

# Varietats a la vora del desastre

Àlex Haro

Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi



IEC, 25 de maig de 2012

# Introducció

# La Teoria dels Sistemes Dinàmics

3

El programa de Poincaré

- Els sistemes dinàmics modelitzen processos evolutius.



- L'estudi dels sistemes dinàmics des d'un punt de vista geomètric/qualitatiu fou iniciat pel matemàtic francès Henri Poincaré (1854-1912).
- El comportament a llarg termini d'un sistema dinàmic està organitzat pels seus objectes invariants (equilibris del sistema, òrbites periòdiques, tors invariants, ... i les seves varietats invariants).

# Varietats Invariants

## Estructures robustes

És important:

- entendre quins són els objectes que persisteixen en pertorbar el sistema dinàmic;
- donar resultats d'existència, regularitat i dependència respecte paràmetres;
- classificar les possibles bifurcacions i mecanismes de trencament;
- obtenir algorismes efectius de càlcul per aproximar-los.

# Sistemes dinàmics quasi-periòdics discrets

5

## Aplicacions fibrades sobre rotacions

Les aplicacions fibrades modelitzen sistemes dinàmics dirigits per altres sistemes dinàmics externs.

Considerarem el cas en que el sistema dinàmic extern és una rotació irracional.

[H, de la Llave 06a,06b,07]

### Definició

Un *sistema dinàmic quasi-periòdic discret* està descrit per una aplicació fibrada  $(F, \tau) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^d$ , de la forma

$$\begin{cases} \bar{x} = F(x, \theta) \\ \bar{\theta} = \theta + \omega \pmod{1} \end{cases},$$

on:

- $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$  és de classe  $C^{r+1}$ ,
- $\omega \in \mathbb{R}^d$  satisfà  $\omega \cdot k \notin \mathbb{Z}$  si  $k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ .

# Sistemes dinàmics quasi-periòdics discrets

6

## Tors invariants

### Definició

Un *tor invariant* és un graf

$$\mathcal{K} = \{(K(\theta), \theta) \mid \theta \in \mathbb{T}^d\},$$

on  $K : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$  és una solució de l'*equació d'invariància*

$$F(K(\theta), \theta) - K(\theta + \omega) = 0.$$

Aquest tor és una resposta al forçament quasi-periòdic.

# Sistemes dinàmics quasi-periòdics discrets

7

## Linealització

La **linealització** de la dinàmica al voltant del tor ve donada pel l'endomorfisme  $(M, \tau) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^d$ ,

$$\begin{cases} \bar{v} = M(\theta)v \\ \bar{\theta} = \theta + \omega \end{cases},$$

on  $M(\theta) = D_z F(K(\theta), \theta)$ .

Els fibrats invariants per  $(M, \tau)$  són els ciments per construir varietats invariants asimptòtiques al tor invariant.

# Un exemple dissipatiu



# Un exemple dissipatiu

9

L'aplicació d'Hénon quasi-periòdica

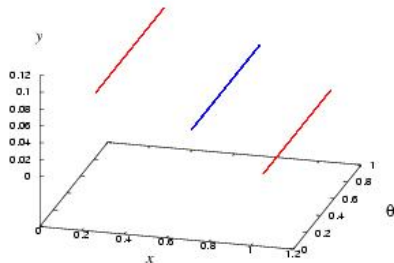
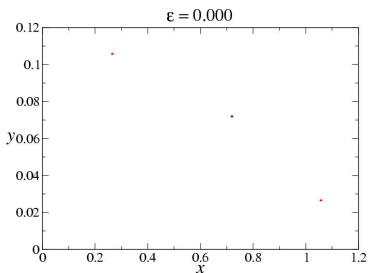
$$\begin{cases} \bar{x} = 1 + y - a x^2 + \varepsilon \cos(2\pi\theta) \\ \bar{y} = b x \\ \bar{\theta} = \theta + \omega \pmod{1} \end{cases}$$

- $a$  és el paràmetre no-lineal ( $a = 0.68$ );
- $b$  és el paràmetre dissipatiu ( $b = 0.1$ );
- $\varepsilon$  és el paràmetre quasi-periòdic;
- $\omega = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$  és la freqüència del forçament.

[Krauskopf,Osinga 98][Feudel,Osinga 00]

# Un exemple dissipatiu

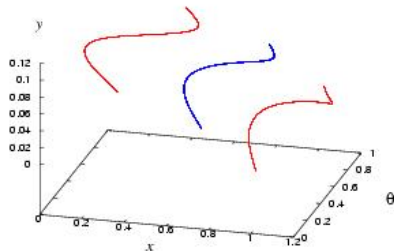
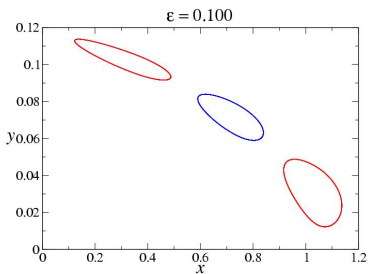
## Corbes invariants



El **punt** fix tipus sella i l' **òrbita** 2-periòdica atractora de l'aplicació d'Hénon ...

# Un exemple dissipatiu

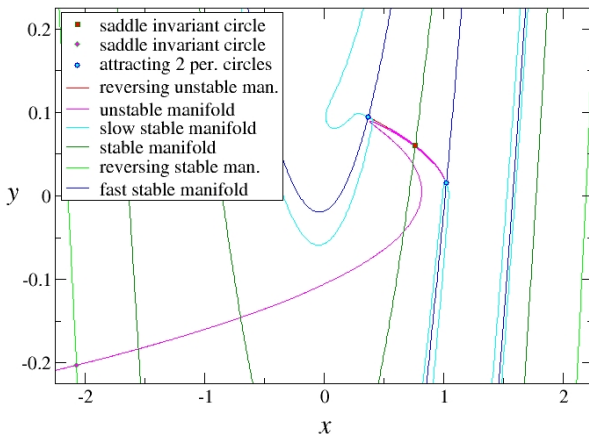
## Corbes invariants



... es converteixen en un **cercle invariant** tipus sella i un **cercle 2-periòdic** per  $\epsilon = 0.100$ .

# Un exemple dissipatiu

## Varietats invariants



Seccions amb  $\theta = 0$  de les varietats invariants, per  $\varepsilon = 0.1$ .

# Un exemple conservatiu

# Un exemple conservatiu

14

Una aplicació estàndard quasi-periòdica

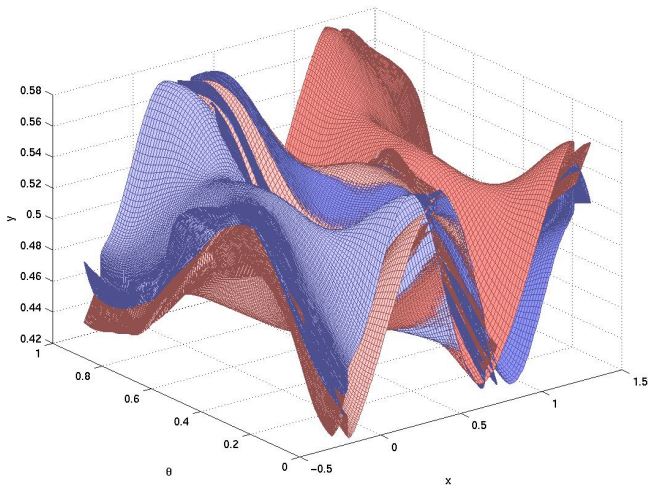
$$\begin{cases} \bar{x} = x + \bar{y} \pmod{1} \\ \bar{y} = y - \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi} (K + \varepsilon \cos(2\pi\theta)) \\ \bar{\theta} = \theta + \omega \pmod{1} \end{cases}$$

- $K$  és el paràmetre de no-integrabilitat ( $K = 0.2$ );
- $\varepsilon$  és el paràmetre quasi-periòdic;
- $\omega = \sqrt[3]{\frac{19}{27} + \sqrt{\frac{11}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{19}{27} - \sqrt{\frac{11}{27}}} - \frac{2}{3}$  és algebraic d'ordre 3.

[Artuso et al 91, Tompaids 96, H 98]

# Un exemple conservatiu

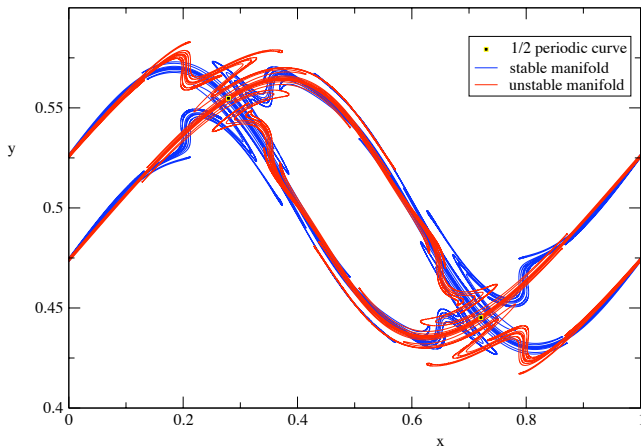
## Varietats invariants



Varietats invariants d'una corba 2-periòdica, per  $\varepsilon = 0.5$

# Un exemple conservatiu

## Varietats invariants

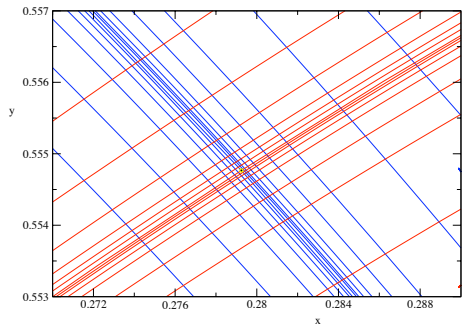
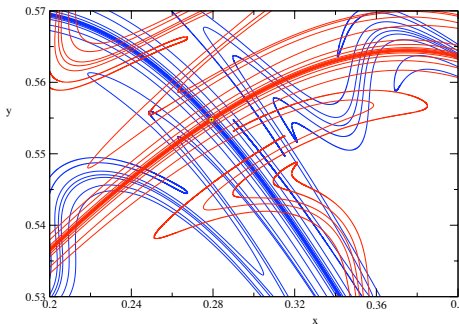


Seccions amb  $\theta = 0$  de les varietats invariants, per  $\varepsilon = 0.5$ .



# Un exemple conservatiu

## Varietats invariants



Seccions amb  $\theta = 0$  de les varietats invariants, per  $\varepsilon = 0.5$ .

# Teoremes

# Tors invariants hiperbòlics

19

## Definició dinàmica

### Definició

Un tor invariant  $K: \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$  és **hiperbòlic** si hi ha una descomposició en suma de Whitney

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^d = E^s \oplus E^u,$$

caracteritzada per  $0 < \lambda < 1 < \mu$  i  $C > 0$  de forma que:

$$(v, \theta) \in E^s \Leftrightarrow \forall m > 0 \quad \|M(\tau^{m-1}(\theta)) \dots M(\tau(\theta))M(\theta)v\| < C\lambda^m \|v\|;$$

$$(v, \theta) \in E^u \Leftrightarrow \forall m < 0 \quad \|M(\tau^m(\theta))^{-1} \dots M(\tau^{-1}(\theta))^{-1}v\| < C\mu^m \|v\|.$$

Els fibrats  $E^s$  i  $E^u$  són invariants per la linealització  $(M, \tau)$ .

# Tors invariants hiperbòlics

20

## Definició funcional

### Definició

Un tor invariant  $K: \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$  és **hiperbòlic** si l'operador de transferència  $\mathcal{M}: B(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}^n) \rightarrow B(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}^n)$ , definit per

$$\mathcal{M}v(\theta) = M(\theta - \omega)v(\theta - \omega),$$

és hiperbòlic, és a dir, el seu espectre no interseca la circumferència unitat.

$B(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}^n)$  és l'espai de Banach de funcions acotades. Podem considerar  $\mathcal{M}$  sobre altres espais de Banach.

# Tors invariants hiperbòlics

21

## Equivalència de les definicions

Les **proprietats funcionals** de l'operador de transferència  $\mathcal{M}$  corresponen a **proprietats dinàmiques** de la linealització  $(M, \tau)$ .

Mather, Hirsch, Pugh, Shub, Mañé, Chicone, Swanson, Latushkin, de la Llave, ...

Siguin  $\Pi^s, \Pi^u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^d$  les projeccions sobre  $E^s, E^u$ .  
Escrivim:  $\Pi^s(v, \theta) = (\pi_\theta^s(v), \theta)$ ,  $\Pi^u(v, \theta) = (\pi_\theta^u(v), \theta)$

Siguin  $\mathcal{P}^s, \mathcal{P}^u : \mathcal{B}(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}^n)$  les projeccions de Riesz associades a  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  i  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ .

Llavors per a tot  $v \in \mathcal{B}(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}^n)$ ,

$$\boxed{(\mathcal{P}^s v)(\theta) = \pi_\theta^s(v(\theta))}, \quad \boxed{(\mathcal{P}^u v)(\theta) = \pi_\theta^u(v(\theta))}.$$

# Tors invariants hiperbòlics

22

Teorema d'existència i persistència

## Teorema

Sigui  $F$  de classe  $C^{r+1}$  i  $K$  de  $C^r$ . Suposem que:

- $K$  és una **solució aproximada** de l'equació invariància:

$$\|F(K(\theta - \omega), \theta - \omega) - K(\theta)\|_{C^r} \leq \varepsilon.$$

- $1$  està a la resolvent de l'**operador de transferència**  $\mathcal{M}$  sobre  $B(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}^n)$  (i.e.  $\mathcal{M} - I$  és invertible).

Llavors, si  $\varepsilon$  és prou petit:

- 1 Hi ha un tor invariant  $K_F$ , i  $\|K - K_F\|_{C^r} \leq c\varepsilon$ .
- 2 L'aplicació  $F \rightarrow K_F$  és  $C^1$  de  $C^{r+1}$  a  $C^r$ .
- 3 El tor  $K_F$  és  $C^{r+1}$ .

A més, el tor  $K_F$  és **hiperbòlic**.

# Tors invariants hiperbòlics

23

## Comentaris

- L'espectre de l'operador de transferència és rotacionalment invariant:  $\mathcal{M}_\omega$  és una unió finita d'**anells espectrals**. A cada anell li correspon un fibrat invariant.  
(Per gairebé qualsevol dinàmica a la base [Mather]).
- **L'espectre és independent de l'espai de seccions!**  $(B, C^0, C^r)$   
(Per dinàmica rotacional a la base [H, de la Llave].)
- Que 1 no estigui a l'espectre en  $B(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}^n)$  és equivalent a dir que l'operador de transferència és hiperbòlic en  $C^r(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}^n)$ .
- S'aplica el teorema de la funció implícita en espais de Banach.
- S'obté un tor invariant  $K_F$  de classe  $C^r$ , però de fet és tan diferenciable com  $F$  (bootstrap).

# Algorismes



# Mètode de Newton

25

## Un pas

Un pas del mètode de Newton consisteix en, donada una solució aproximada  $K$ :

- Calcular l'error:

$$F(K(\theta - \omega), \theta - \omega) - K(\theta) = R(\theta).$$

- Calcular la correcció  $\Delta$ , resolent l'equació lineal:

$$M(\theta - \omega)\Delta(\theta - \omega) - \Delta(\theta) = -R(\theta).$$

on  $M(\theta) = DF(K(\theta), \theta)$ .

- Calcular la nova solució aproximada:

$$\hat{K}(\theta) = K(\theta) + \Delta(\theta).$$

Una condició suficient és que l'operador de transferència sigui hiperbòlic. En teoria KAM, aquestes equacions es resolen en escales d'espais de Banach.

# Mètode de Newton

26

## Implementació

- Els tors són expandits usant sèries de Fourier.
- La discretització (i truncament) del pas de Newton implica resoldre sistemes lineals, que poden ser molt grans!

Alternatives dinàmiques són:

- Projectar les equacions sobre els fibrats estable i inestable, usant que  $M(\theta)$  és reductible a un morfisme diagonal per blocs,  $\Lambda(\theta) = \text{diag}(\Lambda^s(\theta), \Lambda^u(\theta))$ ;
  - Reduir (si es pot)  $M(\theta)$  a constant  $\Lambda$ , i llavors el pas de Newton és “diagonal” en els modes de Fourier.
- Es poden validar els resultats rigorosament, usant un teorema tipus Newton-Kantorovich [H,de la Llave 06],[Figueras,H 12].

# Exploracions numèriques en un sistema dissipatiu quasi-periòdic

# L'exemple dissipatiu

28

L'aplicació d'Hénon quasi-periòdica

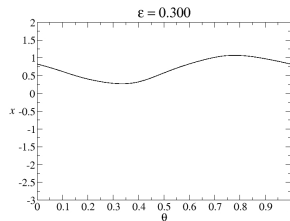
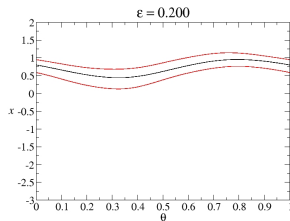
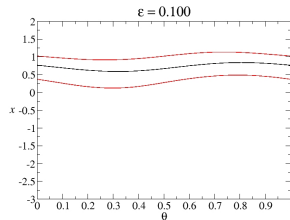
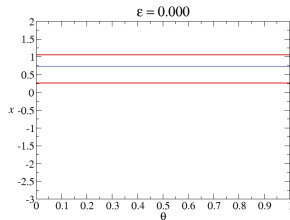
$$\begin{cases} \bar{x} = 1 + y - a x^2 + \varepsilon \cos(2\pi\theta) \\ \bar{y} = b x \\ \bar{\theta} = \theta + \omega \pmod{1} \end{cases}$$

- $a$  és el paràmetre no-lineal ( $a = 0.68$ );
- $b$  és el paràmetre dissipatiu ( $b = 0.1$ );
- $\varepsilon$  és el paràmetre quasi-periòdic;
- $\omega = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$  és la freqüència del forçament.

Farem continuació respecte al paràmetre  $\varepsilon$ .

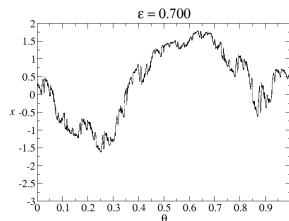
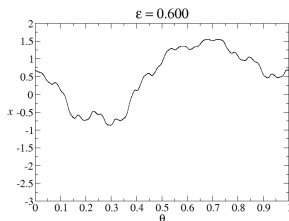
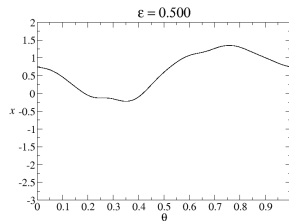
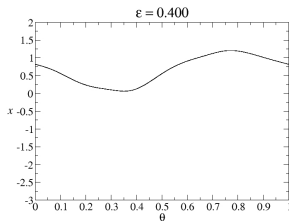
# Continuació d'una corba invariant

(I) "Doblament" de període (de sella a atractor)



# Continuació d'una corba invariant

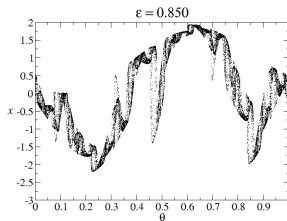
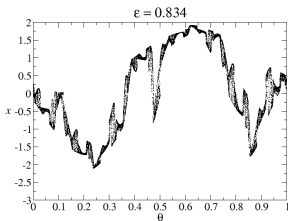
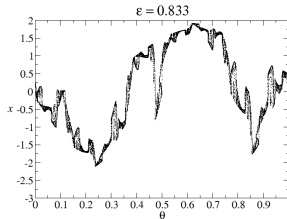
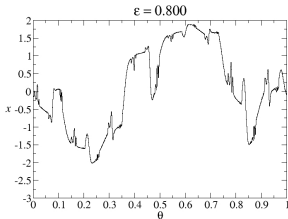
(II) Comença el desastre ...



# Continuació d'una corba invariant

31

## (III) Fractalització i trencament



# Reductibilitat de la corba invariant

Trobat obstruccions ...

32

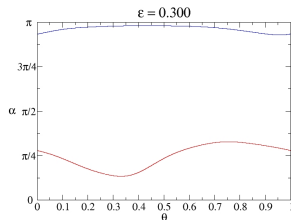
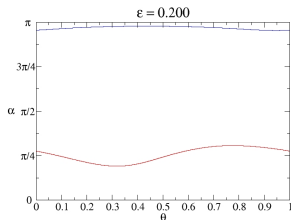
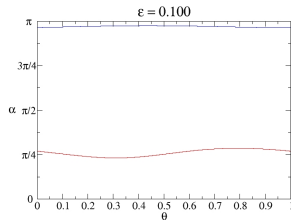
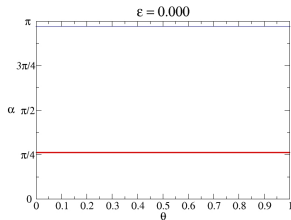
$\varepsilon$	valors propis	error	nfm
0.000	-1.0721039594 , 0.0932745366	9.6e-21	100
0.200	-1.0297559933 , 0.0971103841	8.3e-21	100
0.400	-0.8288693291 , 0.1206462786	9.6e-20	100
0.450	-0.6721643269 , 0.1487731437	9.9e-13	100
0.460	-0.6034304995 , 0.1657191675	2.9e-14	300
0.461	-0.5925812920 , 0.1687532181	2.7e-12	300
0.462	-0.5792054526 , 0.1726503084	2.3e-13	400
0.463	-0.5584521519 , 0.1790663706	9.1e-10	6800

Valors propis de la linealització reduïda a constant de la corba invariant atractora



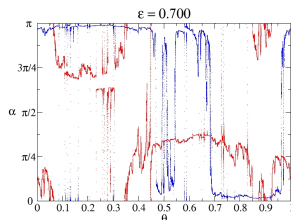
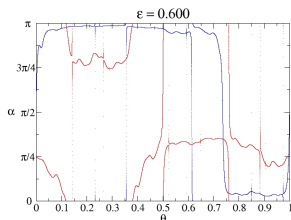
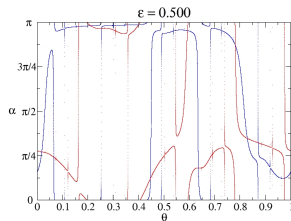
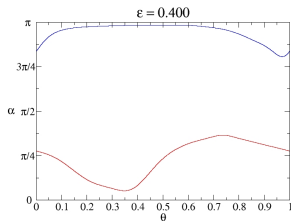
# Continuació de fibrats invariants

(I) El fibrat inestable esdevé un fibrat estable feble



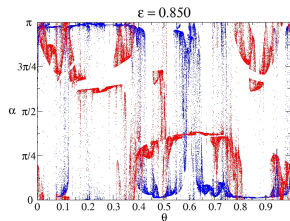
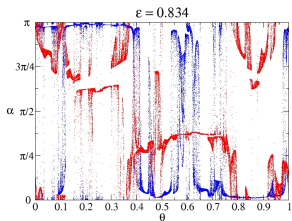
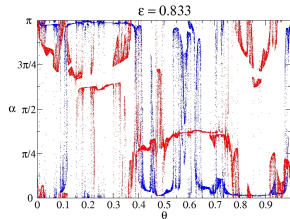
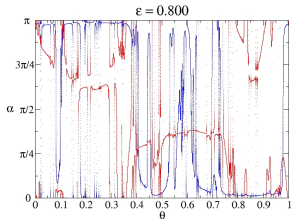
# Continuació de fibrats invariants

## (II) Destrucció dels fibrats invariants



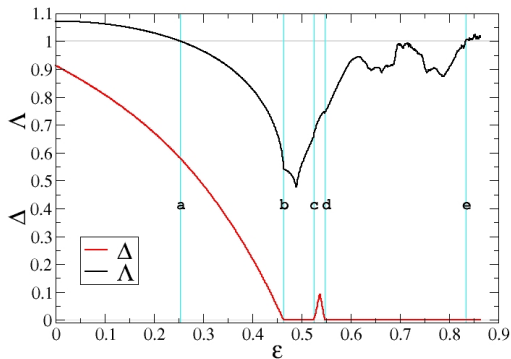
# Continuació de fibrats invariants

## (III) A la vora del desastre



# Diagrama de bifurcacions

Observables:  $\Lambda = \Lambda^+$ ,  $\Delta$



$\Lambda$  = multiplicador de Lyapunov maximal  
= radi espectral

$\Delta$  = angle mínim entre fibrats

- a) **Duplicament de periode**
- b, c, d) **Col.lissió de fibrats estable fort i feble**
- e) **Fractalització** de la corba cap a atractor estrany?

# La bifurcació de col.lisió de fibrats

37

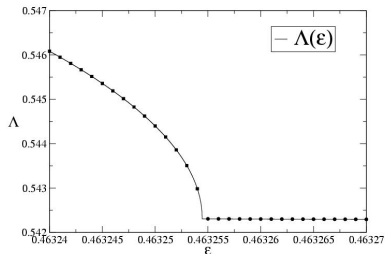
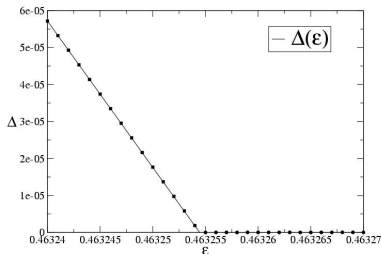
## Descripció i conseqüències

- Els fibrats s'aproximen (de manera no uniforme) quan  $\varepsilon \lesssim \varepsilon_c$ .  
 Els fibrats col.lisionen en un conjunt dens de punts per  $\varepsilon = \varepsilon_c$ .  
 Els multiplicadors de Lyapunov  $\Lambda_\varepsilon^- < \Lambda_\varepsilon^+$  es mantenen diferents.

	$\varepsilon \lesssim \varepsilon_c$	$\varepsilon = \varepsilon_c$
Fibrats invariants	Continus	Mesurables
Espectre	Dos cercles de radis $\Lambda_\varepsilon^\pm$	Un anell de radis $\Lambda_\varepsilon^\pm$
Reductibilitat	Reductible	No reductible
Cas $\Lambda_\varepsilon^- < \Lambda_\varepsilon^+ < 1$	Tor atractor	Persistència
Cas $\Lambda_\varepsilon^- < 1 < \Lambda_\varepsilon^+$	Tor sella	Destrucció

# La bifurcació de col.lisió de fibrats

Universalitat



$$\begin{cases} \Delta_\varepsilon \sim \alpha(\varepsilon_b - \varepsilon)^\beta & \text{if } \varepsilon \lesssim \varepsilon_b \\ \Delta_\varepsilon \approx 0 & \text{if } \varepsilon \gtrsim \varepsilon_b \end{cases}$$

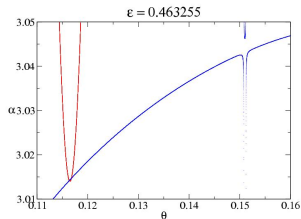
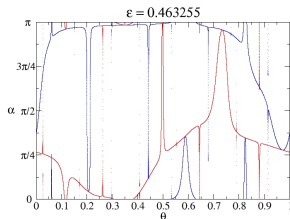
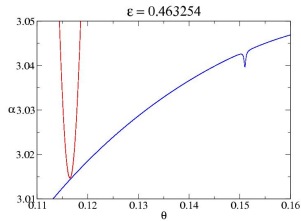
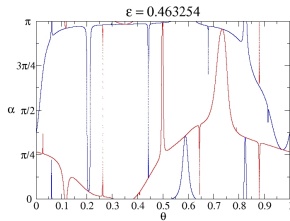
$$\begin{cases} \Lambda_\varepsilon \sim \Lambda_b + A(\varepsilon_b - \varepsilon)^B & \text{if } \varepsilon \lesssim \varepsilon_b \\ \Lambda_\varepsilon \approx \Lambda_b + \bar{A}(\varepsilon - \varepsilon_b)^{\bar{B}} & \text{if } \varepsilon \gtrsim \varepsilon_b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_b &= 0.46325447112 \\ \alpha &= 3.94933 \\ \beta &= 0.999979 \approx 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_b &= 0.5423122 \\ A &= 1.015 \\ B &= 0.5020 \approx 0.5 \\ \bar{A} &= -0.7409 \\ \bar{B} &= 1.00035 \approx 1 \end{aligned}$$

# Col·lisió de fibrats

## Visualització



Projectivització dels fibrats estables **feble** i **fort**, i visualització d'una col·lisió.

# Col·lisió de fibrats

40

Una justificació analítica i topològica

- Per  $\varepsilon = 0.460$ , la linealització es pot reduir a la matriu constant

$$\text{diag}(-0.6034304995, 0.1657191675).$$

- Per  $\varepsilon = 0.530$ , la linealització es pot reduir a la matriu constant

$$\text{diag}(0.6945467500, -0.1439787890).$$

- Com els multiplicadors de Lyapunov es mantenen diferents,

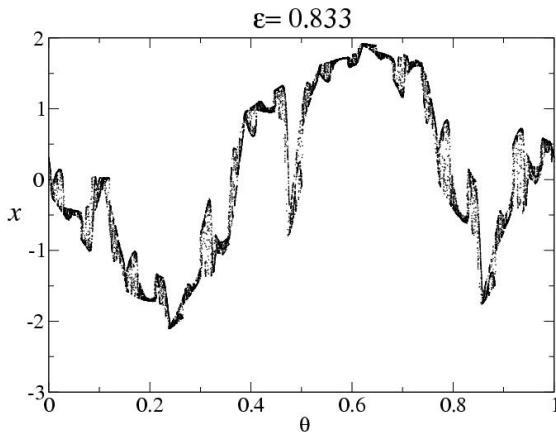
*la linealització no pot ser reductible durant la continuació!*



# A la vora del desastre!

Ampliacions successives de l'atractor

41

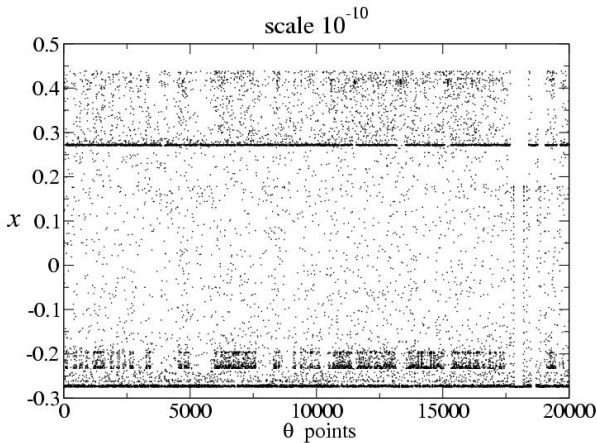


Es això un atractor no caòtic extrany?

# A la vora del desastre!

Ampliacions successives de l'atractor

42

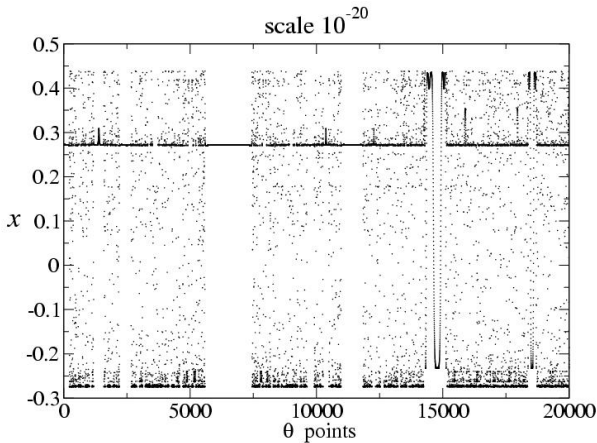


Seguint a Carles Simó, fem ampliacions ...

# A la vora del desastre!

Ampliacions successives de l'atractor

43

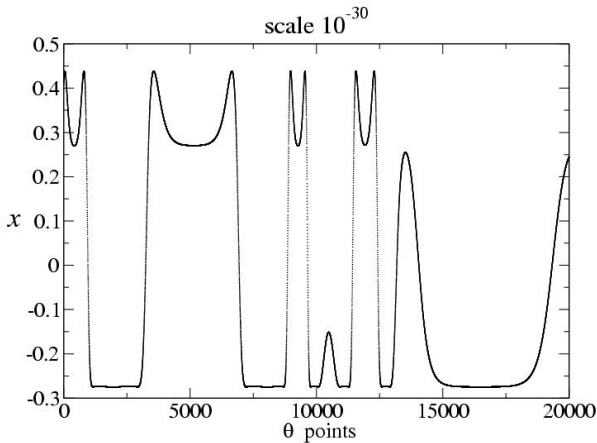


i més ampliacions ...

# A la vora del desastre!

Ampliacions successives de l'atractor

44



i obtenim una corba analítica amb pendents  $> 10^{30}$ !

# Dels experiments numèrics

45

## Ruta de fractalització

La col·lisió de fibrats produeix un creixement sobtat de l'espectre de l'operador de transferència, però aquest roman hiperbòlic.

Hi ha relacions d'escala d'observables que són universals.

Veure [Bjerklov, Saprykina 08] per algunes proves.

El fenomen és el preludi de la destrucció del tor.

**Conjectura:** El tor es destrueix quan el radi espectral creua 1.

Veure [Figueras] (tesis) per una fractalització d'un tor sella en 3D.

# Exploracions numèriques en un sistema conservatiu quasi-periòdic

# L'exemple conservatiu

47

L'aplicació estàndard quasi-periòdica

$$\begin{cases} \bar{x} = x + \bar{y} \pmod{1} \\ \bar{y} = y - \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi} (K + \varepsilon \cos(2\pi\theta)) \\ \bar{\theta} = \theta + \omega \pmod{1} \end{cases}$$

- $K$  és el paràmetre de no-integrabilitat ( $K = 0.2$ );
- $\varepsilon$  és el paràmetre quasi-periòdic;
- $\omega = \sqrt[3]{\frac{19}{27} + \sqrt{\frac{11}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{19}{27} - \sqrt{\frac{11}{27}}} - \frac{2}{3}$ .

Farem continuació respecte al paràmetre  $\varepsilon$ .

# Bifurcations en ressonància

48

Continuació d'un tor el·líptic

$\varepsilon$	valors propis	error	nfm
0.010	$\exp(\pm 0.4513209919 i)$	1.6e-19	100
0.030	$\exp(\pm 0.4537325863 i)$	3.5e-19	100
0.050	$\exp(\pm 0.4589178272 i)$	2.1e-19	100
0.070	$\exp(\pm 0.4679895639 i)$	5.0e-19	100
0.090	$\exp(\pm 0.4857579944 i)$	8.4e-19	100
0.096	$\exp(\pm 0.5003407232 i)$	4.3e-18	100
0.09625	$\exp(\pm 0.5024691304 i)$	6.7e-18	100
$\varepsilon_r$	$\exp(\pm 0.5048955423 i)$	5.5e-10	450

Valors propis de la linealització reduïda a constant del tor  $\{x = 0, y = 0\}$

La teoria és KAM. Veure [Jorba, Simó 92].



# Bifurcations en ressonància

49

## Detecció de la ressonància

- Per  $\varepsilon = \varepsilon_r \simeq 0.09634888517236193761$ 
  - la **freqüència interna**  $\alpha \simeq 0.50489554233135677542$
  - la **freqüència externa**  $\omega \simeq 0.83928675521416126683$

ressonen

$$\left| \frac{\alpha}{2\pi} - \frac{k_1 + k_2\omega}{2} \right| \simeq 1.1 \cdot 10^{-9},$$

per  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = -1$ .

- Podem millorar la reductibilitat, usant transformacions que s'adaptin a la ressonància, per poder creuar-la.

[Moser-Pöschel 86]

- Després de la bifurcació, el tor és hiperbòlic (sella). A més:
  - Com  $k_1 = 1$  és senar, els valors propis són negatius.
  - Com  $k_2 = -1$  és senar, els fibrats invariant són no-orientables.

# Bifurcacions en ressonància

50

Creuant la ressonància

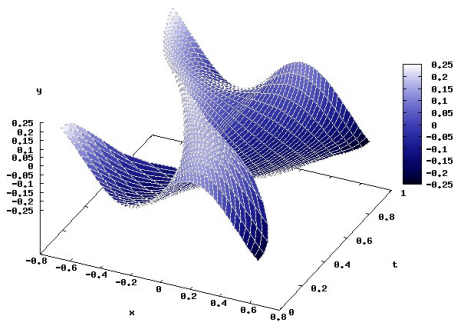
$\varepsilon$	eigenvalues	error	nfm
0.010	$\exp(\pm 0.4513209918i)$	7.7e-20	100
0.030	$\exp(\pm 0.4537325863i)$	1.6e-19	100
0.050	$\exp(\pm 3.0956149315i)$	5.1e-10	100
0.070	$\exp(\pm 3.1046866683i)$	5.2e-19	100
0.090	$\exp(\pm 3.1224550988i)$	3.8e-19	100
0.100	-0.985229910 , -1.0149915151	3.0e-19	100
0.300	-0.859755912 , -1.1631208182	4.6e-19	100
0.500	-0.784499412 , -1.2746982141	3.7e-19	100

Valor propis de la linealització reduïda a constant del tor  $\{x = 0, y = 0\}$

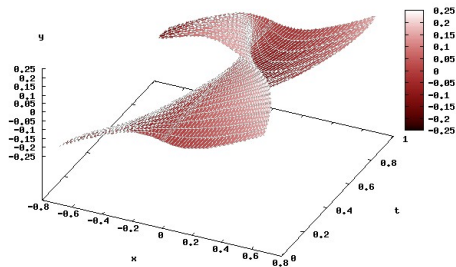
# Bifurcations en ressonància

Creació de varietats no-orientables

51



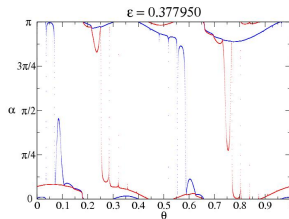
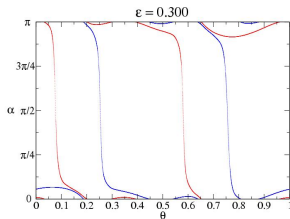
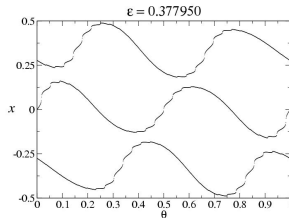
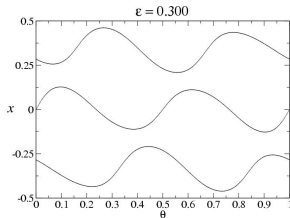
Varietat estable



Varietat inestable

# Un tor sella 3-periòdic, a la vora del desastre

Col·lisió de fibrats estable i inestable



# La bifurcació de col.lisió de fibrats

## Descripció i conseqüències

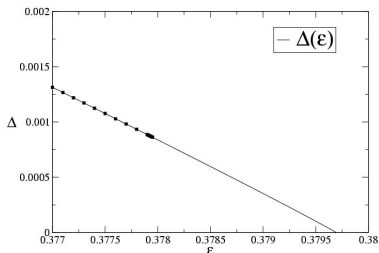
- Els fibrats s'aproximen (de manera no uniforme) quan  $\varepsilon \lesssim \varepsilon_c$ .
- Els fibrats col.lisionen en un conjunt dens de punts per  $\varepsilon = \varepsilon_c$ .
- Els multiplicadors de Lyapunov  $\Lambda_\varepsilon^- < \Lambda_\varepsilon^+$  es mantenen diferents.

	$\varepsilon \lesssim \varepsilon_c$	$\varepsilon = \varepsilon_c$
Fibrats invariants	Continus	Mesurables
Espectre	Dos cercles de radis $\Lambda_\varepsilon^\pm$	Un anell de radis $\Lambda_\varepsilon^\pm$
Reductibilitat	Reductible	No reductible
Cas $\Lambda_\varepsilon^- < \Lambda_\varepsilon^+ < 1$	Tor atractor	Persistència
Cas $\Lambda_\varepsilon^- < 1 < \Lambda_\varepsilon^+$	Tor sella	Destrucció

# La bifurcació de col.lisió de fibrats

54

Universalitat

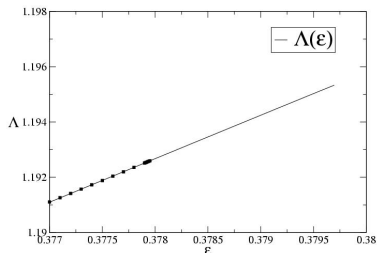


$$\Delta_\varepsilon \sim \alpha(\varepsilon_c - \varepsilon)^\beta \text{ if } \varepsilon \lesssim \varepsilon_c$$

$$\varepsilon_c = 0.3796965$$

$$\alpha = 0.4063$$

$$\beta = 0.9693 \approx 1$$



$$\Lambda_\varepsilon \sim \Lambda_c + A(\varepsilon_c - \varepsilon)^B \text{ if } \varepsilon \lesssim \varepsilon_c$$

$$\Lambda_c = 1.19533$$

$$A = -1.6$$

$$B = 1.00 \approx 1$$

# Dels experiments numèrics

55

## Ruta de destrucció

La col·lisió de fibrats produeix un creixement sobtat de l'espectre de l'operador de transferència, i aquest deixa de ser hiperbòlic.

Hi ha relacions d'escala dels observables que són universals.

Proves?

El fenomen destrueix el tor sella.

**Conjectura:** El tor es destrueix quan l'espectre creix sobtadament, perquè l' $1$  passa a estar a l'interior.

Recentment, s'han observat altres tipus de destrucció de tors quasi-periòdics, en sistemes autònoms:

- En [Calleja, Figueras 12], col·lisió dels fibrats tangent i estable d'un tor atractor en un sistema 2D.
- En [Canadell, H ??], col·lisió dels fibrats tangent i estable d'un tor sella en un sistema 3D; col·lisió triple dels fibrats tangent, estable i inestable d'un tor sella.

# Epíleg

56

De teoremes a algorismes.

D'algorismes a implementacions.

D'implementacions a experiments.

D'experiments a conjectures.

De conjectures, a teoremes?