Anàlisi Real i Funcional

Teoria de la mesura

1. Demostreu que els oberts de $\mathbb{R}$ respecte de la topologia euclidiana no formen ni una àlgebra ni una classe monòtona. Quina topologia podem posar a $\mathbb{R}$ de manera que els oberts formin una σ-àlgebra?

2. Sigui $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ una família de conjunts de $\mathbb{R}^n$ tal que:

(i) $\mathbb{R}^n \in \Sigma$.

(ii) Si $A, B \in \Sigma$, aleshores $A \setminus B \in \Sigma$.

(iii) Si $\{A_k\}_k \subseteq \Sigma$ són disjunts dos a dos, aleshores $\biguplus_k A_k \in \Sigma$.

Demostreu que Σ és una σ-àlgebra si i només si

$$A, B \in \Sigma \Rightarrow A \cap B \in \Sigma.$$

3. Sigui $\mathcal{A}$ una àlgebra de conjunts. Considerem $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{A})$ i $\Sigma = \Sigma(\mathcal{A})$ la classe monòtona i σ-àlgebra, respectivament, generades per $\mathcal{A}$. Seguiu els següents apartats per arribar a demostrar que

$$\Sigma = \mathcal{C}. \tag{1}$$

Donat un conjunt $F \in \mathcal{C}$, definim

$$C_F = \{E \in \mathcal{C} : E \setminus F, F \setminus E, E \cup F \in \mathcal{C}\}.$$

(a) Demostreu que, per a tot $F \in \mathcal{C}$, C_F és una classe monòtona.

(b) Demostreu que, en realitat, per a tot $F \in \mathcal{C}$, tenim

$$C_F = \mathcal{C}.$$

Indicació: Per a la inclusió no trivial, suposeu primer que $F \in \mathcal{A}$. Recordeu que $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{A})$!

(c) Concloeu que $\mathcal{C}$ és una àlgebra de conjunts.

(d) Fent servir l'apartat anterior, demostreu (1).

4. Si una σ-àlgebra Σ de conjunts de $[-\infty, +\infty]$ conté les semirectes $(q, +\infty]$ amb $q \in \mathbb{Q}$, aleshores també conté:

- Els punts $\{x\} \subseteq [-\infty, +\infty]$.
- Els intervals de $[-\infty, +\infty]$.
- Els oberts i els tancats de $\mathbb{R}$.

Deduïu que els borelians de $[-\infty, +\infty]$ són la σ-àlgebra generada per les semirectes $(q, +\infty]$ amb $q \in \mathbb{Q}$ i que, per tant, una funció

$$f : (X, \Sigma') \longrightarrow [-\infty, +\infty]$$

és mesurable Borel si $\{x \in X : f(x) > q\} \in \Sigma'$ per a tot $q \in \mathbb{Q}$.

5. Sigui X un conjunt infinit no numerable i sigui Σ la col·lecció de tots els subconjunts $E \subseteq X$ tals que E o bé $E^c = X \setminus E$ és finit o numerable.

(a) Proveu que Σ és una σ-àlgebra.

(b) Per a tot $E \in \Sigma$, definim $\mu(E) = 0$ si E és finit o numerable i $\mu(E) = 1$ en cas contrari. Proveu que μ defineix una mesura sobre (X, Σ).

6. A $\mathbb{R}^n$, demostreu que tot hiperplà

$$H_{k,c} = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_k = c\}, \quad 1 \leq k \leq n, \ c \in \mathbb{R},$$

és un conjunt nul. Recordeu que, donat un espai de mesura (X, Σ, μ), diem que un conjunt $E \subseteq X$ és nul si $E \in \Sigma$ i $\mu(E) = 0$.

7. Conjunt ternari de Cantor: un conjunt no numerable de mesura zero. Prenem l'interval $[0, 1]$, el partim en 3 trossos iguals i ens quedem amb la part central:

$$A_1 = (1/3, 2/3).$$

Amb les dues parts que en resten, fem el mateix procés, de manera que ara ens quedem amb

$$A_2 = (1/3^2, 2/3^2) \cup (7/3^2, 8/3^2).$$

Repetim el procés recursivament i acabem definint

$$G = \cup_{j \geq 1} A_j,$$

on A_j és una unió de 2^{j-1} intervals de longitud $1/3^j$.

(a) Demostreu que $|G| = 1$, i que per tant, el conjunt $K = [0, 1] \setminus G$ té mesura 0. K s'anomena *conjunt ternari de Cantor*.

(b) Observeu que cap subconjunt connex de K té més d'un punt (diem que K és *totalment disconnex*).
Indicació: Escriviu K com a intersecció numerable i observeu que no pot contenir cap interval.

(c) Demostreu que K no és numerable.
Indicació: Trobeu una manera d'indentificar cada punt de K amb una successió binària. Un cop fet això, feu un argument de reducció a l'absurd.

8. No mesurabilitat a $\mathbb{R}$: Considerem la relació d'equivalència induïda per $\mathbb{Q}$ sobre el grup additiu $(\mathbb{R},+)$. És a dir, direm que $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Sigui

$$\widetilde{E} := \frac{[0,1]}{\sim} = \{\tilde{x} : x \in [0,1]\}$$

el conjunt quocient format per les classes d'equivalència $\tilde{x}$ amb $x \in [0,1]$. És clar que podem formar un subconjunt $E \subseteq [0,1]$ prenent un representant de cada classe d'equivalència d'$\widetilde{E}$. Provarem que E no és mesurable per reducció a l'absurd:

Definim $A = \{r_n\}_n = \mathbb{Q} \cap [-1,1]$, el conjunt dels racionals a $[-1,1]$. Per a cada $n \geq 1$, definim

$$E_n = r_n + E = \{r_n + x : x \in E\}.$$

(a) Demostreu que $\{E_n\}_n$ és una col·lecció disjunta de conjunts tals que

$$[0,1] \subseteq \bigcup_{n\geq 1} E_n \subseteq [-1,2].$$

(b) Feu servir l'additivitat de la mesura de Lebesgue per arribar a una contradicció amb la mesurabilitat d'E.

9. BONUS – Mesures doblants a $\mathbb{R}^n$: Considerem una mesura de Borel μ a $\mathbb{R}^n$. Diem que μ és *doblant* si existeix una constant $C > 1$ tal que, per a tot $x \in \mathbb{R}^n$ i tot $r > 0$, es compleix

$$\mu(B(x,2r)) \leq C\mu(B(x,r)), \tag{2}$$

on $B(x,r)$ denota la bola euclidiana de centre x i radi r. Per exemple, la mesura de Lebesgue és doblant amb $C = 2^n$.

(a) Demostreu

$$\mu \text{ doblant a } \mathbb{R}^n \Rightarrow \mu(\mathbb{R}^n) = \infty.$$

(b) Deduïu que, donat un interval acotat i no buit $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, la mesura μ definida sobre els borelians $E \subseteq \mathbb{R}$ per

$$\mu(E) = |E \cap I|$$

no és doblant. Trobeu un exemple explícit de bola on es vegi que la condició (2) no pot ser certa en general.

10. Sigui f una funció real o complexa definida sobre un espai mesurable (X, Σ) amb $\Sigma \subsetneq \mathcal{P}(X)$. És cert que f és mesurable si i només si ho és $|f|$? En cas que alguna de les implicacions no sigui certa, doneu un contraexemple que ho demostri.

11. Sigui $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Demostreu que:

(a) Si f és mesurable i $a \in \mathbb{R}^n$, aleshores $f_a(x) := f(x + a)$ és mesurable.

(b) Si f és contínua gairebé per tot $x \in \mathbb{R}^n$, aleshores f és mesurable.

(c) Si $n = 1$ i f és derivable, aleshores f' és mesurable.

(d) Si $n = 1$ i f és monòtona, aleshores f és mesurable.

12. Siguin (X_1, Σ_1, μ_1) i (X_2, Σ_2, μ_2) dos espais de mesura σ-finits. Direm que una aplicació

$$\rho : X_1 \longrightarrow X_2$$

és una *transformació que preserva la mesura* si, per a tot conjunt $E \in \Sigma_2$, $\rho^{-1}(E) \in \Sigma_1$ i, a més,

$$\mu_1(\rho^{-1}(E)) = \mu_2(E).$$

Suposant que ρ preserva la mesura entre X_1 i X_2, proveu que si $f_2 : X_2 \to \mathbb{R}$ és una funció no negativa i μ_2-mesurable, aleshores:

(a) La funció

$$f_1 = f_2 \circ \rho : X_1 \longrightarrow \mathbb{R}$$

és no negativa i μ_1-mesurable.

(b) Les funcions f_1 i f_2 són *equimesurables*, és a dir, per a tot $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\mu_1(\{x \in X_1 : f_1(x) > \alpha\}) = \mu_2(\{x \in X_2 : f_2(x) > \alpha\}).$$

(c) Doneu un exemple d'espais X_1, X_2 i de transformació $\rho : X_1 \to X_2$ que preservi la mesura.