Anàlisi Real i Funcional

Mesura II i Integració

13. Per $n \geq 1$, suposem que $f, f_n : X \longrightarrow \mathbb{C}$ són funcions mesurables sobre un espai de mesura (X, Σ, μ) complet. Direm que la successió $\{f_n\}_n$ *convergeix en mesura a* f si, per a tot $\varepsilon > 0$, existeix $n_0 \geq 1$ tal que

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Proveu que si $\{f_n\}_n$ convergeix a f en mesura, aleshores existeix una successió parcial $\{f_{n_k}\}_k$ que convergeix a f a gairebé tot punt (respecte de μ), és a dir,

$$f_{n_k}(x) \xrightarrow{k} f(x), \quad \forall x \in X \setminus \mathcal{N},$$

amb $\mu(\mathcal{N}) = 0$.

14. Sigui $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un interval tancat i acotat. Demostreu:

(a) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ és integrable Riemman a $[a, b]$, aleshores la gràfica

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b]\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

és un conjunt nul del pla (respecte de la mesura de Lebesgue).

(b) Feu servir (a) per veure que, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és contínua, aleshores

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

també és nul.

(c) Sense fer servir cap dels apartats anteriors, demostreu que donats $n, m \geq 1$ i $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ contínua, aleshores

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$$

és un conjunt nul de l'espai $\mathbb{R}^{n+m}$.
Indicació: Si $|\cdot|_n$ denota la mesura de Lebesgue a $\mathbb{R}^n$, haureu de fer servir que per X, Y mesurables a $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ respectivament, es té $X \times Y$ mesurable a $\mathbb{R}^{n+m}$ i $|X \times Y|_{n+m} = |X|_n |Y|_m$. A més, recordeu que si B és una bola de radi $r > 0$ a $\mathbb{R}^n$, aleshores $|B|_n = c_n r^n$, on c_n és una constant universal que només depèn de la dimensió.

15. Anomenem *contingut exterior* d'un conjunt $E \subseteq \mathbb{R}$ a

$$\gamma^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{N} |I_n| : N \geq 1, E \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} I_n, \ \text{amb } I_n \text{ intervals oberts d'}\mathbb{R} \right\}.$$

És γ^* una mesura exterior sobre $\mathbb{R}$?

16. Sigui (X, Σ, μ) un espai de mesura. Es diu que:

- μ és *semifinita* si per a tot $E \in \Sigma$ amb $\mu(E) = \infty$ existeix $F \subseteq E$ mesurable tal que $0 < \mu(F) < \infty$.
- μ és *σ-finita* si existeix una família numerable de conjunts $\{E_j\}_j \subseteq \Sigma$ amb $\mu(E_j) < \infty$ per a tot $j \geq 1$ de manera que $X = \bigcup_j E_j$.

(a) Demostreu que tota mesura σ-finita és semifinita.

(b) Proveu que si μ és semifinita, $E \in \Sigma$ i $\mu(E) = \infty$, aleshores per a tot $C > 0$ existeix $F \subset E$ mesurable amb $C < \mu(F) < \infty$.

17. Sigui $(X, \mathcal{P}(X))$ un espai mesurable i $f : X \to [0, +\infty]$ una funció definida sobre els elements d'X.

(a) Comproveu que f defineix una mesura μ sobre l'espai $(X, \mathcal{P}(X))$ a partir de la fórmula següent:

$$\mu(E) = \sum_{x \in E} f(x) = \sup \left\{ \sum_{x \in F} f(x) : F \subseteq E, F \text{ finit} \right\}, \quad E \subseteq X.$$

(b) Comproveu que μ és σ-finita si i només si $f(x) < \infty$ per a tot $x \in X$ i $\{x \in X : f(x) > 0\}$ és numerable.

(c) Estudieu la mesura donada per la funció constant $f \equiv 1$.

(d) Fixat $x_0 \in X$, estudieu la mesura donada per la funció $f = \chi_{\{x_0\}}$.

18. Sigui $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una funció Lipschitz, és a dir, tal que existeix una constant $C > 0$ complint

$$f(B(x, r)) \subseteq B(f(x), Cr),$$

per a tot $x \in \mathbb{R}^n$ i $r > 0$, i sigui $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunt de mesura de Lebesgue zero. Demostreu que la imatge $f(\mathcal{N})$ també és mesurable i de mesura zero. Quan una funció compleix que la imatge de tot conjunt nul és nula es diu que compleix la *propietat N de Luzin*.

19. Sigui (X, Σ, μ) un espai de mesura. Proveu que

(a) Si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ és integrable, aleshores el conjunt

$$E = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$$

té mesura σ-finita.

(b) La mesura μ és finita si i només si existeix $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrable tal que $\inf_{x \in X} f(x) > 0$.

20. Donat l'espai mesurable $(\mathbb{R}^n, \mathcal{P}(\mathbb{R}^n))$, definim la següent funció sobre conjunts $E \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$\delta_0(E) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \in E, \\ 0 & \text{si } 0 \notin E. \end{cases}$$

(a) Comproveu que δ_0 és una mesura boreliana, finita, completa i regular. Relacioneu-la amb l'apartat (d) de l'Exercici 17.

(b) Donat un conjunt $E \subseteq \mathbb{R}^n$ i una funció $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, trobeu el valor de

$$\int_E f(x) d\delta_0(x).$$

Aquesta mesura s'anomena *delta de Dirac al 0*. De manera anàloga es pot definir una delta de Dirac a un punt qualsevol $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

21. BONUS: Sigui μ una mesura de Borel interiorment regular i doblant[1] a $\mathbb{R}^n$. Comproveu que, per a tota $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ amb

$$\|f\|_{L^1(\mu)} = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| d\mu(x) < \infty, \tag{1}$$

la funció definida per

$$M_\mu f(x) := \sup_{B \ni x} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)| d\mu(y)$$

és μ-mesurable (el suprem es pren sobre totes les boles obertes $B \subseteq \mathbb{R}^n$ que contenen x). Demostreu que existeix una constant $C > 0$ tal que, per a tota funció que satisfà (1), es compleix

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda\, \mu(\{x \in \mathbb{R}^n : M_\mu f(x) > \lambda\}) \leq C \|f\|_{L^1(\mu)}.$$

Indicació per començar: Primer proveu que $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : M_\mu f(x) > \lambda\}$ és un conjunt obert, i feu servir que μ és interiorment regular per a estimar $\mu(E_\lambda)$.

[1] Vegeu la definició al problema 9.

22. Sigui (X, Σ, μ) un espai de mesura i sigui $f : X \to \mathbb{R}$ una funció mesurable.

(a) Per a tot $k \in \mathbb{Z}$ definim

$$A_k = \{x \in X : 2^k < |f(x)| \leq 2^{k+1}\}.$$

Demostreu que f és integrable a X si i només si la sèrie $\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^k \mu(A_k)$ és convergent. Aquesta sèrie és una *discretització diàdica* de l'integral d'$|f|$. Observeu que si f és acotada, aleshores existeix $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que la sèrie suma sobre $-\infty < k \leq k_0$.

(b) Proveu que si existeixen constants $C_1, C_2 > 0$ tals que

- $|f(x)| \leq C_1$ a.e. $x \in X$,
- $\sup_{\lambda>0} \lambda\mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}) = C_2$,

aleshores, per a tot $1 < p < \infty$, tenim $\int_X |f(x)|^p d\mu(x) < \infty$.

23. Sigui $f : \mathbb{R} \to (0, 1]$ mesurable complint $\int_{\mathbb{R}} f = 1$. Demostreu que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} n \log\left(1 + \frac{f(x)}{n}\right) dx = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} n \log\left(1 + \frac{f(x)^2}{n^2}\right) dx = 0.$$

24. Sigui $f : [0, 1] \to [0, +\infty)$ una funció mesurable tal que existeix $C \geq 0$ amb

$$\int_{[0,1]} f(x)^n dx = C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Proveu que existeix $E \subseteq [0, 1]$ tal que $f = \chi_E$ gairebé per tot.

25. Sigui $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un compacte i siguin $f_j : K \to \mathbb{R}$ funcions mesurables per a tot $j \geq 1$ complint que

- Existeix
$$f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x) \quad \text{a.e. } x \in K,$$
- Per a una certa $C > 0$, tenim
$$\int_K |f_j(x)| dx \leq C, \quad \forall j \geq 1.$$

Demostreu que f és integrable en K però doneu un contraexemple mostrant que, en general,

$$\lim_{j\to\infty}\int_K |f_j(x)|dx \neq \int_K |f(x)|dx.$$

26. Sigui $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un compacte i sigui $f : K \to \mathbb{R}$ una funció mesurable. Calculeu

$$\lim_{j\to\infty}\int_K |\cos(\pi f(x))|^j dx.$$

27. Sigui $X = Y = \mathbb{R}$ amb la mesura de Lebesgue. Definim la funció a $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \text{ i } x \leq y < x+1, \\ -1 & \text{si } x \geq 0 \text{ i } x+1 \leq y < x+2, \\ 0 & \text{en cas conrtrari.} \end{cases}$$

Feu un esquema de les regions del pla on està definida f amb els valors corresponents que pren. Proveu que

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy\,dx \neq \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx\,dy.$$

Per què això no contradiu el Teorema de Fubini?

28. Sigui (X,Σ,μ) un espai de mesura σ-finit i $f : X \to \mathbb{C}$ una funció mesurable. Definim la *funció de distribució* de f respecte de μ com

$$\lambda_f^\mu(t) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > t\}), \quad t \geq 0.$$

(a) Calculeu explícitament i feu un dibuix de λ_f^μ per a

$$f(x) = 5\chi_A(x) + 7\chi_B(x) + \chi_C(x),$$

on A, B, C són tres conjunts de Σ disjunts de mesura $0 < a, b, c < \infty$ respectivament.

(b) Tornant a un cas general, proveu que λ_f^μ és una funció decreixent i contínua per la dreta.

(c) Per $1 \leq p < \infty$, definim $L^p(\mu)$ com el conjunt de funcions μ-mesurables tals que

$$\|f\|_{L^p(\mu)} = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} < \infty.$$

Proveu que si $f \in L^p(\mu)$ per una certa $p \geq 1$, aleshores

$$\|f\|_{L^p(\mu)}^p = \int_X |f(x)|^p d\mu(x) = p \int_0^\infty t^{p-1} \lambda_f^\mu(t) dt.$$

Indicació: Comenceu pel terme de la dreta i escriviu la funció de distribució com una integral. Justifiqueu bé tots els passos!

(d) Per $1 \leq p < \infty$, també podem definir $L^{p,\infty}(\mu)$ com el conjunt de funcions μ-mesurables tals que

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(\mu)} = \sup_{t>0} t \lambda_f^\mu(t)^{1/p} < \infty.$$

Proveu que $L^p(\mu) \subseteq L^{p,\infty}(\mu)$. Doneu un exemple que mostri que, en general, la inclusió és estricta.