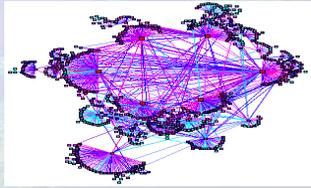


Grandes redes tolerantes a fallos: nuevos modelos, diseño, análisis y algoritmos.

MEC-TEC2005-03575 (12/2005 a: 12/2008)

Investigadores: 10 TC

Importe: 83.300 €



<http://www.caida.org/tools/visualization/plankton/>

IP: **Francesc Comellas**
Dep. de Matemàtica Aplicada IV,

francesc.comellas@upc.edu
Universitat Politècnica de Catalunya



Combinatoria, teoria de grafos y aplicaciones
(MA Fiol, JLA Yebra, J Fabrega, O Serra)

22 investigadores, 6 doctorandos.

37 tesis desde 1982 http://www-ma4.upc.es/grup_de_grafs/

20 profesores visitantes en los 2 ultimos años

Teoria de grafos y topologia de redes

- Grandes grafos: Diseño de grandes redes de interconexión
- Redes tolerantes a fallos.
- Parámetros: caminos, conectividad, expansión etc.
- Redes mundo-pequeño e invariantes de escala

Teoria algebraica de grafos

- Espectro. Digrafos debilmente distancia regulares.

Comunicación en grafos

- Algoritmos de enrutamiento y vulnerabilidad
- Redes simétricas (grafos de Cayley)
- Métodos de optimización combinatorica (*simulated annealing*, algoritmos genéticos, multiagente)

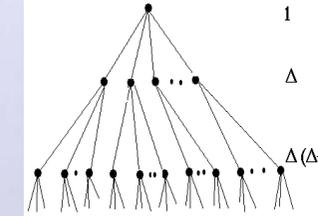
Grandes grafos y digrafos.

Problema (Δ,D) o grado-diámetro

Construcción de grafos con el máximo número de vértices, fijados el grado y el diámetro.

$$1 + \Delta + \Delta(\Delta - 1) + \dots + \Delta(\Delta - 1)^{D-1} = \frac{\Delta(\Delta - 1)^D - 2}{\Delta - 2} = N(\Delta, D)$$

Solo se alcanza para $D=2$ y $D=3, 7$ y 57 (?)



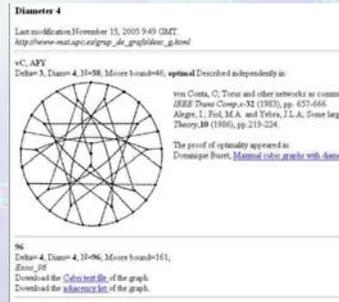
Problema grado-diámetro (Δ,D)

Tabla referenciada, recurso EJC. Desde 1994

http://www-mat.upc.es/grup_de_grafs/grafs/taula_delta_d.html

LARGEST KNOWN (Δ,D)-GRAPHS (September 2006)

Δ \ D	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	10	20	38	70	132	192	330	576	1 250
4	15	41	96	364	740	1 296	3 243	7 575	17 704
5	24	72	210	624	2 272	5 516	17 030	53 352	164 720
6	32	110	390	1 404	3 917	10 282	25 157	295 025	1 212 117
7	50	168	672	2 756	11 988	52 768	233 700	1 124 990	5 311 572
8	57	253	1 100	5 060	20 675	130 017	714 010	4 039 704	17 823 532
9	74	585	1 550	8 200	35 803	270 192	1 485 498	10 423 212	51 466 244
10	91	650	2 223	13 140	63 690	561 957	4 019 736	17 304 400	104 058 822
11	104	715	3 200	18 700	156 864	971 028	5 941 864	62 932 488	250 108 668
12	133	831	4 680	29 470	359 775	1 900 464	10 423 212	104 058 822	600 105 100
13	162	1 074	6 560	39 576	531 440	2 901 404	17 823 532	180 002 475	1 050 104 118
14	183	1 296	8 200	56 790	816 200	6 200 460	41 894 424	450 103 770	2 050 103 984
15	186	1 215	11 712	74 208	1 417 248	8 079 298	90 001 236	900 207 542	4 149 702 144
16	198	1 600	14 640	132 496	1 771 560	14 882 658	104 518 518	1 400 103 920	7 394 669 856

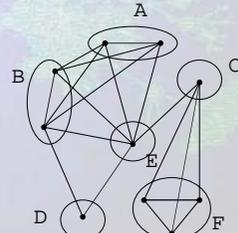
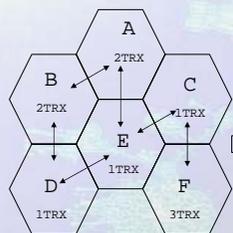


57 67 24 88
58 68 25 89
59 69 26 90
60 70 27 91
61 71 28 92
62 72 29 93
63 73 30 94
64 74 31 95
65 75 32 96
66 76 33 97
67 77 34 98
68 78 35 99
69 79 36 100
70 79 36 100
71 80 37 101
72 81 38 102
73 82 39 103
74 83 40 104
75 84 41 105
76 85 42 106
77 86 43 107
78 87 44 108
79 88 45 109
80 89 46 110
81 90 47 111
82 91 48 112
83 92 49 113
84 93 50 114
85 94 51 115
86 95 52 116
87 96 53 117
88 97 54 118
89 98 55 119
90 99 56 120

Algoritmos para optimización combinatoria en grafos

Asignación de frecuencias

Coloreado de grafos



Problema NP-completo

Algoritmo genético

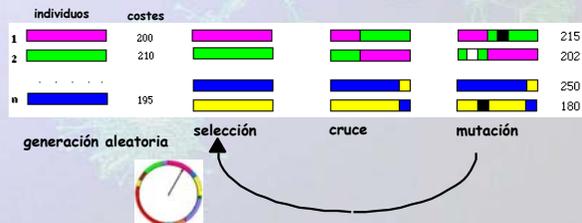
Individuo (posible solución)

grafo

012011201020110211012111210120

función de coste $f(G)=175$

MECANISMO DE UN ALGORITMO GENÉTICO



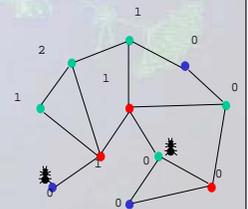
Algoritmo multi-agente hormigas

• Inicialización:

- Se asignan los colores (aleatoriamente)
- Se distribuyen las hormigas (aleatoriamente)
- Se inicializa la función de coste

• Ejecución (cada hormiga):

- Moverse al peor nodo vecino (p_n)
- Cambiar color por mejor color (p_c)



Simulated annealing

1. Generar aleatoriamente una solución inicial. Fijar T_0
2. Repetir N_k veces.

Modificar ligeramente la solución y calcular la *función de coste*.
 Guardarla si es mejor.
 Si es mejor, aceptarla como nueva solución.
 Si es peor, aceptarla solamente si

$$\frac{e^{-\Delta f}}{K T_k} < \text{rand}()$$

3. Disminuir T_k y repetir 2 hasta que $T_k < T_{\min}$

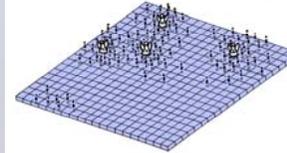
Parámetros importantes que deben ajustarse:
 T_0 , N_k , y tasa de enfriamiento.

Angeles & Mortales : algoritmo

Fijar **MaxGeneraciones**.

Inicializar un mundo $n \times m$ con A ángeles y M mortales.
 Asociar una **solución aleatoria** a cada mortal.
 Asignar la duración de la vida a cada mortal (según el coste o fitness).
 Repetir

Buscar el mejor mortal.
 Si es la solución **salir**.
 Disminuir los contadores de vida.
 Eliminar mortales (la **guadaña**!).
 Mover aleatoriamente todos los ángeles y mortales a una celda vecina.
 Clonar los mortales que están a tocar de ángeles (O bien **extender su vida**)
 Mutar mortales.
 Recalcular costes y asignar nueva vida.
 Hasta **MaxGeneraciones**



Contrato con Airtel (Vodafone)



Desarrollo de software basado en resultados de teoría de grafos y algoritmos de optimización (simulated annealing, hormigas) para la asignación de frecuencias en telefonía móvil.

Modelado de grandes redes reales

Grafos mundo-pequeño e invariantes de escala

Fractalidad en grafos.

Internet

WWW

Rutas aéreas

Red eléctrica

C. Elegans

Número de Erdős

Proteínas

Sistemas complejos

Elementos distintos (nodos)
 Interacción entre elementos (enlaces)

Redes complejas

Modelo matemático: **Teoría de Grafos**

Las redes reales, en general, son

Grandes (enormes)

Small-world

diametro pequeño $\log(|V|)$, clustering grande

Scale-free

grados según distribución potencial ("hubs")

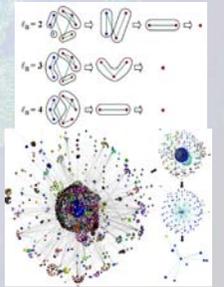
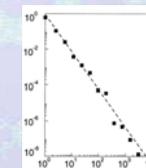
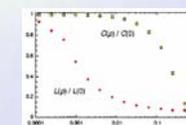
Autosimilares / fractal

Modelos deterministas

Basados en cliques

(grafos jerarquicos, árboles de cliques recursivos, grafos Apolonios)

La mayoría de redes "reales" son mundo-pequeño invariables de autosimilares (small-world) escala (scale-free) (self-similar)



Diámetro pequeño

Milgram 1967

Apilamiento (clustered)

Watts & Strogatz 1998

Grados según ley potencial

Barabási & Albert 1999

Fractales

Song, Havlin & Makse 2005,

2006

Propiedades relevantes de una red real



Apilamiento (clustering)

$$C(v) = \frac{\# \text{ enlaces entre vecinos}}{n(n-1)/2}$$

Diámetro o distancia media

Retraso máximo en las comunicaciones

Distribución de grados

Robustez de la red

Las redes reales presentan **apilamiento** $C(p)$ grande, junto con una **distancia media** $L(p)$ pequeña. Muy a menudo son también **fractales o invariantes de escala (scale-free)**

	L	L _{rand}	C	C _{rand}	N
Internet AS	3.1	3.35	0.11	0.00023	153127
Actores	3.65	2.99	0.79	0.00027	225226
Red eléctrica	18.7	12.4	0.080	0.005	4014
C. Elegans	2.65	2.25	0.28	0.05	282

Grafo estructurado

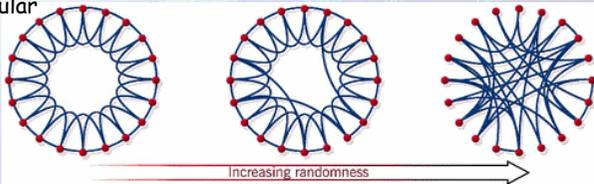
- clustering elevado
- diámetro grande
- regular

Grafo small-world

- clustering elevado
- diámetro pequeño
- casi regular

Grafo aleatorio

- clustering pequeño
- diámetro pequeño

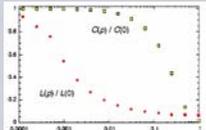


Increasing randomness

$|V|=1000 \Delta=10$
 $D=100 \quad d=49.51$
 $C=0.67$

$|V|=1000 \Delta=8-13$
 $D=14 \quad d=11.1$
 $C=0.63$

$|V|=1000 \Delta=5-18$
 $D=5 \quad d=4.46$
 $C=0.01$



Watts & Strogatz,
 Collective dynamics of "small-world" networks,
 Nature 393, 440-442 (1998)

6 grados de separación!

Stanley Milgram (1967)

160 cartas Omaha -Nebraska- -> Boston



Características mundo-pequeño en redes sociales
 What a **small-world** ! Que pequeño es el mundo.

Redes pequeño-mundo (small-world)

diámetro pequeño (o dist. media)
 apilamiento (clustering) alto

Número de Erdős

<http://www.acs.oakland.edu/~grossman/erdoshp.html>

1- 509
 2- 7494

N= 268.000 Jul 2004
 (component conexas)

$D=23 \quad R=12 \quad D_{avg}=7.64$
 $\delta=1 \quad \Delta=509 \quad \Delta_{avg}=5.37$
 $C=0.14$

-
- Collins, P. J.
- Colwell, Peter
- Comellas, Francis
- Comets, Francis M.
- Comfort, W. Wistar
- Compton, Kevin J.
- Conder, Marston
- Conrey, J. Brian
- CONWAY, JOHN HORTON
- Conze-Berline, Nicole
- Cook, Curtis R.
- Cook, Janice
-

Erdős number 0	---	1 person
Erdős number 1	---	504 people
Erdős number 2	---	6593 people
Erdős number 3	---	33605 people
Erdős number 4	---	83642 people
Erdős number 5	---	87760 people
Erdős number 6	---	40014 people
Erdős number 7	---	11591 people
Erdős number 8	---	3146 people
Erdős number 9	---	819 people
Erdős number 10	---	244 people
Erdős number 11	---	68 people
Erdős number 12	---	23 people
Erdős number 13	---	5 people

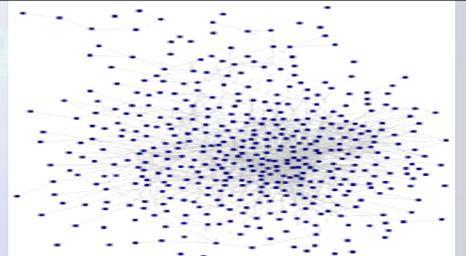
(MathSciNet Jul 2004)

Fields medals

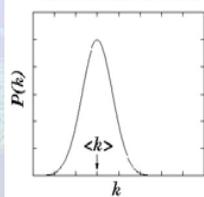
Lars Ahlfors	1936	Finland	4	Alain Connes	1982	France	3
Jesse Douglas	1936	USA	4	William Thurston	1982	USA	3
Laurent Schwartz	1950	France	4	Shing-Tung Yau	1982	China	2
Atle Selberg	1950	Norway	2	Simon Donaldson	1986	Great Britain	4
Kunihiko Kodaira	1954	Japan	2	Gerd Faltings	1986	Germany	4
Jean-Pierre Serre	1954	France	3	Michael Freedman	1986	USA	3
Klaus Roth	1958	Germany	2	Valdimir Drinfeld	1990	USSR	4
Rene Thom	1958	France	4	Vaughan Jones	1990	New Zealand	4
Lars Hormander	1962	Sweden	3	Jean Christophe Yoccoz	1994	France	3
John Milnor	1962	USA	3	Jean Bourgain	1994	Belgium	2
Michael Atiyah	1966	Great Britain	4	Efim Zelmanov	1994	Russia	3
Paul Cohen	1966	USA	5	Richard Borcherds	1998	S Afr/Gt Brtn	2
Alexander Grothendieck	1966	Germany	5	William T. Gowers	1998	Great Britain	4
Stephen Smale	1966	USA	4	Maxim L. Kontsevich	1998	Russia	4
Alan Baker	1970	Great Britain	2	Curtis McMullen	1998	USA	3
Heisuke Hironaka	1970	Japan	4	Vladimir Voevodsky	2002	Russia	4
Serge Novikov	1970	USSR	2	Laurent Lafforgue	2002	France	inf
John G. Thompson	1970	USA	3	Andrei Okounkov	2006	USA	3
Enrico Bombieri	1974	Italy	2	Terence Tao	2006	USA	3
David Mumford	1974	Great Britain	2	Wendelin Werner	2006	France	3
Pierre Deligne	1978	Belgium	3				
Charles Fefferman	1978	USA	2				
Gregori Margulis	1978	USSR	4				
Daniel Quillen	1978	USA	3				



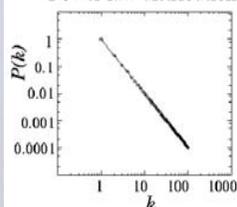
Pál Erdős (1913-1996)



Poisson distribution



Power law distribution



Scale-free networks

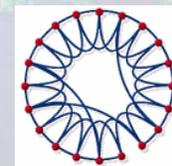
Scalability vs Fractality

- 1 1227
- 2 1656
- 3 1060
- 4 401
- 5 252
- 6 137
- 7 84
- 8 46
- 9 27
- 10 26
- 11 11
- 12 5
- 13 3
- 14 0
- 15 0
- 16 0
- 17 0
- 18 1
- 19 1



- 7 0
- 8 5
- 9 93
- 10 806
- 11 90
- 12 5
- 13 1
- 14 0

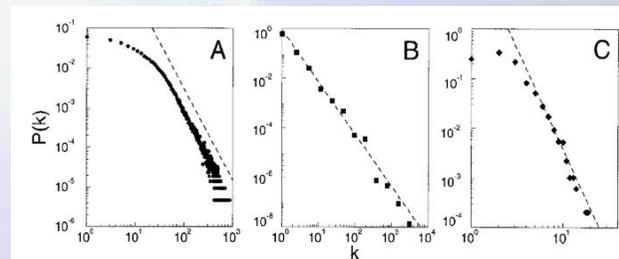
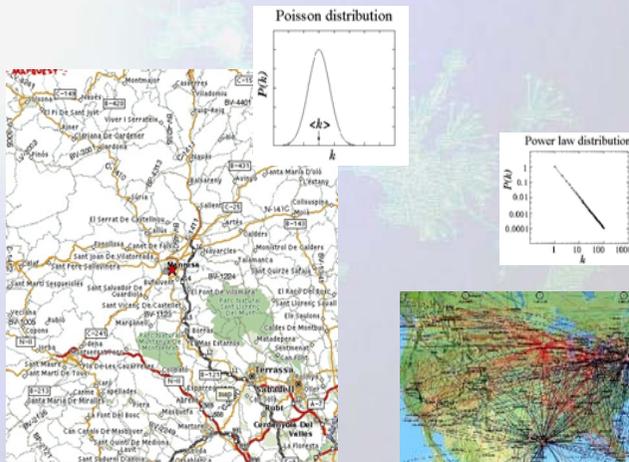
SWCirculant
 $|V|=1000 \Delta=8-13$
 $D=14 \quad d=11.1$
Small World
 $C=0.63$



Power grid

$|V|=4491 \delta=1 \Delta=19$
 $D=46 \quad d=34.54$
Small World
 $C=0.08$

A-L. Barabási i R. Albert,
 Emergence of scaling in random networks.
Science 286, 509-510 (1999)



$$P(k) = k^{-\gamma}$$

A: actors $N=212.250 \quad k=28.78 \quad \gamma=2.3$
 B: WWW $N=325.729 \quad k=5.46 \quad \gamma=2.67$
 C: power grid $N=4.94 \quad k=2.67 \quad \gamma=4$

Redes reales de las que conocemos la topología:

$$P(k) \sim k^{-\gamma}$$

NO BIOLÓGICAS $\gamma > 2$

www (in) $\gamma = 2.1$ www (out) $\gamma = 2.45$
 actores $\gamma = 2.3$
 citaciones $\gamma = 3$
 red eléctrica $\gamma = 4$

BIOLÓGICAS $\gamma < 2$

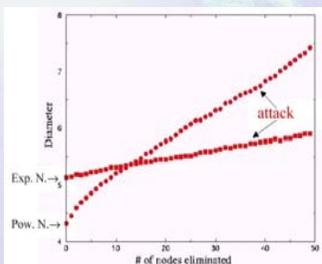
Red proteína-proteína levadura $\gamma = 1.5, 1.6, 1.7, 2.5$
 E. Coli red metabólica $\gamma = 1.7, 2.2$
 yeast gene expression net $\gamma = 1.4-1.7$
 gene functional interaction $\gamma = 1.6$

Se esperaban modelos aleatorios: $P(k) \sim e^{-k}$

Interes de las redes scale-free:

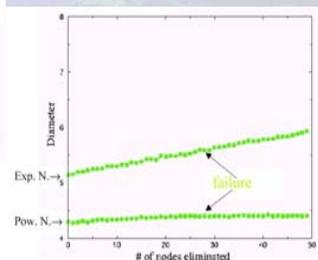
Fiabilidad / Supervivencia de la WWW

Albert, Jeong, Barabási
Nature 406, 378 (2000)



Ataques intencionados a hubs

Fallo aleatorio de nodos



Propagación de virus / "vacunas"

WWW, redes sociales

R. Cohen, D. ben-Avraham, S. Havlin;
 Efficient immunization of populations and computers
Phys. Rev. Lett. 91, 247901 (2003)

f_c umbral

λ exponente ley potencial "vacunar" nodos con grado elevado!

arriba- totalmente aleatoria

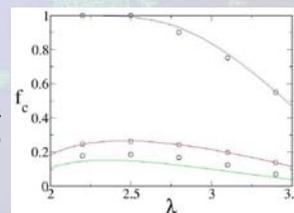
abajo- vacunación conocidos (rojo),

doble conocidos. (verde)

método:

* Seleccionar un nodo aleatoriamente

* Buscar un vecino suyo de grado alto y vacunarlo



Search in power-law networks

Adamic, Lukose, Puniyani, Huberman;
Phys. Rev. E 64, 046135 (2001)

Incluso la Inquisición sabía de redes scale-free !!

Pasó de la "vacunación" aleatoria

Arnau d'Amaurí 1209. Besièrs

Caedite eos. Nobis enim Dominus qui sunt eius

Matad a todos. Dios conoce a los suyos.

a la selectiva -hubs- (figura)



P. Ormerod, A.P. Roach;
 The Medieval inquisition: scale-free networks and the suppression of heresy.
Physica A 339 (2004) 645-652

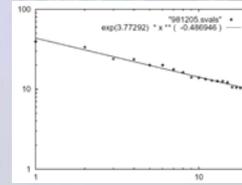
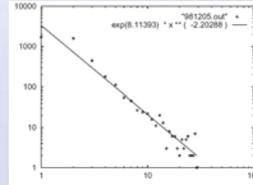
Propiedades espectrales

- Conectividad y vulnerabilidad (diámetro, cut sets, distancias entre subconjuntos)
- Escalabilidad, expansión (constantes de Cheeger)
- Enrutamientos (spanning trees)
- Load balancing
- Clustering (triángulos)
- Reconstrucción a partir del espectro
- Aspectos dinámicos (interlacing theorem)

Datos experimentales

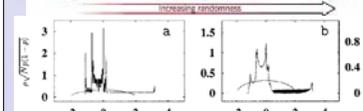
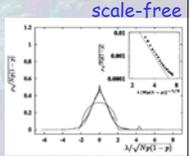
WWW / autovalores de Internet

Faloutsos, Faloutsos & Faloutsos, 1999



Autovalores según modelos (Watts & Strogatz model, Scale-free models)

Farkas, Derenyi, Barabási & Vicsek *Phys. Rev E* 2001
 Goh, Kahng & Kim 2001
 Fan & Chen *IEEE Circ. Sys.* 2002



Watts-Strogatz

¿Como modelar redes reales ?

Erdős-Rény,
 Watts-Strogatz
 Barabási-Albert

otros modelos ?

Porquè aparece la ley potencial de grados?

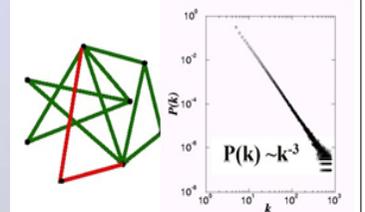
1. Las redes crecen continuamente por la adición de nodos.
2. El crecimiento NO es uniforme: Un nodo nuevo se unirá con más probabilidad a un nodo bien conectado.

WWW: páginas nuevas apuntan a documentos "clásicos"
 Erdős: prefiero publicar con un matemático conocido

Modelo: Barabási, Albert; *Science* 286, 509 (1999)

Preferential attachment : At each time unit a new node is added with m links which connect to existing nodes . The probability P to connect to a node i is proportional to its degree k_i

$$P(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j}$$



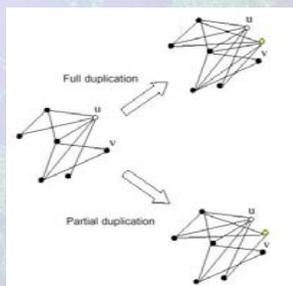
A.-L.Barabási, R. Albert, *Science* 286, 509 (1999)

Duplication models:

Fan Chung, Lu, Dewey, Galas; (2002)

Nodes are duplicated together with all (or part) of their edges.

can produce $\gamma < 2$ as in biological networks
 keep some network properties

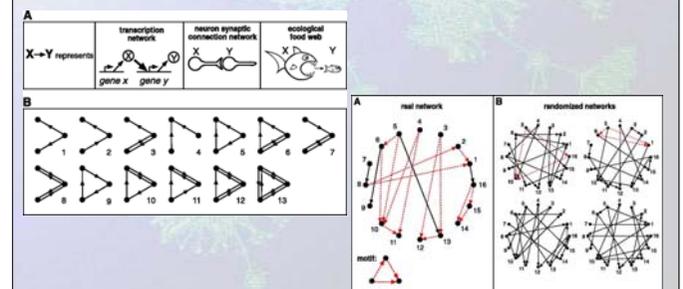


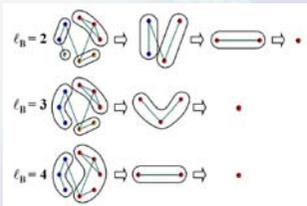
Redes fráctales

Motifs, graphlets

Milo, Shen-Orr, Itzkoviz, Kashtan, Chkovskii, Alon
Science 298, 824-827 (2002)

Pržulj, Corneil, Jurisica
Bioinformatics 20, 3508-3515 (2004)

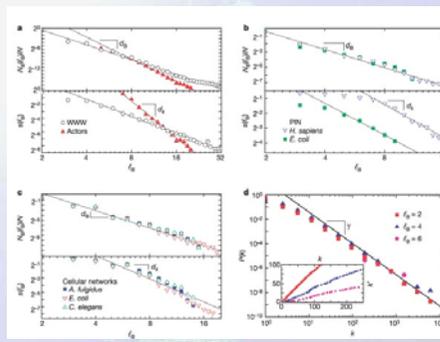
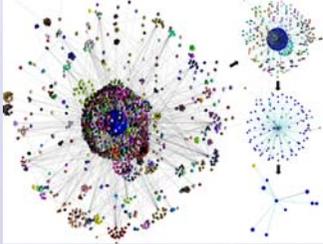




Song, Havlin, Makse
Nature 433, 392-396 (2005)
Nature Physics 2, 275-281 (2006)

Self-similarity of complex networks

Origins of fractality in the growth of complex networks



$$N_B \approx t^{-d_B}$$

$$k \rightarrow k' = s(\ell_B)k$$

$$s(\ell_B) \approx \ell_B^{-d_k}$$

$$\gamma = 1 + d_B/d_k$$

WWW, protein interaction networks son fractales

Internet (AS) no es fractal

Barabási-Albert no es fractal

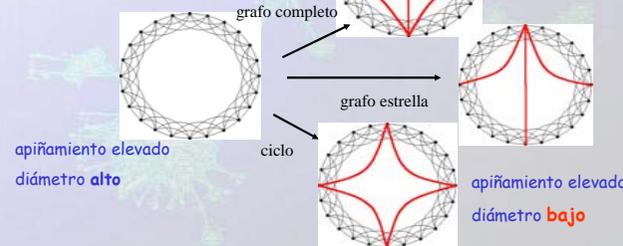
Aportaciones

- Construcción de grafos mundo-pequeño deterministas
- Construcción de grafos SW scale-free deterministas con simetrías, regulares jerárquicos, fractales
- Estudio espectral de grafos mundo-pequeño invariantes de escala
- Otros parámetros

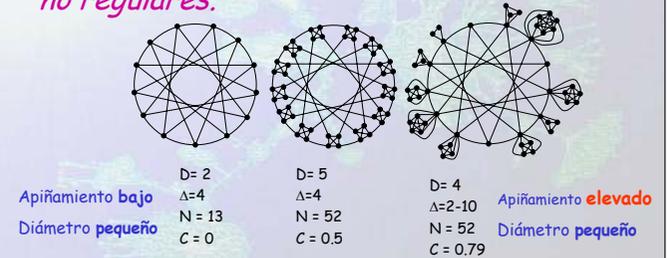
Grafos mundo-pequeño deterministas y regulares (los vértices tienen un número de vecinos fijo)

¿ por qué?

Posibles aplicaciones:
 Enrutamiento simple
 Simetría
 Algoritmos de comunicación...



Grafos mundo-pequeño deterministas regulares y simétricos
 Grafos mundo-pequeño deterministas no regulares.

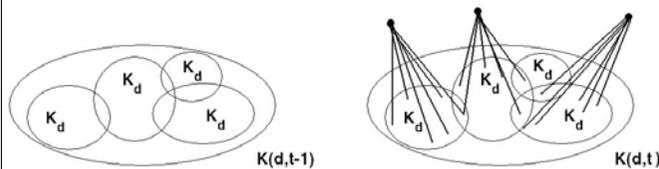


Propagación de información (o virus) en grafos SW mundo-pequeño deterministas

Arboles de cliques recursivos

SN Dorogovtsev, AV Gotsev, JFF Mendes., *Phys. Rev. E* (2002)

F. Comellas, Guillaume Fertin, André Raspaud, *Phys. Rev. E* (2004)



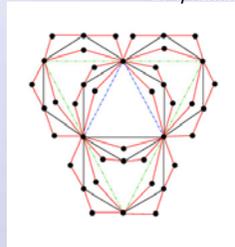
Arboles de Cliques recursivos

Grafo inicial: K_q - grafo completo con q vértices.

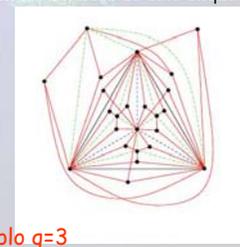
Operación: $t \geq 0$, obtener $K(q, t+1)$ de $K(q, t)$ añadiendo a cada clique K_q de $K(q, t)$:

- Un vértice nuevo u
- q ramas uniendo u con los vértices de este clique

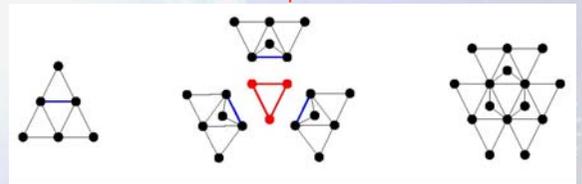
ejemplo $q=2$



ejemplo $q=3$



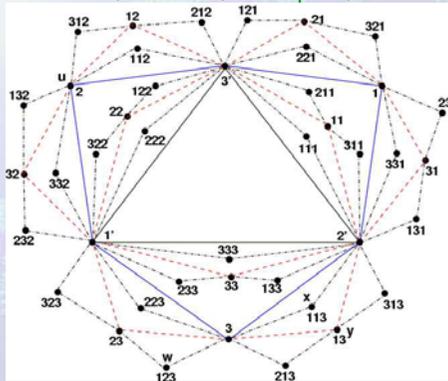
Construcción recursiva equivalente



- Orden, tamaño
- Distribución de grado $\gamma \approx 1 + \frac{\ln(d+1)}{\ln d}$ $2 < \gamma < 2.58496$
- Clustering $0.8 \leq C \leq 1$
- Diámetro logarítmico

Distance-labeling (ejemplo q=2)

F.Comellas, G. Fertin, A. Raspaud, *Sirocco 2003*



Rueda SW

$$\begin{pmatrix} G & b^T \\ b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$b = \left[\underbrace{1, \dots, 1}_m, \underbrace{1, \dots, 1}_m, \dots, \underbrace{1, \dots, 1}_m, \dots, 0 \right]$$

$$B = b^T b$$

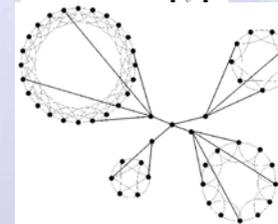
- $\lambda = 0$
- If $\lambda \in Sp(C_{n,\Delta}), \lambda \notin Sp(B) \iff \lambda = \mu_k, x_1 \in Ker(A)$
 If $k \nmid m$, multiplicity = 2
 If $k \mid m, k \neq 0$, multiplicity = 1
- If $\lambda \notin Sp(C_{n,\Delta}) \cup Sp(B)$

$$\sum_{s=0}^{m-1} \frac{1}{\lambda(\lambda - \mu_{ms})} = \frac{n}{m^2}$$

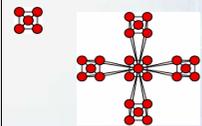
Otros modelos deterministas exactos basados en $C_{n,\Delta}$



$$\frac{m^2}{n^2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{\lambda(\lambda - \mu_{ms,k})} + \dots + \frac{m^2}{n^2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{\lambda(\lambda - \mu_{ms,k})} = 1$$

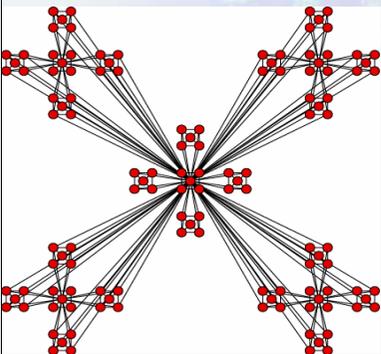


$$\sum_{s=1}^m \frac{1}{\lambda(\lambda - \mu_{ms})} = 1$$

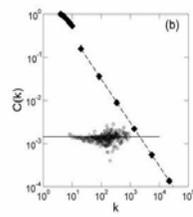


Grafos jerárquicos

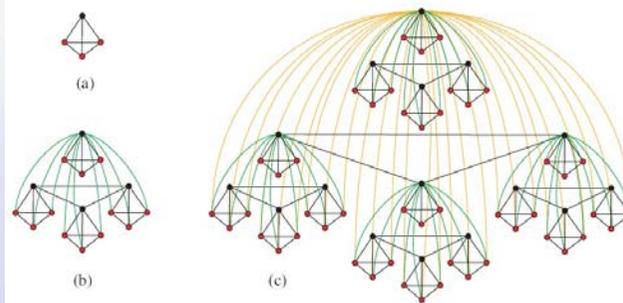
Ravasz, Barabasi, Hierarchical organization in complex networks Phys. Rev. E (2003).



$$C(k) \sim k^{-1}$$



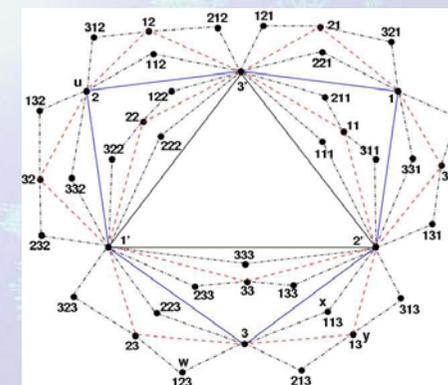
$$\gamma = 1 + (\ln 5 / \ln 4)$$



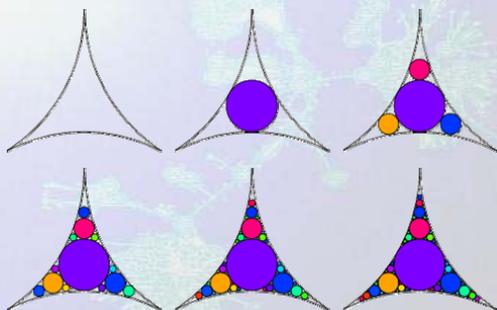
Barrière, Comellas, Dalfó (2006)

$$\gamma \approx 1 + \frac{\ln(d+1)}{\ln d}$$

Distance-labeling and routing (example q=2)



Grafos Apolonios

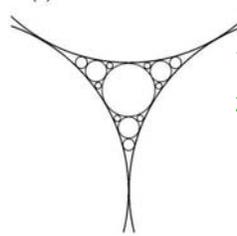


Enpaquetamientos Apolonios

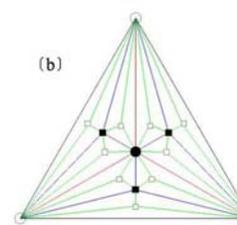
And let us not confine our cares
 To simple circles, planes and spheres,
 But rise to hyper flats and bends
 Where kissing multiple appears,
 In n-ic space the kissing pairs
 Are hyperspheres, and Truth declares -
 As n+2 such osculate
 Each with an n+1 fold mate
 The square of the sum of all the bends
 Is n times the sum of their squares.

Thorold Gosset, The Kiss Precise, Nature 139 (1937) 62.

(a)

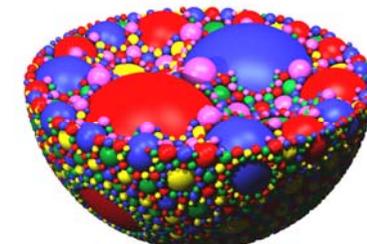


(b)



Grafos Apolonios

Andrade et al. Phys. Rev. Lett. (2005)
 Doye, Massen Phys. Rev. E (2005)
 Zhang, Rong, Comellas, Fertin J. Phys.A (2006)



<http://graphics.ethz.ch/~peikert/personal/packing/images/apoll3d.png>

d=2

d=3

Step (t)	New edges	Number of K_{d+1}
0	$\frac{d(d+1)}{2}$	1
1	$d+1$	$d+1$
2	$(d+1)^2$	$(d+1)^2$
3	$(d+1)^3$	$(d+1)^3$
...
i	$(d+1)^i$	$(d+1)^i$
$i+1$	$(d+1)^{i+1}$	$(d+1)^{i+1}$
...

$$N_t = (d+1) + \sum_{j=0}^{t-1} (d+1)^j = \frac{(d+1)^t - 1}{d} + d + 1$$

$$|E|_t = \frac{d(d+1)}{2} + \sum_{j=1}^t (d+1)^j = \frac{d(d+1)}{2} + \frac{(d+1)^{t+1} - d - 1}{d} \quad (1)$$

TABLE II: Distribution of vertices and degrees for $A(d,t)$ at each step t .

Step(t)	Num. vert.	Degree
0	$d+1$	d
1	$d+1$	$d+1$
1	1	$d+1$
2	$d+1$	$d+1+d$
1	1	$(d+1)+(d+1)$
2	$d+1$	$d+1$
3	$d+1$	$d^2+d+1+d$
1	1	$(d+1)d+(d+1)+(d+1)$
$d+1$	$(d+1)+(d+1)$	
$(d+1)^2$	$d+1$	
4	$d+1$	$d^3+d^2+d+1+d$
1	1	$(d+1)d^2+(d+1)d+(d+1)+(d+1)$
$d+1$	$(d+1)d+(d+1)+(d+1)$	
$(d+1)^2$	$(d+1)+(d+1)$	
$(d+1)^3$	$d+1$	
...
i	$d+1$	$d^{i-1}+d^{i-2}+\dots+d+1+d$
1	1	$(d+1)d^{i-2}+(d+1)d^{i-3}\dots$
$d+1$	$(d+1)d+(d+1)+(d+1)$	
$d+1$	$(d+1)d^{i-3}+(d+1)d^{i-4}\dots$	
...	...	
$(d+1)^{i-2}$	$(d+1)+(d+1)$	
$(d+1)^{i-1}$	$d+1$	
...

Discrete degree spectrum (with larger and larger jumps)

$$P_{cum}(k) \equiv \sum_{k' \geq k} N(k',t)/N_t \sim k^{1-\gamma}$$

$$\gamma \approx 1 + \frac{\ln(d+1)}{\ln d}$$

$$2 < \gamma < 2.58496$$

Métodos:

Cálculo simbólico (Mathematica, Maple).

Paquetes específicos (NetworkX)

Recursos:

Servidores (Apple Xserve G5, Xeon)

Dificultades:

Tamaño de los grafos (incluso millones de vértices)

Tiempo de cálculo.

