Aspectos computacionales diversos en EDPs de evolución

B. García-Archilla
(IP: J. Galán Vioque)

Departamento de Matemática Aplicada II
Universidad de Sevilla

COMPUTING (Barcelona 2006)

“Mi” “Grupo”

- MTM2004-02847
  - J. de Frutos (Universidad de Valladolid)
  - J. Novo (Universidad Autónoma de Madrid)
- FIS2004-01066
  - J. Sánchez (Universitat Politècnica de Catalunya)
  - M. Net, (Universitat Politècnica de Catalunya)
- BFM2003-09504-C02-01
  - C. Simó (Universitat de Barcelona)

“Mi” “Grupo”

- MTM2004-02847
  - J. de Frutos (Universidad de Valladolid)
  - J. Novo (Universidad Autónoma de Madrid)
- FIS2004-01066
  - J. Sánchez (Universitat Politècnica de Catalunya)
  - M. Net, (Universitat Politècnica de Catalunya)
- BFM2003-09504-C02-01
  - C. Simó (Universitat de Barcelona)
-
  - J. M. Vega de Prada (Universidad Politécnica de Madrid)
- . . .

Cantidades Conservadas (o casi)

$u(\mathbf{x}, t)$ (“unknown”) densidad

$$u_t + \nabla \cdot \mathbf{g}(u) = 0$$

Cantidades Conservadas (o casi)

$u(\mathbf{x}, t)$ ("unknown") densidad

$$u_t + \nabla \cdot \mathbf{g}(u) = 0$$

- $\mathbf{g}(u) = u\mathbf{v}$ $\quad (\nabla \cdot \mathbf{v} = 0)$: $\quad u_t + \mathbf{v} \cdot \nabla u = 0$

Cantidades Conservadas (o casi)

$u(\mathbf{x}, t)$ ("unknown") densidad

$$u_t + \nabla \cdot \mathbf{g}(u) = 0$$

- $\mathbf{g}(u) = u\mathbf{v}$ $\quad (\nabla \cdot \mathbf{v} = 0)$: $\qquad u_t + \mathbf{v} \cdot \nabla u = 0$
- $\mathbf{g}(u) = -\kappa \nabla u$: $\qquad u_t - \kappa \Delta u = 0$

Cantidades Conservadas (o casi)

$u(\mathbf{x}, t)$ ("unknown") densidad

$$u_t + \nabla \cdot \mathbf{g}(u) = 0$$

- $\mathbf{g}(u) = u\mathbf{v} \qquad (\nabla \cdot \mathbf{v} = 0)$: $\qquad u_t + \mathbf{v} \cdot \nabla u = 0$
- $\mathbf{g}(u) = -\kappa \nabla u$: $\qquad u_t - \kappa \Delta u = f(u)$

Cantidades Conservadas (o casi)

$u(\mathbf{x}, t)$ (“unknown”) densidad

$$u_t + \nabla \cdot \mathbf{g}(u) = 0$$

- $\mathbf{g}(u) = u\mathbf{v} \qquad (\nabla \cdot \mathbf{v} = 0)$: $\qquad u_t + \mathbf{v} \cdot \nabla u = 0$
- $\mathbf{g}(u) = -\kappa \nabla u$: $\qquad \underline{u}_t - D\Delta \underline{u} = \underline{f}(\underline{u})$

Cantidades Conservadas (o casi)

$u(\mathbf{x}, t)$ ("unknown") densidad

$$u_t + \nabla \cdot \mathbf{g}(u) = 0$$

- $\mathbf{g}(u) = u\mathbf{v} \qquad (\nabla \cdot \mathbf{v} = 0)$: $\qquad u_t + \mathbf{v} \cdot \nabla u = 0$
- $\mathbf{g}(u) = -\kappa \nabla u$: $\qquad \underline{u}_t - D\Delta \underline{u} = \underline{f}(\underline{u})$
- $\mathbf{g}(u) = u\mathbf{v} - \kappa \nabla u \qquad (\nabla \cdot \mathbf{v} = 0)$: $\qquad u_t + \mathbf{v} \cdot \nabla u - \kappa \Delta u = f$

Aproximación Numérica

$$\underline{u}_t - \underline{f}(\underline{u}) - D\Delta\underline{u} = 0$$

$$u_t + \mathbf{v} \cdot \nabla u - \kappa\Delta u = f,$$

Aproximación Numérica

$$\left.\begin{array}{l} \underline{u}_t - \underline{f}(\underline{u}) - D\Delta\underline{u} = 0 \\[2em] u_t + \mathbf{v}\cdot\nabla u - \kappa\Delta u = f, \end{array}\right\} \qquad u_t + R(u) + \kappa A u = f$$

Aproximación Numérica

$$\left.\begin{aligned} &\underline{u}_t - \underline{f}(\underline{u}) - D\Delta \underline{u} = 0 \\ &u_t + \mathbf{v}\cdot\nabla u - \kappa\Delta u = f, \end{aligned}\right\} \qquad u_t + R(u) + \kappa A u = f$$

$$\dot{u}_h + R_h(u_h) + \kappa A_h u_h = f_h$$

- $u_h \approx u$ (E. Finitos, D. Finitas, M. Espectral, etc)

Aproximación Numérica

$$\left.\begin{array}{l} \underline{u}_t - \underline{f}(\underline{u}) - D\Delta\underline{u} = 0 \\ \\ u_t + \mathbf{v}\cdot\nabla u - \kappa\Delta u = f, \end{array}\right\} \qquad u_t + R(u) + \kappa A u = f$$

$$\dot{u}_h + R_h(u_h) + \kappa A_h u_h = f_h$$

- $u_h \approx u$ (E. Finitos, D. Finitas, M. Espectral, etc)
- $h \in (0, h_0]$
- Sistema(s) de ODEs

Aproximación Numérica

$$\left.\begin{array}{l} \underline{u}_t - \underline{f}(\underline{u}) - D\Delta \underline{u} = 0 \\ \\ u_t + \mathbf{v}\cdot\nabla u - \kappa\Delta u = f, \end{array}\right\} \qquad u_t + R(u) + \kappa A u = f$$

$$\dot{u}_h + R_h(u_h) + \kappa A_h u_h = f_h$$

- $u_h \approx u$ (E. Finitos, D. Finitas, M. Espectral, etc)
- $h \in (0, h_0]$
- Sistema(s) de ODEs, pero
  - sin constante de Lipschitz cuando $h \to 0$
  - de dimensión grande
  - costosos (o imposibles) de integrar

Elementos de Dos Mundos Aparte

$$\dot{u}_h + R_h(u_h) + \epsilon A_h u_h = f_h$$

- Aproximación numérica de ODEs $\quad y' = f(t, y)$
  - Métodos sofisticados, robustos, eficientes.
  - error $y(t_n) - y_n$ pequeño y a bajo costo
- Approximación numérica de problemas elípticos $\quad -\Delta u = f$
  - Solución rápida de $A_h u_h = f_h$
  - Métodos adaptados robustos.

Elementos de Dos Mundos Aparte (en Realidad de 3)

$$\dot{u}_h + R_h(u_h) + \epsilon A_h u_h = f_h$$

- Aproximación numérica de ODEs $\quad y' = f(t, y)$
  - Métodos sofisticados, robustos, eficientes.
  - error $y(t_n) - y_n$ pequeño y a bajo costo
- Approximación numérica de problemas elípticos $\quad -\Delta u = f$
  - Solución rápida de $A_h u_h = f_h$
  - Métodos adaptados robustos.
- Approx. numér. de leyes de conservación $\quad u_t + \nabla \cdot \mathbf{g}(u) = 0$
  - Límite $\quad \epsilon \to 0 \quad$ de $\quad u_t + \mathbf{v} \cdot \nabla v - \epsilon \Delta u = 0$

Con J. de Frutos y J. Novo: Postproceso

$$u_t + R(u) - \epsilon A u = f$$

Con J. de Frutos y J. Novo: Postproceso

$$u_t + R(u) - \epsilon A u = f$$

$$-\epsilon A u = f - u_t - R(u)$$

Con J. de Frutos y J. Novo: Postproceso

$$u_t + R(u) - \epsilon A u = f \qquad \approx \qquad \dot{u}_h + R_h(u_h) + \epsilon A_h u_h = f_h$$

$$-\epsilon A u = f - u_t - R(u)$$

Con J. de Frutos y J. Novo: Postproceso

$$u_t + R(u) - \epsilon A u = f \qquad \approx \qquad \dot{u}_h + R_h(u_h) + \epsilon A_h u_h = f_h$$

$$-\epsilon A u = f - u_t - R(u)$$

$$-\epsilon A \tilde{u} = f - \dot{u}_h - R(u_h)$$

Con J. de Frutos y J. Novo: Postproceso

$$u_t + R(u) - \epsilon A u = f \qquad \approx \qquad \dot{u}_h + R_h(u_h) + \epsilon A_h u_h = f_h$$

$$-\epsilon A u = f - u_t - R(u)$$

$$-\epsilon A \tilde{u} = f - \dot{u}_h - R(u_h)$$

$$\left\| u - \tilde{u} \right\| \ll \| u - u_h \|$$

Con J. de Frutos y J. Novo: Postproceso

$$u_t + R(u) - \epsilon A u = f \qquad \approx \qquad \dot{u}_h + R_h(u_h) + \epsilon A_h u_h = f_h$$

$$-\epsilon A u = f - u_t - R(u)$$

$$-\epsilon A \tilde{u} = f - \dot{u}_h - R(u_h)$$

$$\|u - \tilde{u}\| \ll \|u - u_h\|$$

En curso:

- Estimadores de error a posteriori
- Estabilización en cuando $\epsilon \ll 1$

Convección térmica en una corona esférica en rotación

Incógnitas

- T temperatura
- $\mathbf{v}$ velocidad del fluido

$$\rho_0 \left(\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\, \mathbf{v} + 2\Omega \times \mathbf{v} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r})\right) = \mu \Delta \mathbf{v} - \nabla p + \rho \mathbf{g}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

$$\partial_t T + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \kappa \Delta T. \quad (3)$$

Leyenda:

- Ω velocidad angular
- μ viscosidad
- $\mathbf{g} = -\gamma \mathbf{r}$ campo gravitatorio
- $\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0))$ densidad
- κ, α, conductividad y expansión térmicas

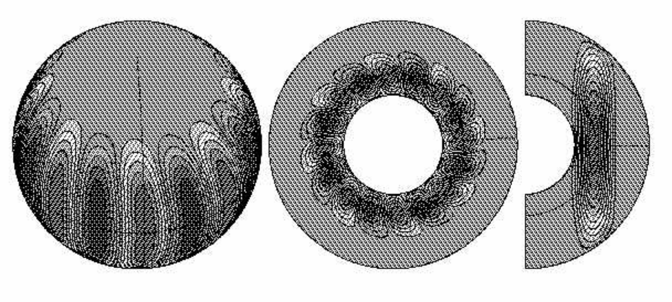
Con J. Sánchez y M. Net

Estado conductivo $\mathbf{v} = 0$, $\qquad T_c(r) = T_0 + \gamma r^2 + \delta / r$

Con J. Sánchez y M. Net

Estado conductivo $\mathbf{v} = 0$, $\qquad T_c(r) = T_0 + \gamma r^2 + \delta / r$

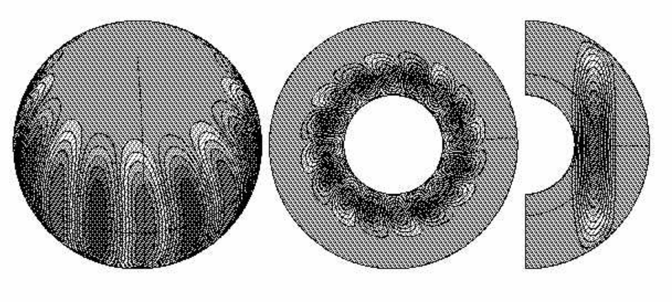
Inestable cuando $T_i - T_o$ crece



Con J. Sánchez y M. Net

Estado conductivo $\mathbf{v} = 0$, $\quad T_c(r) = T_0 + \gamma r^2 + \delta / r$

Inestable cuando $T_i - T_o$ crece



Desarrollo de integrador eficiente (incluido el álgebra lineal)

Necesidades

- Gente joven matemáticamente bien formada y con interés en Computación
- De computación
  - Renovación de equipos existentes
  - Acceso ocasional (o no tan ocasional) a grandes equipos

Necesidades (y Propuestas)

- Gente joven matemáticamente bien formada y con interés en Computación
- De computación
  - Renovación de equipos existentes
  - Acceso ocasional (o no tan ocasional) a grandes equipos
- Sugerencia
  - Cursos más básicos pero con visión más global