

REUNIÓN DE LA PLATAFORMA COMPUTING

Jesús Francisco Palacián Subiela

Departamento de Matemática e Informática
Universidad Pública de Navarra

MANIPULACIÓN SIMBÓLICA, PROBLEMAS ALGEBRAICOS Y
TEMAS AFINES



Contenidos

- 1 Proyecto de Investigación
- 2 Transformaciones Cercanas a la Identidad
- 3 Tareas
- 4 Ejemplos
- 5 Conclusiones



Contenidos

- 1 Proyecto de Investigación
- 2 Transformaciones Cercanas a la Identidad
- 3 Tareas
- 4 Ejemplos
- 5 Conclusiones



Contenidos

- 1 Proyecto de Investigación
- 2 Transformaciones Cercanas a la Identidad
- 3 Tareas
- 4 Ejemplos
- 5 Conclusiones



Contenidos

- 1 Proyecto de Investigación
- 2 Transformaciones Cercanas a la Identidad
- 3 Tareas
- 4 Ejemplos
- 5 Conclusiones



Contenidos

- 1 Proyecto de Investigación
- 2 Transformaciones Cercanas a la Identidad
- 3 Tareas
- 4 Ejemplos
- 5 Conclusiones



Proyecto de Investigación MTM2005-08595

- **Título:** Formas normales en sistemas dinámicos hamiltonianos: nuevos aspectos teóricos y aplicaciones en Física e Ingeniería.
- **Instituciones:** Universidad de La Rioja (cuatro profesores y un alumno de doctorado) y Universidad Pública de Navarra (dos profesores y un alumno de doctorado).
- **Periodo:** 2006-2008.



Líneas de Investigación

Dinámica No Lineal y Caos en Sistemas Dinámicos:

- Mecánica celeste: dinámica orbital y de actitud
- Teoría de reacciones químicas
- Trampas iónicas, átomos de hidrógeno sujetos a campos externos



Problemas de Interés en Física e Ingeniería

- Aproximación analítica de órbitas periódicas y otras variedades invariantes de dimensión mayor o igual que dos para sistemas de mecánica celeste.
- Dinámica de actitud y control de satélites magnéticos orbitando alrededor de un planeta con magnetosfera.
- Determinación de variedades invariantes normalmente hiperbólicas en problemas restringidos de tres cuerpos, con especial hincapié en problemas de Astrodinámica.



Problemas de Interés en Física e Ingeniería #2

- Estudio de la dinámica de cargas confinadas en trampas electromagnéticas perturbadas.
- Estudio de una partícula cargada orbitando alrededor de un planeta con magnetosfera.
- Aplicación a la teoría del estado de transición en dinámica molecular.



Formas Normales

Dado el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}; t)$$

donde la función $\mathbf{f} \in C^\infty$:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} : D \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^p \\ (\mathbf{x}, t) &\longmapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}; t) \end{aligned}$$

el objetivo es **encontrar la máxima información posible** del mismo: soluciones aproximadas, puntos de equilibrio, órbitas periódicas y otras variedades invariantes, analizar su integrabilidad, estudiar bifurcaciones paramétricas,

En general

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}; \varepsilon, t) = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} \mathbf{f}_n(\mathbf{x}; t), \quad |\mathbf{f}_0| \gg \varepsilon |\mathbf{f}_1| \gg \frac{\varepsilon^2}{2} |\mathbf{f}_2| \gg \frac{\varepsilon^3}{6} |\mathbf{f}_3| \gg \dots$$



Formas Normales #2

En ocasiones f corresponderá a un **campo vectorial hamiltoniano**, es decir, p será par, $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ y existirá una función escalar,

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}; \varepsilon, t) = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} \mathcal{H}_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}; t), \quad |\mathcal{H}_0| \gg \varepsilon |\mathcal{H}_1| \gg \varepsilon^2 |\mathcal{H}_2|/2 \gg \dots,$$

tal que:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} \end{cases}$$

Si $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}; \varepsilon, t)$ no depende explícitamente del tiempo, el problema se dice **autónomo** y \mathcal{H} es una integral primera del mismo, es decir es constante sobre las soluciones



Formas Normales #3

Transformaciones de Lie (A. Deprit, 1969)

Se construye una aplicación $\mathbf{X} : (\mathbf{y}, t; \varepsilon) \rightarrow \mathbf{x}$ solución del P.V.I.

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\varepsilon} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t; \varepsilon), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{y}$$

a través de una función generatriz

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, t; \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} \mathbf{W}_{n+1}(\mathbf{x}, t)$$

tal que el campo vectorial

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t; \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} \mathbf{f}_n(\mathbf{x}, t)$$

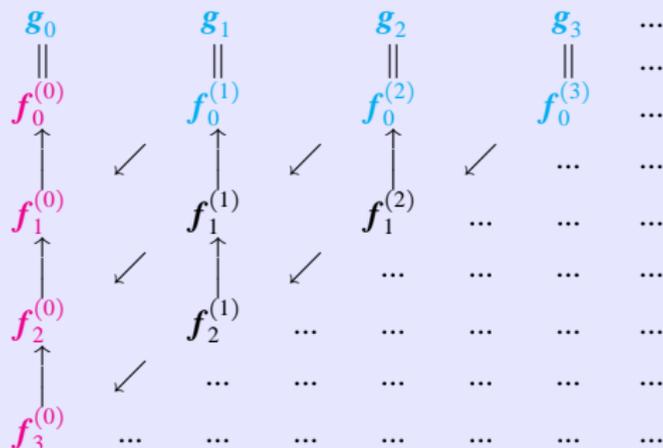
queda transformado en

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t; \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} \mathbf{g}_n(\mathbf{y}, t)$$



Formas Normales #4

Triángulo de Lie–Deprit



Recurrencia:

$$f_n^{(j)} = f_{n+1}^{(j-1)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [f_k^{(j-1)}, W_{n+1-k}],$$

donde $[a, b] = (\partial a / \partial x) b - (\partial b / \partial x) a$ es el paréntesis de Lie



Formas Normales #5

Ecuación homológica:

En cada orden n hay que resolver la ecuación en derivadas parciales:

$$[f_0^{(0)}, W_n] + f_0^{(n)} = \tilde{f}_0^{(n)}$$

donde:

- 1 Los términos $\tilde{f}_0^{(n)}$ dependen de los órdenes anteriores y son conocidos
- 2 Se elige $f_0^{(n)}$ para que sea “simple”
- 3 Se resuelve la ecuación resultante para W_n



Formas Normales #6

¿Qué significa *simple*?

- Puede ser que g (truncado a cierto orden) sea independiente de t : autonomización de f .
- Si g conmuta con un cierto campo vectorial z entonces se introduce una simetría continua.
- En el contexto simpléctico, la simetría continua es una integral (formal) del hamiltoniano transformado.



Formas Normales #7

La transformación $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{y}, t; \varepsilon)$ relaciona las coordenadas **antiguas** \mathbf{x} con las **nuevas** \mathbf{y} y es una *transformación cercana a la identidad*

El **cambio directo** viene dado por:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{y}, t; \varepsilon) = \mathbf{y} + \sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon^n}{n!} \mathbf{y}_0^{(n)}$$

con $\mathbf{y}_0^{(0)} \equiv \mathbf{y}$, $\mathbf{y}_n^{(0)} \equiv 0$ si $n \geq 1$

El **cambio inverso** es:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y}(\mathbf{x}, t; \varepsilon) = \mathbf{x} + \sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon^n}{n!} \mathbf{x}_0^{(n)}$$

con $\mathbf{x}_0^{(0)} \equiv \mathbf{x}$, $\mathbf{x}_n^{(0)} \equiv 0$ si $n \geq 1$



Reducción de la Dimensión de Campos Vectoriales

- Clasificación de todas las formas normales correspondientes a hamiltonianos polinómicos cuadráticos en n grados de libertad (forma normal de Williamson).
- Desarrollo y adaptación de los programas simbólicos elaborados para el cálculo de formas normales.
- Obtención de simetrías en hamiltonianos en infinitas dimensiones: paso de ecuaciones en derivadas parciales a ecuaciones diferenciales ordinarias mediante construcción de formas normales.



Análisis del Sistema Transformado

Reconstrucción de la dinámica del sistema original:

- Análisis del flujo fásico y bifurcaciones paramétricas en el sistema transformado y sus implicaciones en el sistema original.
- Determinación de órbitas periódicas y otras variedades invariantes: toros KAM, variedades hiperbólicas, variedades centrales, etc. a partir de soluciones del sistema transformado.
- Continuación numérica de familias de órbitas periódicas.



Sistemas de Kepler Perturbados

Objetivos:

- Obtener la posición y velocidad del satélite con precisión alta
- Determinar zonas especiales en el espacio fásico para posibles misiones

Los **métodos analíticos** suelen dar resultados satisfactorios

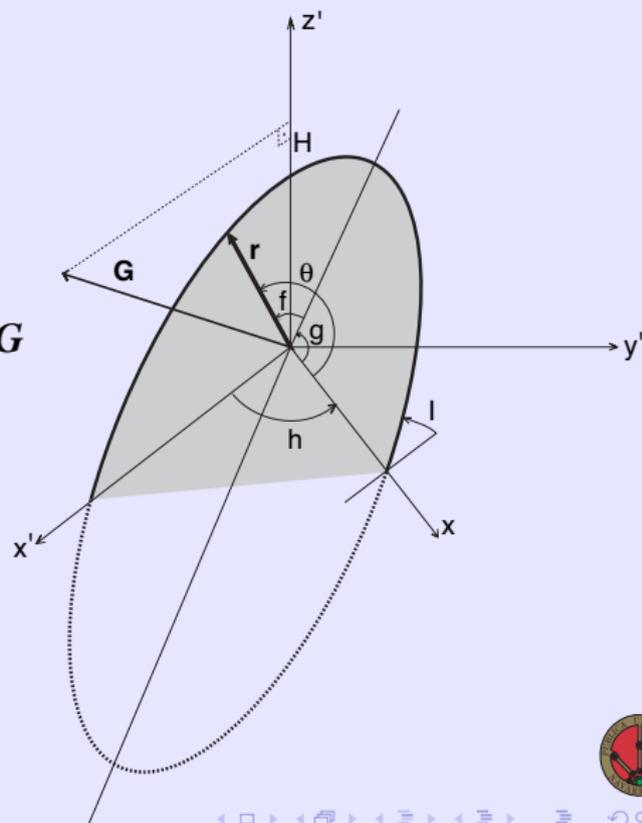
- Proporcionan órdenes de aproximación altos
- Permiten evaluar las soluciones, $\mathbf{x}(t) = (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$, de forma rápida
- Se puede estudiar la dependencia respecto de condiciones iniciales, posibles bifurcaciones, etc.



Sistemas de Kepler Perturbados #2

Coordenadas de Delaunay

- l : anomalía media
- g : argumento del pericentro
- h : argumento del nodo
- L : acción relacionada con l
- G : módulo del momento angular \mathbf{G}
- H : tercera componente de \mathbf{G}



Sistemas de Kepler Perturbados #3

Se definen como una perturbación regular del problema de dos cuerpos

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_K + \mathcal{P}$$

donde

$$\mathcal{H}_K = \frac{1}{2} (X^2 + Y^2 + Z^2) - \frac{\mu}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \mathcal{P} = \sum_{i,j,k,l,m} \mathcal{P}_i^{(j,k,l,m)}$$

En muchas ocasiones

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_i^{(j,k,l,m)}(\ell, g, h, L, G, H) &= \left(\frac{r}{\alpha}\right)^j \left(\frac{R}{\beta}\right)^k \mathcal{G}_i^{(l,m)}(g, h, L, G, H) \\ \mathcal{G}_i^{(l,m)}(g, h, L, G, H) &= \mathcal{E}_i^{(l,m)}(L, G, H) \exp[\iota(lg + mh)] \end{aligned}$$



Sistemas de Kepler Perturbados #4

Aplicaciones:

- ① Satélites artificiales y naturales
- ② Casos *lunares* y *cometas* de problemas de tres cuerpos restringidos
- ③ Problemas de tres cuerpos (Teoría de la Luna, etc)
- ④ Problemas de Størmer

Dificultades:

- Normalmente hay que resolver la ecuación homológica

$$m \frac{\partial \mathcal{W}_n}{\partial \ell} - \omega \frac{\partial \mathcal{W}_n}{\partial h} + \mathcal{K}_n = \tilde{\mathcal{H}}_0^{(n)}$$

en forma cerrada para la excentricidad y las anomalías

- Las transformaciones de Lie son difíciles de llevar a cabo a órdenes altos y a veces este requerimiento es indispensable



Sistemas de Kepler Perturbados #5

Dilogaritmos y polilogaritmos:

f, ℓ y E : respectivamente, anomalía verdadera, media y excéntrica

$$z = \exp(\sqrt{-1} E)$$

$$\beta = 1/(1 + \eta), \quad \eta^2 + e^2 = 1, \quad p = G^2/\mu$$

$$\int \varphi d\ell = \int (f - \ell) d\ell = -\text{Li}_2(\beta e \exp(\sqrt{-1} E)) + \text{Li}_2(\beta e \exp(\sqrt{-1} E)) \\ + \eta \log\left(\frac{p}{r}\right) + e\varphi \text{sen } E + \frac{e^2}{4} \cos 2E$$



Sistemas de Kepler Perturbados #6

Dilogaritmos y polilogaritmos:

$\text{Li}_m(z)$: función polilogarítmica de orden m :

$$(m > 2) \quad \text{Li}_m(z) = \int \frac{1}{z} \text{Li}_{m-1}(z) dz = \sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{z^n}{n^m},$$

$$\text{Li}_2(z) = - \int \frac{1}{z} \log(1 - z) dz.$$



Teoría de la Luna

Objetivo (con Carlos Osácar, Universidad de Zaragoza)

Determinar la posición de la órbita de la Luna mediante métodos analíticos con una precisión menor a un centímetro: Problema de tres cuerpos espacial con masas puntuales.

- Teoría de Deprit, Henrard y Rom (hacia 1970)
- Teoría de Chapront y Chapront-Tauzé (entre 1980 y 2000)
- Teoría de Gutzwiller y Schmidt (entre 1985 y 1990)



Teoría de la Luna #2

$$H = \frac{G(T+L)}{r} + \frac{GS}{R} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^j T^{j-1} + L^{j-1}}{(T+L)^{j-1}} \frac{r^j}{R^j} P_j(\cos \omega)$$

con

$$\cos \omega = \mathbf{x} \cdot \mathbf{X} / (rR) :$$

- \mathbf{x} es la distancia de la Tierra a la Luna y \mathbf{X} la distancia del Sol al centro de masas Luna-Tierra.
- El problema se formula en coordenadas de Jacobi, y el sistema dinámico correspondiente es de cuatro grados de libertad.
- Como pequeño parámetro tomamos el cociente entre los semiejes mayores: $a_{LT}/a_S \approx 1/400$.
- La integración numérica de las ecuaciones del movimiento es muy costosa para intervalos de tiempo largo.



Teoría de la Luna #3

Integración numérica para un periodo (≈ 29.5 días):

- La posición de la Luna se calcula con unos diecinueve o veinte dígitos de precisión.
- El error en la energía y el momento angular total del problema (constantes del movimiento) es del orden de 10^{-41} .
- ¿Se pueden mejorar esas cantidades? ¿Podemos utilizar métodos numéricos más rápidos y para intervalos de tiempo mayores?



Conclusiones

- Las técnicas analíticas (o semianalíticas) resultan muy convenientes en problemas de dinámica no lineal.
- Se precisa desarrollar nuevos métodos para abordar problemas más complejos:
 - Problemas de muchos grados de libertad (moléculas de proteínas, de ADN, etc.).
 - En un problema hamiltoniano con n grados de libertad el número de monomios de grado i es $\binom{2n+i-1}{i}$.
 - Resultados complementarios a la teoría de Floquet.
- Se necesita investigar sobre invariantes correspondientes a grupos de Lie compactos y no compactos para hacer efectiva la reducción de una cierta E.D.O.

