 0 \leq t \leq 1$, y la condición del Teorema 4.1 (o, análogamente, las expresiones de la Proposición 4.8) es equivalente a $(w_0, w_1) \in B_{p_0,p_1,\infty}$ (Teorema I.6.5). Es decir, la condición es suficiente.

(iii) Si $u_0 = u_1 = u$, $p_0 = p_1 = q \geq 1$ y $w_0(t) = w_1(t) = t^{q/p-1}$, $1 < p < \infty$, estamos en el caso $M : L^{p,q}(u) \longrightarrow L^{p,\infty}(u)$. La condición (4.2) equivale entonces a la desigualdad

$$\|u^{-1}\chi_q\|_{L^{p',q'}(u)}\|\chi_Q\|_{L^{p,q}(u)} \leq C|Q|. \tag{4.10}$$

Este caso fue estudiado por Chung, Hunt y Kurtz en [CHK] (véase también [HK]) probando que (4.10) es condición necesaria y suficiente.

El estudio de las propiedades de las funciones $\{\phi_Q\}$ nos permitirá entender mejor la condición necesaria (4.2) y extraer consecuencias. En el siguiente enunciado se resumen algunas de estas propiedades.

Proposición 4.11. *Sea u un peso en $\mathbb{R}^n$ y, para cada cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$, sea $\phi_Q = \phi_{Q,u}$. Entonces,*

$$
\begin{aligned}
&(i) && \phi_Q(t) = \frac{u(Q)}{|Q|} \max\big\{|E| \,:\, E \subset Q,\, u(E) = t\big\}, \quad 0 \le t \le u(Q),\\
&(ii) && \phi_{Q\,|\,[0,u(Q)]} : \big[0, u(Q)\big] \longrightarrow \big[0, u(Q)\big] \textit{ es estrictamente creciente,}\\
& && \textit{exhaustiva, cóncava y absolutamente continua,}\\
&(iii) && \phi_Q(t) \ge t \in [0, u(Q)] \textit{ y } u \in A_1 \textit{ si y sólo si } \phi_Q(t) \le Ct, \quad 0 \le t \le u(Q),\\
&(iv) && \textit{si } 1 < p < \infty,\, 0 < q \le p', \quad u \in A_p \Leftrightarrow \big\|\phi_Q'\big(u(Q)\,\cdot\,\big)\big\|_{L^{p',q}} \le C,\\
&(v) && \textit{si } u \in A_p,\ 1 \le p < \infty,\ \textit{entonces } \phi_Q'\big(u(Q)t\big) < Ct^{-1/p'},\ 0 < t \le 1,\\
&(vi) && \textit{si } 1 < p < \infty \textit{ y } \phi_Q'\big(u(Q)t\big) < Ct^{-1/p'},\ 0 < t \le 1,\ \textit{entonces } u \in \bigcap_{q>p} A_q.
\end{aligned}
$$

En (iii), (iv), (v) y (vi), C representa una constante que no depende de Q.

Demostración.

(i) Sea $0 \le t \le u(Q)$ y $E \subset Q$ un conjunto medible tal que $u(E) = t$. Entonces $|E| = \int_{\mathbb{R}^n} u^{-1}\chi_Q\chi_E\, u \le \int_0^\infty \big(u^{-1}\chi_Q\big)_u^*\big(\chi_E\big)_u^* = \int_0^t \big(u^{-1}\chi_Q\big)_u^* = \frac{|Q|}{u(Q)}\phi_Q(t)$. Por otra parte, dado que $\big(Q, u(x)\chi_Q(x)dx\big)$ es un espacio de medida fuertemente resonante (véase [BS]), existe $f \ge 0$ medible en Q con $f_u^* = \big(\chi_E\big)_u^* = \chi_{[0,t)}$ y tal que

$$
\frac{|Q|}{u(Q)}\phi_Q(t) = \int_0^\infty \big(u^{-1}\chi_Q\big)_u^*\big(\chi_E\big)_u^* = \int_Q f u^{-1}\chi_Q u. \tag{4.12}
$$

Se sigue que $f = \chi_R$ con $R \subset Q$, $u(R) = t$ y, por (4.12), $\frac{|Q|}{u(Q)}\phi_Q(t) = |R|$.

(ii) Veamos que $\phi_{Q\,|\,[0,u(Q)]}$ es estrictamente creciente (el resto es obvio). Para ello basta probar que $\big(u^{-1}\chi_Q\big)_u^*(t) > 0$ para $0 < t < u(Q)$. Si no fuera así, existiría $t_0 \in \big(0, u(Q)\big)$ tal que $\big(u^{-1}\chi_Q\big)_u^*(t_0) = 0$ y entonces $u\big(\{u^{-1}\chi_Q > 0\}\big) \le t_0$. Puesto que $t_0 < u(Q)$, esto significaría que $u\big(\{x \in Q \,:\, u(x) = +\infty\}\big) = u\big(\{u^{-1}\chi_Q = 0\}\big) > 0$, lo que contradice el hecho de que u es localmente integrable.

(iii) Puesto que ϕ_Q es cóncava en $[0, u(Q)]$, $t^{-1}\phi_Q(t)$ es decreciente y, así, $t^{-1}\phi_Q(t) \ge u(Q)^{-1}\phi_Q\big(u(Q)\big) = 1$ para $0 \le t \le u(Q)$. La segunda parte de (iii) se sigue de (i) y del hecho de que $u \in A_1$ si y sólo si $\frac{u(Q)}{|Q|} \le C\frac{u(E)}{|E|}$.

(iv) Por definición (véase [St]), $u \in A_p$

$$\Leftrightarrow \frac{u(Q)}{|Q|}\left[\frac{1}{|Q|}\int_Q u^{-p'/p}\right]^{p/p'} \leq C \Leftrightarrow \frac{u(Q)^{1/p}}{|Q|}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\big(u^{-1}\chi_Q\big)^{p'}u\right]^{1/p'} \leq C_1$$
$$\Leftrightarrow \frac{u(Q)^{1/p}}{|Q|}\left[\int_0^\infty \big(u^{-1}\chi_Q\big)_u^{*\,p'}\right]^{1/p'} \leq C_1 \Leftrightarrow \big\|\phi'_Q\big(u(Q)\ \cdot\big)\big\|_{p'} \leq C_1.$$

Puesto que $L^{p',q} \subset L^{p'}$ si $0 < q \leq p'$ hemos probado la suficiencia en (iv). Recíprocamente, si $u \in A_p$ se sabe que $u \in A_{p-\epsilon}$ para algún $\epsilon > 0$. Así, por la anterior equivalencia, $\big\|\phi'_Q\big(u(Q)\ \cdot\big)\big\|_{(p-\epsilon)'} \leq C$. Nótese que $\phi'_Q\big(u(Q)t\big) = \frac{u(Q)}{|Q|}\big(u^{-1}\chi_Q\big)_u^*\big(u(Q)t\big) = 0$ para $t \geq 1$. Puesto que $L^{p_1,r}(X) \subset L^{p_0,q}(X)$ si $p_0 < p_1$ y X es de medida finita (véase [BS]), obtenemos

$$\big\|\phi'_Q\big(u(Q)\ \cdot\big)\big\|_{p',q} \leq \big\|\phi'_Q\big(u(Q)\ \cdot\big)\big\|_{(p-\epsilon)'} \leq C.$$

(v) El caso $p = 1$ es consecuencia de (iii) y de la desigualdad $\phi'_Q(t) \leq \frac{1}{t}\phi_Q(t)$. Si $u \in A_p$, $1 < p < \infty$ entonces, por (iv), $\big\|\phi'_Q\big(u(Q)\ \cdot\big)\big\|_{p',\infty} \leq \big\|\phi'_Q\big(u(Q)\ \cdot\big)\big\|_{p'} \leq C$. Dado que $\phi'_Q\big(u(Q)\ \cdot\big)$ es decreciente, continua por la derecha y nula en $[1,\infty)$, $\big\|\phi'_Q\big(u(Q)\ \cdot\big)\big\|_{p',\infty} = \sup_{0<t<1} t^{1/p'}\phi'_Q\big(u(Q)t\big)$ y se sigue (v).

(vi) La hipótesis implica $\big\|\phi'_Q\big(u(Q)\ \cdot\big)\big\|_{L^{p',\infty}} \leq C$. Pero $\phi'_Q\big(u(Q)\ \cdot\big)$ está soportada en $[0,1]$ y por lo tanto,

$$\big\|\phi'_Q\big(u(Q)\ \cdot\big)\big\|_{L^{q'}} \leq \big\|\phi'_Q\big(u(Q)\ \cdot\big)\big\|_{L^{p',\infty}} \leq C$$

para $q > p$ y (vi) se sigue de (iv). $\square$

Veamos una útil consecuencia de las dos últimas proposiciones.

Proposición 4.13. *Si $0 < p_0, p_1 < \infty$ y $M : \Lambda^{p_0}_{u_0}(w_0) \to \Lambda^{p_1,\infty}_{u_1}(w_1)$, entonces*

$$(i) \quad \frac{W_1^{1/p_1}\big(u_1(Q)\big)}{u_0(Q)} \leq C\frac{W_0^{1/p_0}(t)}{\phi_Q(t)}, \qquad 0 < t \leq u_0(Q),$$
$$(ii) \quad \frac{W_1^{1/p_1}\big(u_1(Q)\big)}{u_0(Q)} \leq C\frac{W_0^{1/p_0}\big(u_0(S)\big)}{u_0(S)}, \quad S \subset Q.$$

Aquí $\phi_Q = \phi_{Q,u_0}$ y se supone que las desigualdades anteriores se verifican para cualquier cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$ con C independiente de Q.

Demostración. (ii) es consecuencia de (i) y de la Proposición 4.11(iii). Por lo tanto sólo hace falta probar (i). Si $p_0 \leq 1$, (i) es exactamente la Proposición 4.8(b). Para $p_0 > 1$ se tiene, por la Proposición 4.8(a.i),

$$\left(\int_0^t W_0^{1-p_0'} \, d\phi_Q^{p_0'} \right)^{1/p_0'} W_1^{1/p_1}\big(u_1(Q)\big) \leq C u_0(Q)$$

para $0 < t \leq u_0(Q)$. Dado que W_0 es creciente se sigue

$$W_0^{-1/p_0}(t) \left(\int_0^t d\phi_Q^{p_0'} \right)^{1/p_0'} W_1^{1/p_1}\big(u_1(Q)\big) \leq C u_0(Q)$$

y se deduce (i). $\square$

El siguiente resultado establece que en la acotación $M : \Lambda_u^{p_0}(w_0) \to \Lambda_u^{p_1,\infty}(w_1)$ podemos "quitar" el peso u.

Teorema 4.14. *Si* $0 < p_0, p_1 < \infty$ *y* $M : \Lambda_u^{p_0}(w_0) \to \Lambda_u^{p_1,\infty}(w_1)$, *se tiene*

$$M \, : \, \Lambda^{p_0}(w_0) \longrightarrow \Lambda^{p_1,\infty}(w_1),$$

es decir, $(w_0, w_1) \in B_{p_0,p_1,\infty}$.

Demostración. Si $p_0 > 1$ entonces, por la Proposición 4.8(a.ii) y usando que $\phi_Q(t) \geq t,\ 0 < t < u(Q)$ (Proposición 4.11(iii)) se tienen las desigualdades

$$\begin{aligned} &\left[\int_0^{u(Q)} \left[\frac{W_0(t)}{t} \right]^{-p_0'} w_0(t) \, dt \right]^{1/p_0'} W_1^{1/p_1}\big(u(Q)\big) \leq C u(Q), \\ &W_1^{1/p_1}\big(u(Q)\big) \leq C W_0^{1/p_0}\big(u(Q)\big), \end{aligned}$$

para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$. Pero hemos probado (Proposición 2.11) que $u(\mathbb{R}^n) = \infty$. Así, para cada $r > 0$ existe un cubo Q con $u(Q) = r$. Por lo tanto las dos desigualdades anteriores son equivalentes a la condición (a.iii) del Teorema I.6.5 y así, $(w_0, w_1) \in B_{p_0,p_1,\infty}$.

Si $p_0 \leq 1$ aplicamos la Proposición 4.8(b) (en lugar de la 4.8(a.ii)) para obtener la expresión del Teorema I.6.5(b) y concluir lo mismo. $\square$.

Corolario 4.15. $B_{p,\infty}(u) \subset B_{p,\infty}$, $0 < p < \infty$.

Observación 4.16.

(i) Si $M : \Lambda_u^1(w) \to \Lambda_u^{1,\infty}(w)$ entonces, por el Corolario 4.15, $w \in B_{1,\infty}$. La mayor clase B_p contenida en $B_{1,\infty}$ es B_1 y si $w \in B_1$, el Teorema 2.17 caracteriza la acotación anterior. Es decir, el problema $M : \Lambda_u^1(w) \to \Lambda_u^{1,\infty}(w)$ sólo queda pendiente en el caso $w \in B_{1,\infty} \setminus B_1$.

(ii) La condición de Carro-Soria (4.2) es suficiente en el caso $M : \Lambda_u^1(w) \to \Lambda_u^{1,\infty}(w)$ si el peso w verifica la condición

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{W(t_j)}{W(r_j)} r_j \le C \frac{W\big(\sum_j t_j\big)}{W\big(\sum_j r_j\big)} \sum_j r_j$$

para toda familia finita de pares de números $\big\{(t_j, r_j)\big\}_j$ con $0 < t_j < r_j$, $j = 1, \dots, n$. En efecto, si se verifica la condición anterior y (4.2) (que implica (2.12)) se tiene para toda familia finita de cubos $(Q_j)_j$ disjuntos y toda familia de conjuntos $(E_j)_j$ con $E_j \subset Q_j$,

$$\sum_j \frac{|E_j|}{|Q_j|} u(Q_j) \lesssim \sum_j \frac{W(u(E_j))}{W(u(Q_j))} u(Q_j) \lesssim \frac{W\big(u\big(\bigcup E_j\big)\big)}{W\big(u\big(\bigcup Q_j\big)\big)} \sum_j u(Q_j).$$

Lo anterior también es cierto (porque $W \in \Delta_2$) si los cubos Q_j son “casi” disjuntos (si $\sum_j \chi_{Q_j} \le k = k_n$). Si $0 \le f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ es acotada y con soporte compacto y $t > 0$, el conjunto de nivel $E_t = \{Mf > t\}$ está contenido (véase [LN1]) en una unión finita de cubos $(Q_j)_j$ tales que $\sum_j \chi_{Q_j} \le k = k_n$ (dependiendo sólo de la dimensión) y $\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f > t$, $\forall j$. Entonces,

$$t \sum_j u(Q_j) \le \int f \left[\sum_j \frac{u(Q_j)}{|Q_j|} u^{-1} \chi_{Q_j} \right] u \le \|f\|_{\Lambda_u^1(w)} \left\| \sum_j \frac{u(Q_j)}{|Q_j|} u^{-1} \chi_{Q_j} \right\|_{\Lambda_u^1(w)'}$$

y, para probar que $\|Mf\|_{\Lambda_u^{1,\infty}(w)} \le C \|f\|_{\Lambda_u^1(w)}$, sólo hay que ver que

$$\left\| \sum_j \frac{u(Q_j)}{|Q_j|} u^{-1} \chi_{Q_j} \right\|_{\Lambda_u^1(w)'} \lesssim \frac{\sum_j u(Q_j)}{W\big(u\big(\bigcup_j Q_j\big)\big)}$$

(ya que entonces se tendrá $tW(u(E_t)) \le tW\big(u\big(\bigcup_j Q_j\big)\big) \le C \|f\|_{\Lambda_u^1(w)}$). Pero, dado que $\sum_j \chi_{Q_j} \leq k$,

$$\int_0^t \left[\sum_j \frac{u(Q_j)}{|Q_j|} u^{-1} \chi_{Q_j} \right]_u^* = \sup_{u(E)=t} \int_E \sum_j \frac{u(Q_j)}{|Q_j|} u^{-1} \chi_{Q_j}\, u$$
$$= \sup_{u(E)=t} \sum_j \frac{|E \cap Q_j|}{|Q_j|} u(Q_j)$$
$$\lesssim \frac{W(t)}{W\big(u(\bigcup_j Q_j)\big)} \sum_j u(Q_j)$$

y (véase el Teorema II.4.7(i)) se sigue la desigualdad deseada.

(iii) Si $\int w < \infty$, la condición sobre w de la observación anterior se puede rebajar: es suficiente que se cumpla "cerca del 0", es decir, con $\sum r_j < \epsilon$ (para un cierto $\epsilon > 0$ dado).

(iv) Es fácil ver (usando las dos obervaciones anteriores) que para los pesos $w = \chi_{(0,1)}$, $w(t) = \big(\log^+(1/t)\big)^\alpha$, $\big(\log^+ \log^+(1/t)\big)^\alpha$, $w(t) = t^\alpha$, la condición necesaria de Carro-Soria (4.2) es también suficiente (en el caso $p_0 = p_1 = 1$, $u_0 = u_1$, $w_0 = w_1 = w$.)

Teorema 4.17. *Sea* $1 \leq p < \infty$, $0 < q < \infty$. *Entonces,*

(i) $B_{q/p} \subset B_{q,\infty}(u)$ *implica* $u \in \bigcap_{r>p} A_r$,

(ii) si $q \leq 1$, $B_{q,\infty} \subset B_{q,\infty}(u)$ *implica* $u \in A_1$.

Demostración.

(i) Es inmediato comprobar (Teorema I.6.6) que el peso $w(t) = t^{r-1}$ está en $B_{q/p} \subset B_{q,\infty}(u)$ para $0 < r < q/p$. Así que, por la Proposición 4.13(i), tenemos, para todo cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$ y $0 < t < u(Q)$,

$$\phi_Q(t) \leq Cu(Q) \frac{W^{1/q}(t)}{W^{1/q}\big(u(Q)\big)} = Cu(Q)^{1-r/q}\, t^{r/q}.$$

Como $\phi'_Q(t) \leq \frac{1}{t}\phi_Q(t)$, $0 < t < u(Q)$, obtenemos $\phi'_Q\big(u(Q)t\big) \leq Ct^{r/q-1}$, $0 < t < 1$, y por la Proposición 4.11(vi), $u \in A_s$ para todo $s > q/r$. Como esto vale para $0 < r < q/p$, concluimos que $u \in \bigcap_{r>p} A_r$.

(ii) Nótese (usando por ejemplo el Teorema I.6.5(b)) que $w(t) = t^{q-1} \in B_{q,\infty} \subset B_{q,\infty}(u)$. De la Proposición 4.13(i) (con $w_0 = w_1 = t^{q-1}$, $u_0 = u_1 = u$, $p_0 = p_1 =$

q) obtenemos ahora $\phi_Q(t) \leq Ct$, $0 < t < u(Q)$, y el enunciado es consecuencia de la Proposición 4.11(iii). $\square$

El siguiente resultado tiene que ver con la clase de pesos A_∞. Recordamos (véase, por ejemplo, [St]) que $u \in A_\infty = \bigcup_{p\geq 1} A_p$ si y sólo si existen constantes $\epsilon, C > 0$ tales que

$$\frac{u(Q)}{|Q|^\epsilon} \geq C \frac{u(E)}{|E|^\epsilon}$$

para todo cubo Q y todo $E \subset Q$ medible. En general $M : \Lambda_u^p(w) \to \Lambda_u^{p,\infty}(w)$ no implica $u \in A_\infty$ (Teorema 3.15). Pero podemos dar una condición suficiente, en el peso w, para ello.

Proposición 4.18. *Supongamos que existen constantes $\epsilon, C > 0$ tales que*

$$\frac{W(r)}{r^\epsilon} \geq C \frac{W(t)}{t^\epsilon}, \quad 0 < t < r < \infty.$$

Entonces $A_p(w) \subset A_\infty$, $0 < p < \infty$.

Demostración. Podemos suponer $\epsilon < p$. Si $u \in A_p(w)$, por la Proposición 4.13,

$$\phi_Q(t) \leq C_1 \frac{W^{1/p}(t)}{W^{1/p}\big(u(Q)\big)} u(Q) \leq C_2 \left[\frac{t}{u(Q)}\right]^{\epsilon/p} u(Q),$$

para todo Q y $0 < t < u(Q)$. Así,

$$\phi_Q'\big(u(Q)t\big) \leq \frac{1}{u(Q)t} \phi_Q\big(u(Q)t\big) \leq C_2 t^{\epsilon/p-1}, \quad 0 < t < 1,$$

y, de la Proposición 4.11(vi), se sigue $u \in A_{q'}$ para $q < p/(p-\epsilon)$. $\square$

Obervación 4.19. La condición sobre w de la Proposición 4.18 no es equivalente a $w \in \bigcup_p B_p$ (como se podría pensar por comparación con el comportamiento de las clases A_p). Por ejemplo, el peso $w = \chi_{(0,1)} \in B_{1,\infty}$ no verifica esa condición. Ni siquiera imponiendo $\int_0^\infty w = \infty$ es cierto lo anterior, como muestra el ejemplo $w(t) = \frac{1}{1+t}$.

Los pesos potencia $w(t) = t^\alpha$ verifican, trivialmente, la condición de la Proposición 4.18. Otro ejemplo, no trivial, de una función que la verifica (con $\epsilon = 1/2$) es $w(t) = 1 + \log^+ \frac{1}{t}$.

Hasta el momento hemos visto sólo condiciones necesarias para la acotación débil. Veamos ahora alguna condición suficiente. Por ejemplo del Teorema 2.3, deducimos los dos siguientes resultados.

Teorema 4.20. *Sea $0 < p, q < \infty$ y supongamos que $M : \Lambda_u^p(w) \to \Lambda_u^{p,\infty}(w)$. Sea $\tilde{w}$ otro peso. Entonces se tiene $M : \Lambda_u^q(\tilde{w}) \to \Lambda_u^{q,\infty}(\tilde{w})$ en cada uno de estos casos:*

(i) Si $0 < q \leq p$ y se verifica la condición

$$\frac{\widetilde{W}^{1/q}(r)}{W^{1/p}(r)} \leq C \frac{\widetilde{W}^{1/q}(t)}{W^{1/p}(t)}, \qquad 0 < t < r < \infty.$$

(ii) Si $p < q < \infty$ y se verifica

$$\left[\frac{1}{\widetilde{W}(t)} \int_0^t \left[\frac{W}{\widetilde{W}} \right]^{\frac{q}{q-p}} \tilde{w} \right]^{\frac{q-p}{q}} \leq C \frac{W(t)}{\widetilde{W}(t)}, \qquad t > 0.$$

Demostración. Fijemos $t > 0$ y consideremos los pesos

$$w_1(s) = \frac{w(s)}{W(t)} \chi_{(0,t)}(s), \quad w_0(s) = \frac{\tilde{w}(s)}{\widetilde{W}(t)} \chi_{(0,t)}(s), \quad s > 0.$$

En las condiciones de (i) se tiene, por el Teorema 3.2(c) del Capítulo 1

$$\sup_{g\downarrow} \frac{\left(\int_0^\infty g^p w_1 \right)^{1/p}}{\left(\int_0^\infty g^q w_0 \right)^{1/q}} = \sup_{s>0} \frac{W_1^{1/p}(s)}{W_0^{1/q}(s)} \leq C.$$

Por lo tanto,

$$\left[\frac{1}{W(t)} \int_0^t (f_u^*)^p w \right]^{1/p} \leq C \left[\frac{1}{\widetilde{W}(t)} \int_0^t (f_u^*)^q \tilde{w} \right]^{1/q}$$

(con C independiente de $t > 0$ y f) y del Teorema 2.3 se sigue (i).

Para ver (ii), nótese que la hipótesis implica, con $r = q/p > 1$,

$$B = B(t) = \left[\int_0^\infty \left[\frac{W_1}{W_0} \right]^{r'} w_0 \right]^{1/r'} + \frac{W_1(\infty)}{W_0^{1/r}(\infty)} \leq C + 1 < \infty$$

y por el Teorema I.5.7 (Sawyer), se tiene

$$\begin{aligned} \sup_{g\downarrow} \frac{\left(\int_0^\infty g^p w_1 \right)^{1/p}}{\left(\int_0^\infty g^q w_0 \right)^{1/q}} &= \left[\sup_{g\downarrow} \frac{\int_0^\infty g w_1}{\left(\int_0^\infty g^r w_0 \right)^{1/r}} \right]^{1/p} \\ &\leq (C'B)^{1/p} \leq \big(C'(C+1) \big)^{1/p} = C'' < \infty. \end{aligned}$$

En particular,

$$\left[\frac{1}{W(t)} \int_0^t \left(f_u^* \right)^p w \right]^{1/p} \leq C'' \left[\frac{1}{\widetilde{W}(t)} \int_0^t \left(f_u^* \right)^q \tilde{w} \right]^{1/q},$$

para todo $t > 0$ y $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ y del Teorema 2.3 se deduce el enunciado. $\square$

Corolario 4.21. *Sea* $0 < p < \infty$ *y supongamos que* $M : \Lambda_u^p(w) \to \Lambda_u^{p,\infty}(w)$*. Si* $0 < q \leq p$ *y* $\tilde{w}$ *es un peso tal que* $\widetilde{W}^{1/q}/W^{1/p}$ *es decreciente, entonces* $M : \Lambda_u^q(\tilde{w}) \longrightarrow \Lambda_u^{q,\infty}(\tilde{w})$*.*

El siguiente enunciado complementa el Teorema 4.14.

Teorema 4.22. *Si* $u \in A_1$*, se tiene la acotación* $M : \Lambda_u^{p_0}(w_0) \to \Lambda_u^{p_1,\infty}(w_1)$ *si y sólo si* $M : \Lambda^{p_0}(w_0) \to \Lambda^{p_1,\infty}(w_1)$*. En particular* $B_{p,\infty}(u) = B_{p,\infty}$*,* $0 < p < \infty$*, si* $u \in A_1$*.*

Demostración. La parte "sólo si" es el Teorema 4.14. Para ver la otra implicación, nótese que si $u \in A_1$ se tiene por el Teorema 2.3 (aplicado con $w \equiv 1,\ p = 1$), $(Mf)_u^*(t) \lesssim Af_u^*(t),\ t > 0,\ f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, siendo A el operador de Hardy. Como la acotación $M : \Lambda^{p_0}(w_0) \to \Lambda^{p_1,\infty}(w_1)$ es equivalente a $A : L_{\mathrm{dec}}^{p_0}(w_0) \to L^{p_1,\infty}(w_1)$, se sigue

$$W_1^{1/p_1}(t)(Mf)_u^*(t) \lesssim \|Af_u^*\|_{L^{p_1,\infty}(w_1)} \lesssim \|f_u^*\|_{L^{p_0}(w_0)} = \|f\|_{\Lambda_u^{p_0}(w_0)}, \qquad t > 0,$$

que equivale a $\|Mf\|_{\Lambda_u^{p_1,\infty}(w_1)} \lesssim \|f\|_{\Lambda_u^{p_0}(w_0)}$. □

Usando la misma idea se prueba este otro resultado análogo al Teorema 3.2 en [CS3].

Teorema 4.23. *Sea* $0 < p_0, p_1 < \infty,\ 1 \leq p < \infty$ *y supongamos* $u \in A_p$*. Entonces,*

(i) si $(w_0, w_1) \in B_{p_0,p_1}$*, se tiene* $M : \Lambda_u^{pp_0}(w_0) \to \Lambda_u^{pp_1}(w_1)$*,*

(ii) si $(w_0, w_1) \in B_{p_0,p_1,\infty}$*, se tiene* $M : \Lambda_u^{pp_0}(w_0) \to \Lambda_u^{pp_1,\infty}(w_1)$*.*

Demostración. Si $u \in A_p$, por el Teorema 2.3, $(Mf)_u^*(t)^p \lesssim A\big((f_u^*)^p\big)(t)$. La hipótesis en (i) implica $A : L_{\mathrm{dec}}^{p_0}(w_0) \to L^{p_1}(w_1)$ y se sigue que

$$\begin{aligned}\|Mf\|_{\Lambda_u^{pp_1}(w_1)}^p = \left[\int_0^\infty \big((Mf)_u^*\big)^{pp_1} w_1\right]^{1/p_1} &\lesssim \big\|A\big((f_u^*)^p\big)\big\|_{L^{p_1}(w_1)} \\ &\lesssim \|(f_u^*)^p\|_{L^{p_0}(w_0)} = \|f\|_{\Lambda_u^{pp_0}(w_0)}^p.\end{aligned}$$

El apartado (ii) se prueba de manera análoga. □

El apartado (ii) anterior se puede mejorar si $p > 1,\ p_0 \leq p_1$, tal como se enuncia seguidamente.

Corolario 4.24. *Sea* $0 < p_0 \le p_1 < \infty$. *Si* $u \in A_p$, $p > 1$, *y* $(w_0, w_1) \in B_{p_0,p_1,\infty}$, *entonces* $M : \Lambda_u^{pp_0}(w_0) \to \Lambda_u^{pp_1}(w_1)$.

Demostración. Si $u \in A_p$ entonces $u \in A_q$ para cierto $q \in (1,p)$ y por el teorema anterior, $M : \Lambda_u^{qp_0}(w_0) \to \Lambda_u^{qp_1,\infty}(w_1)$. Aplicando ahora el teorema de interpolación (Teorema II.6.3) se obtiene $M : \Lambda_u^{pp_0}(w_0) \to \Lambda_u^{pp_1,pp_0}(w_1) \subset \Lambda_u^{pp_1}(w_1)$. □

Observación 4.25. En [Ne2] Neugebauer introduce las clases A_p^* que vienen definidas por

$$A_p^* = \{\, u \in A_\infty \,:\, p = \inf\{q \ge 1 \,:\, u \in A_q\}\,\}, \qquad 1 \le p < \infty.$$

Estas clases son disjuntas dos a dos y la unión de todas ellas es A_∞. Con esta terminología lo que se afirma en el Teorema 3.12 es que $B_p(u) = B_p$, $0 < p < \infty$, si $u \in A_1^*$ (y esta condición es también necesaria). De los Teoremas 4.17 y 4.23 se deduce (usando la propiedad $w \in B_p \Rightarrow w \in B_{p-\epsilon}$) que, para $1 < p < \infty$, $0 < q < \infty$,

(a) $u \in A_p^* \;\Rightarrow\; B_{q/p} \subset B_q(u)$,

(b) $B_{q/p} = B_q(u) \;\Rightarrow u \in A_p^*$.

Esto no se puede mejorar (tal como ocurre en el caso $p = 1$), es decir, no es cierto que la caracterización de las clases $B_q(u)$ cuando u es un peso en A_∞ sea $B_q(u) = B_{p/q}$ para el p tal que $u \in A_p^*$. De hecho, es fácil comprobar que el peso $u(x) = 1 + |x|$, $x \in \mathbb{R}$, está en A_2^* y, por el Teorema 3.8 (véase también la Observación 3.10(ii)), $w = \chi_{(0,1)} \in B_{3/2}(u)$ (se cumple la condición (3.9) con $q = 1$). Sin embargo $w \notin B_{3/4}$ y así, $B_{3/2}(u) \ne B_{3/4}$.

Desarrollaremos ahora una condición suficiente para la desigualdad débil. Para ello necesitamos cierta notación. Asociaremos a cada peso u en $\mathbb{R}^n$ una función Φ_u que está relacionada con la familia de funciones $\{\phi_Q\}_Q$ introducida en (4.6). Viene definida por

$$\Phi_u(t) = \sup_Q \phi_Q'\big(u(Q)\,t\big), \quad 0 < t < \infty, \tag{4.26}$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos $Q \subset \mathbb{R}^n$. Notemos que

$$\Phi_u(t) = \sup_Q \frac{u(Q)}{|Q|}\big(u^{-1}\chi_Q\big)_u^*\big(u(Q)\,t\big), \quad 0 < t < \infty.$$

Así, $\Phi_u(t)=0$ si $t\geq 1$. Además, por la Proposición 4.11(iii), $\int_0^t \Phi_u \geq t,\ 0<t<1$. Sabemos que si $u\equiv 1$, $(Mf)_u^*(t)\approx A(f_u^*)(t),\ t>0$, donde A es el operador de Hardy. Aunque esto no es así cuando $u\neq 1$ (véase [CS3]) existe, sin embargo, un resultado parcial positivo en este sentido debido a Leckband-Neugebauer ([LN1]).

Teorema 4.27 (Leckband-Neugebauer). *Sea u un peso en $\mathbb{R}^n$. Entonces, para cada $f\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ se tiene*

$$\big(Mf\big)_u^*(t)\leq C\int_0^\infty \Phi_u(s)f_u^*(st)\,ds, \quad 0<s<\infty,$$

donde C es una constante que sólo depende de la dimensión.

Usando el teorema anterior podemos encontrar una condición suficiente para la acotación $M:\Lambda_u^{p_0}(w_0)\to\Lambda_u^{p_1,\infty}(w_1)$. Obsérvese la similitud de las expresiones con las correspondientes a la condición necesaria de Carro-Soria (Proposición 4.8).

Teorema 4.28. *Sea $0<p_1<\infty$.*

(a) Si $1<p_0<\infty$ y existe una constante $C<\infty$ tal que

$$\begin{aligned} &(i) \quad \left[\int_0^r\left[\int_0^{t/r}\Phi_u\right]^{p_0'}W_0^{-p_0'}(t)w_0(t)\,dt\right]^{1/p_0'}W_1^{1/p_1}(r)\leq C, \quad r>0,\\ &(ii) \quad W_1^{1/p_1}(r)\leq CW_0^{1/p_0}(r), \quad r>0,\end{aligned}$$

entonces $M:\Lambda_u^{p_0}(w_0)\to\Lambda_u^{p_1,\infty}(w_1)$.

(b) Si $0<p_0\leq 1$ se tiene lo mismo si se verifica la condición

$$\int_0^{t/r}\Phi_u\leq C\frac{W_0^{1/p_0}(t)}{W_1^{1/p_1}(r)}, \quad 0<t<r<\infty.$$

Demostración. Consideremos el operador

$$Tg(t)=\int_0^\infty \Phi_u(s)g(st)\,ds=\int_0^\infty k(t,s)g(s)\,ds$$

(con $k(t,s)=(1/t)\Phi_u(s/t)$) que actúa sobre fuciones $g\downarrow$. Por el Teorema 4.27, la acotación

$$T\ :\ L_{\rm dec}^{p_0}(w_0)\longrightarrow L^{p_1,\infty}(w_1) \tag{4.29}$$

implica la acotación del enunciado. La caracterización de (4.29) se obtiene por aplicación directa del Teorema 4.3 en [CS2], dando lugar a las condiciones del enunciado. $\square$

Observación 4.30.

(i) La condición suficiente del teorema anterior no es necesaria en general. Por ejemplo, si $w_0 = w_1 = w = \chi_{(0,1)}$, $p_0 = p_1 = 1$, tal condición es $\int_0^t \Phi_u \lesssim t$, $0 < t < 1$, que por la Proposición 4.11 es equivalente a $u \in A_1$. Es decir, $A_1 \subset A_1(\chi_{(0,1)})$. Sin embargo, para este peso la condición de Carro-Soria (4.2) es necesaria y suficiente en este caso (véase la Observación 4.16). Esta condición es (Proposición 4.8.b) $\phi_Q(t) \lesssim \frac{u(Q)}{W(u(Q))} W^{-1}(t)$, $t > 0$, y, por la Proposición 4.11(i) equivale a

$$\frac{W\big(u(Q)\big)}{|Q|} \leq C \frac{W\big(u(E)\big)}{|E|}, \qquad E \subset Q.$$

Es un simple ejercicio comprobar que (con $w = \chi_{(0,1)}$) el peso $u(x) = 1+|x|$, $x \in \mathbb{R}$, la satisface. Sin embargo $u \notin A_p$ si $p \leq 2$ y se sigue que $A_1(\chi_{(0,1)}) \neq A_1$, es decir, la condición del Teorema 4.28 no es necesaria.

(ii) Supongamos que el peso u satisface la siguiente propiedad: para todo $r > 0$ existe un cubo Q_r tal que

(a) $u(Q_r) \approx r$,

(b) $\int_0^t \Phi_u \approx \int_0^t \phi_{Q_r}(u(Q_r)s)\, ds, \qquad 0 < t < 1.$

Entonces la condición del teorema anterior es equivalente a la condición de Carro-Soria (4.2) y, por lo tanto, ambas son equivalentes a la acotación $M : \Lambda_u^{p_0}(w_0) \to \Lambda_u^{p_1,\infty}(w_1)$. Esto es inmediato a partir de las expresiones del Teorema 4.28 y la Proposición 4.8 (con $u_0 = u_1 = u$) pues, fijado $r > 0$ se pueden sustituir, en las expresiones del Teorema 4.28, r por $u(Q_r)$ y la integral $\int_0^{t/r} \Phi_u$ por $\int_0^{t/r} \phi_Q(u(Q_r)s)\, ds$ para obtener las condiciones de la Proposición 4.8 y viceversa.

(iii) Todo peso potencia $u(x) = |x|^\alpha$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha > 0$, verifica la condición anterior. De hecho, si Q es un cubo centrado en el origen, se comprueba por cálculo directo que

$$\phi_Q(u(Q)t) \approx \Phi_u(t) \approx t^{\frac{-\alpha}{n+\alpha}}, \qquad 0 < t < 1.$$

Por lo tanto, la caracterización de la acotación $M : \Lambda_u^{p_0}(w_0) \to \Lambda_u^{p_1,\infty}(w_1)$ viene dada en este caso por las expresiones en el Teorema 4.28 (que equivale ahora a la condición 4.2). Véase también el Teorema 5.7.

5. Aplicaciones

Podemos utilizar lo desarrollado en las secciones anteriores, junto con algún resultado conocido, para caracterizar en su mayor generalidad, la acotación

$$M : L^{p,q}(u) \to L^{r,s}(u) \tag{5.1}$$

completando de esta forma resultados bien conocidos ([M], [CHK], [HK], [L]).

Teorema 5.2. *Sean $p, r \in (0,\infty)$, $q, s \in (0,\infty]$.*

(a) Si $p < 1$ o bien $p \neq r$ o bien $s < q$, no existen pesos u verificando la acotación $M : L^{p,q}(u) \to L^{r,s}(u)$.

(b) La acotación

$$M \,:\, L^{1,q}(u) \longrightarrow L^{1,s}(u)$$

sólo es posible si $q \leq 1$, $s = \infty$, en cuyo caso la condición necesaria y suficiente es $u \in A_1$.

(c) Si $p > 1$ y $0 < q \leq s \leq \infty$, la condición necesaria y suficiente para que se dé la acotación

$$M \,:\, L^{p,q}(u) \longrightarrow L^{p,s}(u)$$

es:

(1) si $q \leq 1$, $s = \infty$: $\quad \frac{u(Q)}{|Q|^p} \leq C\frac{u(E)}{|E|^p}, \quad E \subset Q.$

(2) si $q > 1$ o bien $s < \infty$: $\quad u \in A_p$.

Demostración. (a) Por la Proposición 2.15, la acotación

$$M \,:\, L^{p,q}(u) \longrightarrow L^{r,s}(u) \tag{5.3}$$

implica $s \geq q$. Por otra parte, (5.3) implica $M : L^{p,q}(u) \to L^{r,\infty}(u)$ que es equivalente a $M : \Lambda_u^q(t^{q/p-1}) \to \Lambda_u^{r,\infty}(1)$ y del Corolario 2.10 se sigue

$$\frac{\big(u(Q)\big)^{1/r}}{|Q|} \leq C\frac{\big(u(E)\big)^{1/p}}{|E|}, \qquad E \subset Q. \tag{5.4}$$

Por el teorema de diferenciación de Lebesgue, ha de ser $p \geq 1$. Además, aplicando (5.4) con $E = Q$ se obtiene $\big(u(Q)\big)^{1/r-1/p} \leq C$ y como $u(Q)$ puede tomar cualquier valor en $(0,\infty)$ (Proposición 2.11), se sigue $p = r$.

(b) Como la norma de una función característica en $L^{1,q}$ no depende esencialmente de q, la acotación en (b) implica $\|M\chi_E\|_{L^{1,s}(u)} \leq C\|\chi_E\|_{L^1(u)}$, $E \subset Q$. Si $s < \infty$ del Teorema 3.3 se sigue $M : L^p(u) \to L^p(u)$ con $p < 1$ y, por lo probado en (a) se tiene una contradicción. Por lo tanto ha de ser $s = \infty$. Por otra parte, la acotación $M : L^{1,q}(u) \to L^{1,\infty}(u)$ es la misma que $M : \Lambda_u^q(t^{q-1}) \to \Lambda_u^{q,\infty}(t^{q-1})$ y del Corolario (2.10) se sigue $\frac{u(Q)}{|Q|} \leq C\frac{u(E)}{|E|}$, $E \subset Q$, que es $u \in A_1$. Sabemos que esta condición es suficiente si $q \leq 1$. Por otra parte, del Corolario 4.15 se sigue $t^{q-1} \in B_{q,\infty}$ y esto sólo es posible (véase el Teorema I.6.5) si $q \leq 1$.

(c) Si $q \leq s < \infty$, por el Teorema 3.3 y por interpolación, la acotación $M : L^{p,q}(u) \to L^{p,s}(u)$ es equivalente a $M : L^p(u) \to L^p(u)$ y la condición necesaria y suficiente es $u \in A_p$. En el caso $M : L^{p,q}(u) \to L^{p,\infty}(u)$ (es decir $s = \infty$) se dan dos posibilidades: (i) si $q > 1$ la condición necesaria y suficiente es (véase [CHK]) $u \in A_p$ y (ii) si $q \leq 1$, del Corolario 2.10 se sigue la condición $\frac{u(Q)}{|Q|^p} \leq \frac{u(E)}{|E|^p}$. En [CHK] se prueba que esta condición es suficiente en el caso $q = 1$ y (dado que $L^{p,q} \subset L^{p,1}$ si $q \leq 1$) también lo es en el caso $q \leq 1$. $\square$

Observación 5.5.

(i) El caso $M : L^1(u) \to L^{1,\infty}(u)$ y $M : L^{p,q}(u) \to L^{p,s}(u)$ con $1 < p \leq q \leq s \leq \infty$ fue resuelto por Muckenhoupt en [M], dando lugar a las clases A_p. Chung, Hunt y Kurtz ([CHK], [HK]) resolvieron el caso $M : L^{p,q}(u) \to L^{p,s}(u)$ con $p > 1$, $1 \leq q \leq s \leq \infty$ y Lai ([L]) prueba la necesidad de la condición $p = r$ para tener (5.1).

(ii) Las condiciones obtenidas en los casos correspondientes a desigualdades débiles $(q, s < \infty)$ coinciden con la condición de (4.2) Carro-Soria.

El resultado que sigue caracteriza la acotación

$$M : \Lambda_u^{p_0}(w_0) \to \Lambda_u^{p_1,\infty}(w_1) \tag{5.6}$$

cuando $u(x) = |x|^\alpha$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 5.7. *Sea* $u(x) = |x|^\alpha$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha > -n$.

(a) Si $\alpha \leq 0$, *(5.6) es equivalente a* $(w_0, w_1) \in B_{p_0,p_1,\infty}$.

(b) Si $\alpha > 0$ *se da (5.6) si y sólo si* $(\bar{w}_0, \bar{w}_1) \in B_{p_0,p_1,\infty}$, *donde para cada* $i = 0, 1$,

$$\bar{w}_i(t) = w_i\big(t^{\frac{n+\alpha}{n}}\big)\, t^{\frac{\alpha}{n}}, \qquad t > 0.$$

Demostración. El apartado (a) es consecuencia del Teorema 4.22 ya que $u(x) = |x|^\alpha \in A_1$ si $\alpha \leq 0$. Para probar el apartado (b) se usa la condición del Teorema 4.28 que (por la Observación 4.30.iii) es necesaria y suficiente. La condición final se obtiene haciendo el cambio de variables $t = \bar{t}^{(n+\alpha)/n}$, $r = \bar{r}^{(n+\alpha)/n}$ y comparando las expresiones resultantes con las correspondientes a las clases $B_{p_0,p_1,\infty}$ (Teorema I.6.5). $\square$

Referencias

[Al] G.D. Allen, *Duals of Lorentz spaces*, Pacific J. Math. **77** (1978), 287–291.

[AEP] M.A. Ariño, R. Eldeeb y N.T. Peck, *The Lorentz sequence spaces $d(w,p)$ where w is increasing*, Math. Ann. **282** (1988), 259–266.

[AM1] M.A. Ariño y B. Muckenhoupt, *Maximal functions on classical Lorentz spaces and Hardy's inequality with weights for nonincreasing functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **320** (1990), 727–735.

[AM2] ———, *A characterization of the dual of the classical Lorentz sequence space $d(w,q)$*, Proc. Amer. Math. Soc. **(1)102** (1991), 87–89.

[BPS] S. Barza, L.E. Persson y J. Soria, *Sharp weighted multidimensional integral inequalities for monotone functions* (Aparecerá en Math. Nachr.).

[BS] C. Bennet y R. Sharpley, *Interpolation of operators*, Academic Press, 1988.

[BL] J. Bergh y J. Löfström, *Interpolation spaces. An introduction*, Springer-Verlag, New York, 1976.

[CH] J.R. Calder y J.B. Hill, *A collection of sequence spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **152** (1970), 107–118.

[CGS] M.J. Carro, A. García del Amo y J. Soria, *Weak type weights and normable Lorentz spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 849–857.

[CPSS] M.J. Carro, L. Pick, J. Soria y V. Stepanov, *On embeddings between clasical Lorentz spaces* (preprint).

[CS1] M.J. Carro y J. Soria, *Weighted Lorentz spaces and the Hardy operator*, J. Funct. Anal. **112** (1993), 480 –494.

[CS2] ———, *Boundedness of some integral operators*, Canad. J. Math. **45** (1993), 1155–1166.

[CS3] ———, *The Hardy-Littlewood maximal function and weighted Lorentz spaces*, J. London Math. Soc. **55** (1997), 146–158.

[Ce] J. Cerdà, *Análisis real*, Edicions de la Universitat de Barcelona, 1996.

[CM] J. Cerdà y J. Martín, *Interpolation restricted to decreasing functions and Lorentz spaces* (Aparecerá en Proc. Edinburgh Math. Soc.).

[CR] M. Christ y J.L. Rubio de Francia, *Weak type (1,1) bounds for rough operators (II)*, Invent. Math. **93** (1988), 225–237.

[CHK] H.M. Chung, R.A. Hunt y D.S. Kurtz, *The Hardy-Littlewood maximal function on $L(p,q)$ spaces with weights*, Indiana Univ. Math. J. **31** (1982), 109–120.

[CF] R.R. Coifman y C. Fefferman, *Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals*, Studia Math. **51** (1974), 241–250.

[Cw1] M. Cwikel, *On the conjugates of some function spaces*, Studia Math. **45** (1973), 49–55.

[Cw2] ———, *The dual of weak L^p*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **25(2)** (1975), 81–126.

[CS] M. Cwikel y Y. Sagher, $L(p,\infty)^*$, Indiana Univ. Math. J. **21** (1972), 781–786.

[Du] J. Duoandikoetxea, *Análisis de Fourier*, Addison–Wesley, 1995.

[Fe] R. Fefferman, *A theory of entropy in Fourier analysis*, Adv. Math. **30** (1978), 171–201.

[GR] J. García Cuerva y J.L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*, vol. 46, North-Holland, 1985.

[Ga] A.J.H. Garling, *A class of reflexive symmetric BK-spaces*, Canad. J. Math. **21** (1969), 602–608.

[GHS] M.L. Goldman, H.P. Heinig y V.D. Stepanov, *On the principle of duality in Lorentz spaces*, Canad. J. Math. **48(5)** (1996), 959–979.

[Ha] A. Haaker, *On the conjugate space of Lorentz space*, University of Lund, Lund Institute of Technology, Dept. of Math. (1970).

[HLP] G.H. Hardy, J.E. Littlewood y G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, 1952.

[HM] H. Heinig y L. Maligranda, *Weighted inequalities for monotone and concave functions*, Studia Math. **116** (1995), 133–165.

[Hu] R.A. Hunt, *On L(p,q) spaces*, Enseignement Math. **12** (1966), 249–276.

[HK] R.A. Hunt y D.S. Kurtz, *The Hardy-Littlewood maximal function on* $L(p,1)$, Indiana Univ. Math. J. **32** (1983).

[Ko] G. Köthe, *Topological vector spaces I*, Springer-Verlag, 1969.

[KPS] S.G. Krein, Ju.I. Petunin y E.M. Semenov, *Interpolation of linear operators*, vol. 54, Transl. Math. Monographs, 1982.

[L] Q. Lai, *A note on weighted maximal inequalities*, Proc. Edimburgh Math. Soc. (1996).

[LN1] M.A. Leckband y C.J. Neugebauer, *A general maximal operator and the* A_p*-condition*, Trans. Amer. Math. Soc. **275** (1983), 821–831.

[LN2] ______, *Weighted iterates and variants of the Hardy-Littlewood maximal operator*, Trans. Amer. Math. Soc. **279** (1983), 51–61.

[Lo1] G.G. Lorentz, *Some new functional spaces*, Ann. of Math. **51(2)** (1950), 37–55.

[Lo2] ______, *On the theory of spaces* Λ, Pacific J. Math. **1** (1951), 411–429.

[M] B. Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*, Trans. Amer. Math. Soc **165** (1972), 207–227.

[MW] B. Muckenhoupt y R.L. Wheeden, *Weighted norm inequalities for fractional integrals*, Trans. Amer. Math. Soc **192** (1974), 261–275.

[NO] M. Nawrocki y A. Ortyński, *The Mackey topology and complemented subspaces of Lorentz sequence spaces* $d(w,p)$ *for* $0 < p < 1$, Trans. Amer. Math. Soc. **(2)287** (1985), 713–722.

[Ne1] C.J. Neugebauer, *Weighted norm inequalities for average operators of monotone functions*, Publ. Mat. **35** (1991), 429–447.

[Ne2] ______, *Some classical operators on Lorentz spaces*, Forum Math. **4** (1992), 135–146.

[Po] N. Popa, *Basic sequences and subspaces in Lorentz sequence spaces without local convexity*, Trans. Amer. Math. Soc. **263** (1981), 431–456.

[Re] S. Reiner, *On the duals of Lorentz function and sequence spaces*, Indiana Univ. Math. J. **31(1)** (1982), 65–72.

[Ru1] W. Rudin, *Análisis real y complejo*, 3a edición, McGraw-Hill, 1988.

[Ru2] ______, *Functional analysis*, 2 edición, McGraw-Hill,Inc. International Series in Pure and Applied Mathematics, 1991.

[Sa1] E. Sawyer, *A characterization of a two-weight norm inequality for maximal operator*, Studia Math. **75** (1982), 1–11.

[Sa2] ______, *Boundedness of classical operators on classical Lorentz spaces*, Studia Math. **96** (1990), 145–158.

[SS] G. Sinnamon y V. Stepanov, *The weighted Hardy inequality: new proofs and the case p=1*, J. London Math. Soc. **54** (1996), 89–101.

[SjS] P. Sjögren y F. Soria, *Weak type (1,1) estimates for some extension operators related to rough maximal functions*, Israel J. Math. **95** (1996), 211–229.

[S] F. Soria, *Characterizations of classes of functions generated by blocks and associated Hardy spaces*, Indiana Univ. Math. J. **34** (1985), 463–493.

[So] J. Soria, *Lorentz spaces of weak type*, Quart. J. Math. Oxford **49(2)** (1998), 93–103.

[St] E.M. Stein, *Harmonic analysis. Real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton University Press, 1993.

[StS] E.M. Stein y J.0. Strömberg, *Behavior of maximal functions in* $\mathbb{R}^n$ *for large* n, Ark. Mat. **21** (1983), 259–269.

[SW] E.M. Stein y G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces*, Princeton University Press, 1971.

[Sp1] V. Stepanov, *Integral operators on the cone of monotone functions*, Institute for Applied Mathematics. F-E.B. of the USSR Academy of Sciencies. Khabarovsk (1991) (Report).

[Sp2] ______, *The weighted Hardy's inequality for nonincreasing functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **338** (1993), 173–186.