



Análisis numérico, Optimización dinámica y aplicaciones

Javier de Frutos (UVa)

Julia Novo (UAM)

Maripaz Calvo (UVa)

Cesáreo González (UVa)

Guiomar Martín-Herrán (UVa)

Francisco Cabo (UVa)

María Pilar Martínez García (UM)



Adaptatividad dinámica

- Problemas modelo: Ecuaciones de convección-reacción-difusión

$$u_t(t, x) - \nu \Delta u(t, x) + R(u(t, x)) = f(t, x), \quad 0 \leq t \leq T, \quad x \in \Omega$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \Omega,$$

$$u(t, x) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

- $R(u) = (u \cdot \nabla)u$ Ecuación de convección-difusión no lineal
- $R(u) = g(u)$ Ecuación de reacción-difusión no lineal
- Ecuaciones de Navier-Stokes



Adaptatividad dinámica

- **Objetivo:**

- ★ Diseño de algoritmos adaptativos en tiempo y espacio

- **Dificultad:**

- ★ Pueden aparecer estructuras no resueltas como resultado de la evolución de datos iniciales bien aproximados.

Ejemplo: Capas límite en Cahn-Allen (Ginzburg-Landau) equation

- ★ No es posible resolver estas estructuras con anticipación

- **Herramientas:**

- ★ Estimadores de error a posteriori
- ★ Procedimiento de adaptación dinámica
- ★ Elementos finitos en versión h , p o $h-p$

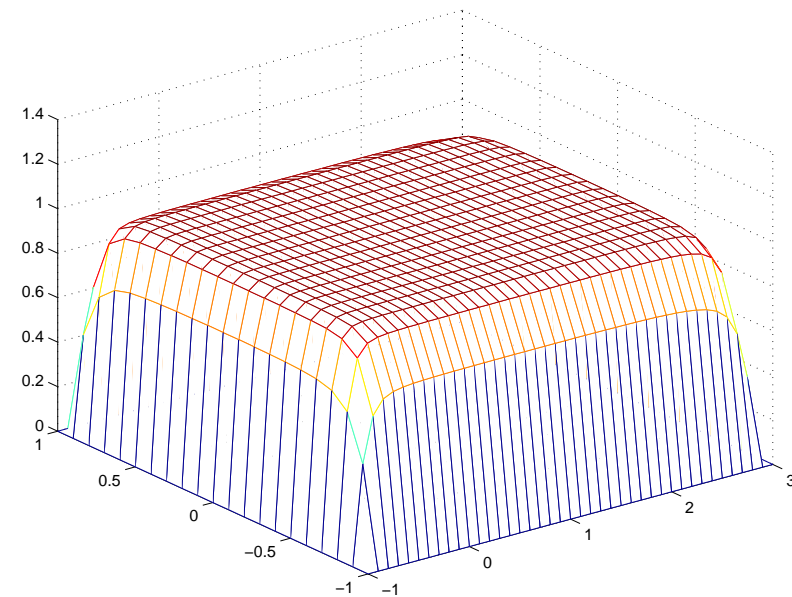
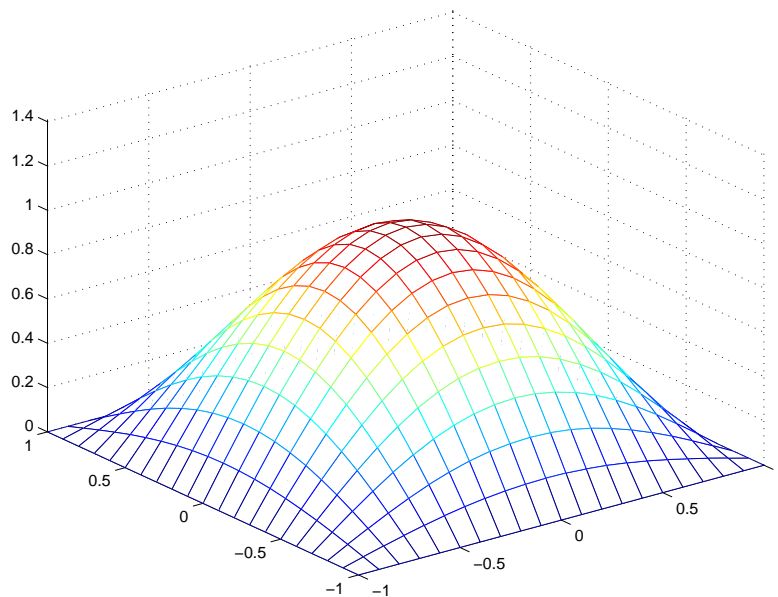


Adaptatividad dinámica

$$u_t = .005\Delta u + u - u^3, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1$$

$$u(t, \pm 1, \pm 1) = 0$$

$$u(0, x, y) = \sin(\pi(x + 1)/2) \sin(\pi(y + 1)/2)$$





Adaptatividad dinámica

Taxis-reacción-difusión (M.P. Calvo & A. Gerisch)

Ejemplo: Tumour angiogenesis model

$$n_t(t, x) = \epsilon \Delta n(t, x) - \nabla \cdot (n \kappa \nabla c) + \mu n(1 - n) \max(0, c - c^*) - \beta n$$

$$c_t(t, x) = \Delta c - \frac{\alpha n c}{\gamma + c} - \lambda c$$



Adaptatividad dinámica

Taxis-reacción-difusión (M.P. Calvo & A. Gerisch)

Ejemplo: Tumour Invasion

$$n_t(t, x) = \epsilon \Delta n - \nabla \cdot (n \gamma \nabla c_1)$$

$$c_{1,t}(t, x) = -\eta c_2 c_1$$

$$c_{2,t}(t, x) = d_2 \Delta c_2 + \alpha n - \beta c_2$$



Adaptatividad dinámica

Postprocessed Galerkin approximation (elliptic reconstruction)
(B. García-Archilla, J. Novo)

Fix $t^* > 0$, $\tilde{u}_h(t^*) \in H_0^1(\Omega)$ is the solution of the elliptic problem:

$$a(\tilde{u}_h(t^*), v) = (-(u_h)_t(t^*), v) - (R(u_h(t^*)), v) + (f(t^*), v),$$

$$\forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$(u_h)_t = -A_h u_h - P_h R(u_h) + P_h f, \quad P_h \text{ orthogonal } L^2$$

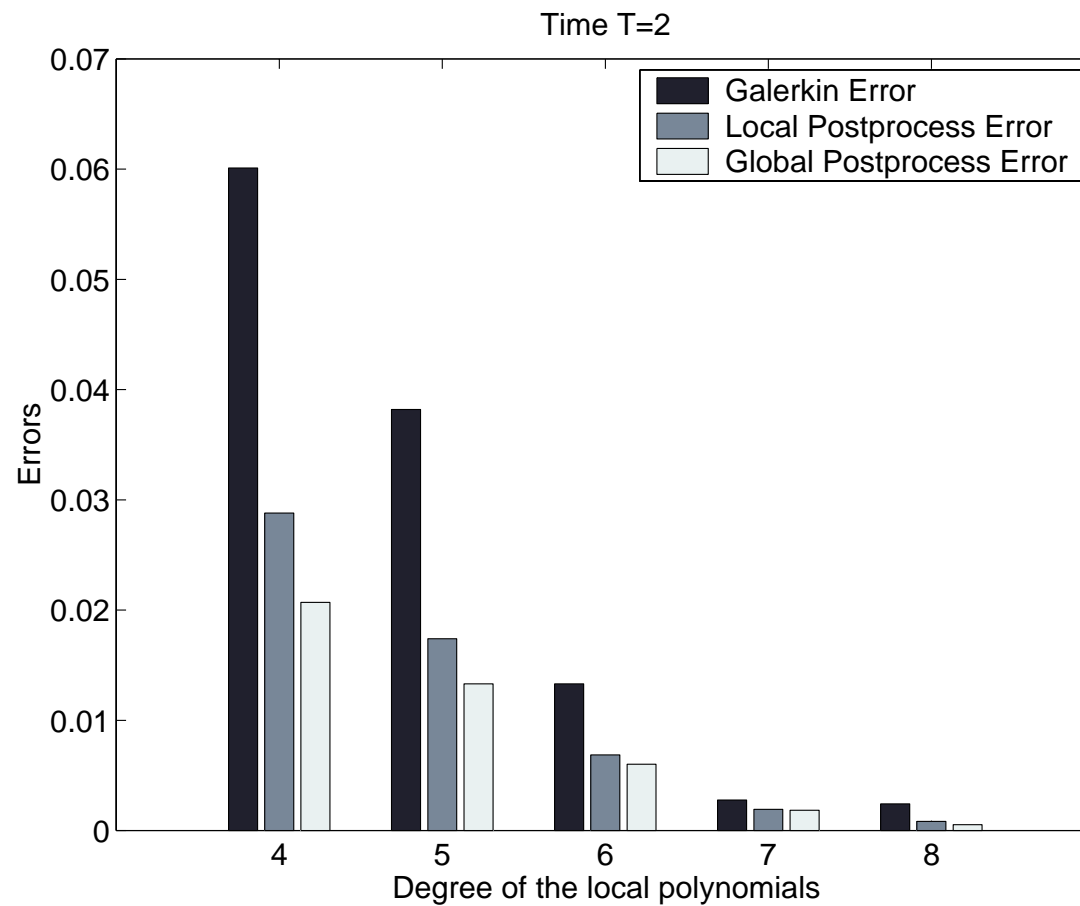
The a posteriori error estimator is:

$$\eta_h(t^*) = \tilde{u}_h(t^*) - u_h(t^*)$$



Adaptatividad dinámica

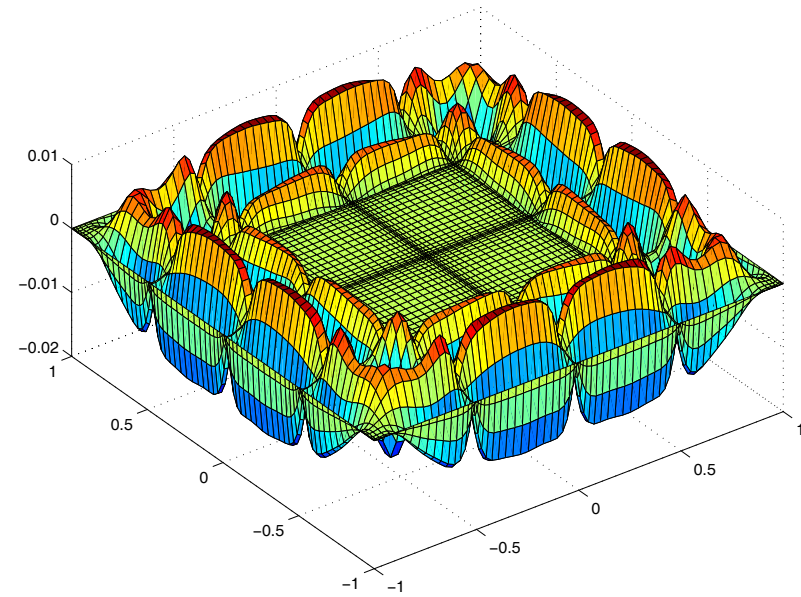
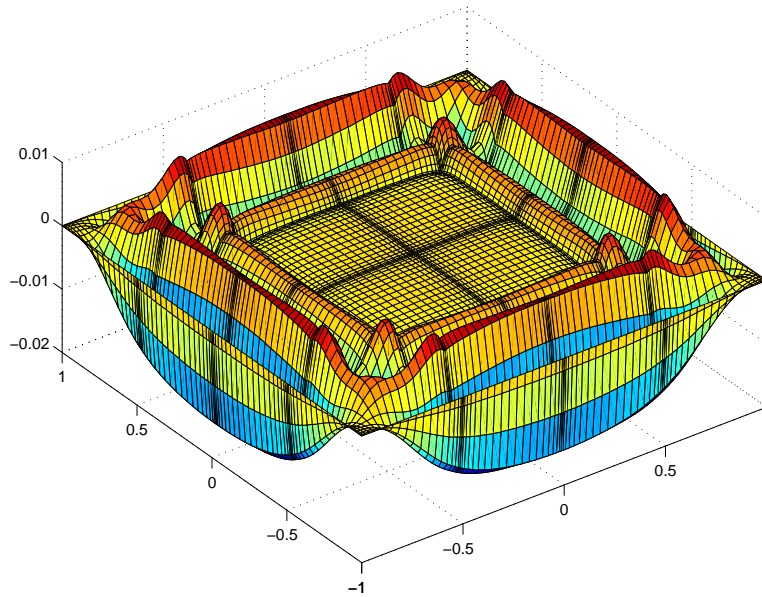
$$u_t = .005\Delta u + u - u^3, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1$$





Adaptatividad dinámica

$$u_t = .005\Delta u + u - u^3, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1$$





Valoración de derivados financieros

Ejemplo: Convertible bonds with call and put features

Let $V(S, r, t)$ the price of a bond with maturity $T > t$

- S is the underlying stock price
- r is the spot interest rate
- **Dynamics** (equity and term structure)

$$dS_\tau = (r - D)S_\tau d\tau + \omega_S S_\tau dW_\tau^1 \quad (\text{log-normal})$$

$$dr_\tau = (a - br_\tau)d\tau + \omega_r r_\tau^{1/2} dW_\tau^2 \quad (\text{CIR model})$$

- $\mathbb{E}(dW_\tau^1 dW_\tau^2) = \rho, \quad -1 \leq \rho \leq 1.$



Valoración de derivados financieros

- **Conversion feature** At any time $t \leq T$ the holder can convert the bond into n units of the issuer's stock

$$V(S, r, t) \geq nS$$

- **Put feature** At any time $t \leq T$ the holder can put back the bond for a specified reward $PP(t)$

$$V(S, r, t) \geq PP(t)$$

- **Call feature** At any time $t \leq T$ the issuer can call back the bond for a specified amount $CP(t)$

$$V(S, r, t) \leq CP(t)$$

- At **maturity** the price of the bond is

$$V(S, r, T) = \min(\max(nS, PP(T), Par), CP(T))$$

Par is the par value of the bond.



Valoración de derivados financieros

The value function can be defined as the solution of:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} - LV - rV &\geq 0, & \psi_2 < V \leq \psi_1, & (S, r) \in (0, \infty) \times (0, \infty), \\ \frac{\partial V}{\partial t} - LV - rV &\leq 0, & \psi_2 \leq V < \psi_1, & (S, r) \in (0, \infty) \times (0, \infty), \\ \frac{\partial V}{\partial t} - LV - rV &= 0, & \psi_2 < V < \psi_1, & (S, r) \in (0, \infty) \times (0, \infty), \\ V(S, r, T) &= \psi_2(S, r), & (S, r) \in (0, \infty) \times (0, \infty). & \end{aligned}$$

$$\psi_1 = CP(t)$$

$$\psi_2 = \min(\max(nS, PP(t), Par\delta_T), CP(t))$$



Valoración de derivados financieros

The value function can be defined as the solution of:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t} - LV - rV &\geq 0, & \psi_2 < V \leq \psi_1, & (S, r) \in (0, \infty) \times (0, \infty), \\ \frac{\partial V}{\partial t} - LV - rV &\leq 0, & \psi_2 \leq V < \psi_1, & (S, r) \in (0, \infty) \times (0, \infty), \\ \frac{\partial V}{\partial t} - LV - rV &= 0, & \psi_2 < V < \psi_1, & (S, r) \in (0, \infty) \times (0, \infty), \\ V(S, r, T) &= \psi_2(S, r), & (S, r) \in (0, \infty) \times (0, \infty).\end{aligned}$$

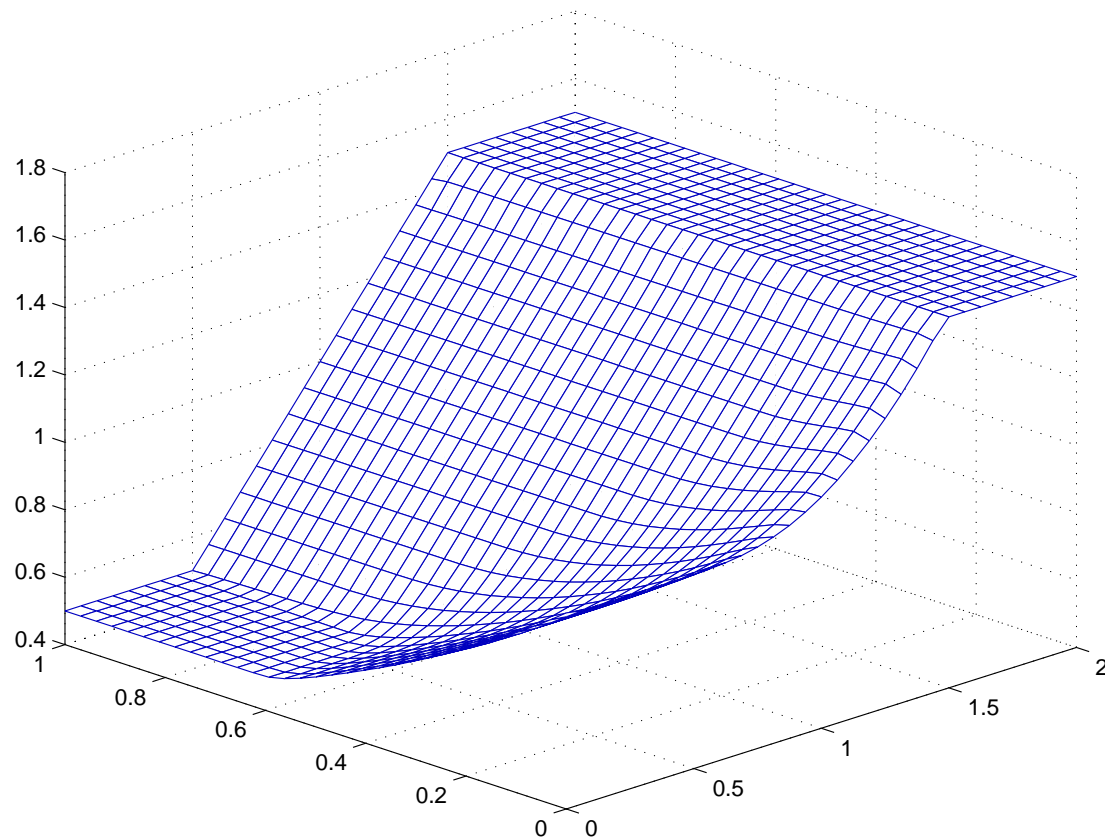
$$\begin{aligned}LV = & - \left(\frac{1}{2} \omega_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho \omega_S \omega_r S r^{1/2} \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial r} + \frac{1}{2} \omega_r^2 r \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right) \\ & - \left((r - D) S \frac{\partial V}{\partial S} + (a - br) \frac{\partial V}{\partial r} \right), \quad \text{(singular operator)}\end{aligned}$$



Valoración de derivados financieros

$r_{max} = 0.1$, $S_{max} = 2$, $T = 1$, 32 nodes, $TOL = 10^{-4}$, $\epsilon = 10^{-5}$

Bond Value





Juegos diferenciales

G. Martín-Herrán, F. Cabo & M.P. Martínez García

Juego diferencial con dos jugadores jugado en un horizonte temporal $[0, \infty)$.

Ecuación de estado

$$\dot{x}(t) = g(x(t), u_1(t), u_2(t)), \quad x(0) = x_0,$$

$x(t) \in X \subseteq \mathfrak{R}$ denota el estado; X es el espacio de estados;

$u_i(t) \in \mathfrak{R}$ variable de control del jugador $i = 1, 2$;

El funcional de pago a maximizar por el jugador i es

$$W_i(x_0, u_1, u_2) = \int_0^{\infty} f_i(x(t), u_1(t), u_2(t)) e^{-\rho t} dt$$

$\rho > 0$ es el tanto de descuento;



Juegos diferenciales

El problema es

$$\max_{u_1} W_1(x_0, u_1, u_2)$$

$$\max_{u_2} W_2(x_0, u_1, u_2)$$

sujeto a

$$\dot{x}(t) = g(x(t), u_1(t), u_2(t)), \quad x(0) = x_0,$$

$$u_i = \Phi_i(t, x(t)) = \Phi_i(x(t))$$

Equilibrios de Markov estacionarios



Juegos diferenciales

Equilibrio de Nash.

$$W_1(x, u_1, \Phi_2) \leq W_1(x, \Phi_1, \Phi_2)$$

$$W_2(x, \Phi_1, u_2) \leq W_2(x, \Phi_1, \Phi_2)$$

Juego de suma cero $W_1 = -W_2 = W$

$$W(x, u_1, \Phi_2) \leq W(x, \Phi_1, \Phi_2) \leq W(x, \Phi_1, \Phi_2)$$

Ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman

$$\rho V_1 = V_1 - V_{1,t} = \max_{u_1} \left\{ f_1(x, u_1, u_2) + V_{1,x} g(x, u_1, u_2) \right\}$$

$$\rho V_2 = V_2 - V_{2,t} = \max_{u_2} \left\{ f_2(x, u_1, u_2) + V_{2,x} g(x, u_1, u_2) \right\}$$



Juegos diferenciales

Solución cooperativa

Los jugadores acuerdan maximizar conjuntamente el pago agregado:

$$\sum_{i=1}^2 W_i = \sum_{i=1}^2 \int_0^{\infty} f_i(x(t), u_1(t), u_2(t)) e^{-\rho t} dt.$$

El pago óptimo del jugador i si se juega la solución cooperativa es:

$$W_i(u_1^c(x), u_2^c(x)) = \int_0^{\infty} f_i(x^c(t), u_1^c(x), u_2^c(x)) e^{-\rho t} dt,$$

donde $x(t)$ denota la trayectoria de estado óptima asociada

$$\dot{x}(t) = g(x(t), u_1^c(x(t)), u_2^c(x(t))), \quad x(0) = x_0,$$



Juegos diferenciales

Cuestión importante en juegos cooperativos: **sostenibilidad en el tiempo de un acuerdo alcanzado al inicio del juego.**

La regla de reparto acordada inicialmente puede pasar a ser **irracional individualmente** según evoluciona el juego (Haurie (1976)).

La solución acordada satisface la **racionalidad individual** si cualquier jugador espera recibir un pago mayor en la solución coordinada que lo que obtendría en la solución cooperativa.

Cada jugador puede tener un **incentivo a no cumplir el acuerdo**, es decir, a elegir otra acción diferente a la prescrita por el acuerdo.



Juegos diferenciales

Estrategias por incentivos (2 jugadores):

$$\begin{aligned}u_1 &= \psi_1(u_2), & u_2 &= \psi_2(u_1) \\ u_1^c &= \psi_1(u_2^c), & u_2^c &= \psi_2(u_1^c)\end{aligned}$$

ψ_1 y ψ_2 son funciones que dependen de la posible desviación del otro jugador respecto a la solución coordinada. Si esta desviación es nula, entonces la estrategia por incentivos prescribirá al jugador elegir también el control cooperativo

Estrategias creíbles

$$\begin{aligned}W_1(u_1^c, u_2^c) &\geq W_1(u_1^c, \psi_2(u_1)), & W_2(u_1^c, u_2^c) &\geq W_2(\psi_1(u_2), u_2^c) \\ W_1(\psi_1(u_2), u_2) &\geq W_1(u_1^c, u_2), & W_2(u_1, \psi_2(u_1)) &\geq W_2(u_1, u_2^c)\end{aligned}$$



Juegos diferenciales

Ejemplo: Control de emisiones El pago del jugador (pais) i está dado por:

$$W_i = \int_0^{\infty} [R(E_i) - D_i(S)] e^{-\rho t} dt,$$

$E_i(t)$: emisiones de i en el tiempo t

$S(t)$: stock de contaminación. Su evolución está descrita por

$$\dot{S}(t) = E_1(t) + E_2(t) - \delta S(t), \quad S(0) = S_0,$$

La función de beneficios $R(E_i)$ es cóncava y creciente.

La función de daño medioambiental $D_i(S)$ es creciente y convexa.

La solución cooperativa minimiza las emisiones

¿Cómo garantizar que el acuerdo va a mantenerse en el tiempo?