# Anàlisi Real i Funcional

*Espais de Banach i Operadors*

**29.** Siguin $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ dues normes sobre un espai vectorial $E$ de manera que existeix una constant $C > 0$ tal que, per a tot $x \in E$,

$$C^{-1}\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C\|x\|_2.$$

Direm que les normes són *equivalents*. Comproveu que $(E, \|\cdot\|_1)$ és de Banach si i només si $(E, \|\cdot\|_2)$ també ho és.

**30.** Sigui $E$ un espai normat i $F \subseteq E$ un subespai vectorial.

(a) $F$ de Banach $\Rightarrow$ $F$ tancat en $E$.

(b) $E$ de Banach i $F$ tancat en $E \Rightarrow F$ de Banach.

D'aquí deduïm que, si $E$ és un espai de Banach i $F \subseteq E$ un subespai, aleshores

$$F \text{ de Banach } \iff F \text{ tancat en } E.$$

**31.** Sigui $E$ un espai vectorial.

(a) Proveu que si $E$ és de dimensió finita, aleshores totes les normes que hi puguem definir són equivalents, i amb qualsevol d'elles, $E$ és de Banach.

(b) Deduïu que si $E$ és un espai normat i $F$ és un subespai vectorial de dimensió finita, aleshores $F$ és tancat en $E$.

**32.** Sigui $(E, \|\cdot\|)$ un espai normat i $F \subsetneq E$ un subespai tancat propi. Sigui $d$ la mètrica induïda per $\|\cdot\|$, és a dir, $d(x,y) = \|x-y\|$, per a tot $x, y \in E$.

(a) Demostreu que per a cada $0 < \delta < 1$, existeix $z \in E$ de norma 1 tal que $d(z, F) \geq \delta$.
*Indicació: Fixeu $x \notin F$ i preneu $y \in F$ tal que $\|x-y\| \leq d(x,F)/\delta$.*

(b) Demostreu que si la bola tancada $\overline{B_E}(0,1) = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ és compacta, aleshores $E$ és de dimensió finita.
*Indicació: Preneu un recobriment finit $\{B_E(x_n, \delta)\}_{n=1}^N$ de $\overline{B_E}(0,1)$ amb $x_1, ..., x_N$ de $\overline{B_E}(0,1)$, i proveu que $E = \langle x_1, ..., x_N\rangle$. Recordeu l'apartat b) de l'Exercici 31.*

**33.** Definim els següents espais vectorials de successions de nombres complexos $\{x_n\}_n \subseteq \mathbb{C}$:

$$c_{00} = \{x = \{x_n\}_n : \{x_n \in x : x_n \neq 0\} \text{ és un conjunt finit}\},$$

$$c_0 = \{x = \{x_n\}_n : x_n \xrightarrow{n} 0\},$$

$$c = \{x = \{x_n\}_n : x \text{ és convergent}\},$$

$$\ell^\infty = \{x = \{x_n\}_n : x \text{ és acotada}\}.$$

És clar que $c_{00} \subsetneq c_0 \subsetneq c \subsetneq \ell^\infty$.

(a) Donant per sabut que

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \geq 1} |x_n|$$

defineix una norma sobre $\ell^\infty$ (i per tant, sobre els subespais $c_{00}, c_0, c$ que hem definit), proveu que $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$, $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ i $(c, \|\cdot\|_\infty)$ formen espais de Banach.

(b) Proveu que $c_{00}$ és dens a $c_0$. Perquè això demostra que $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ no és de Banach?

(c) És $c_{00}$ dens a $c$? I a $\ell^\infty$?

*NOTA: Compte amb la notació! Quan prengueu una successió d'elements d'aquests espais, denoteu-la per $\{x^j\}_j$, per exemple, per no confondre-la amb $x^j = \{x^j_n\}_n$.*

**34.** Sigui $L^2_o = \{f \in L^2([-1,1]) : f(t) = -f(-t) \text{ a.e } t\}$.

(a) Proveu que si $\{f_n\}_n \subseteq L^2_o$ convergeix cap a una certa funció $f \in L^2([-1,1])$, aleshores

$$\int_{[-1,1]} |f(t) + f(-t)|^2 dt = 0.$$

(b) Deduïu que $(L^2_o, \|\cdot\|_2)$ és un espai de Banach.

**35.** Sigui $(X, \mu)$ un espai de mesura complet. Proveu les següents afirmacions (feu servir el Problema 13):

(a) Per $1 \leq p \leq \infty$, si $\{f_n\}_n \subseteq L^p(\mu)$ és una successió de funcions. Aleshores:

$$f_n \xrightarrow{n} f \quad \text{en } L^p \quad \Longrightarrow \quad f_n \xrightarrow{n} f \quad \text{en mesura.}$$

D'aquí podem deduïr que si tenim una successió convergent en $L^p$ a $f$, aleshores existeix una parcial $\{f_{n_k}\}_k$ tal que

$$f_{n_k}(x) \xrightarrow{k} f(x), \quad \text{a.e } x \in X.$$

***Alerta 1***: *En general, NO és cert que la convergència en $L^p$ impliqui convergència puntual de la successió de partida!*

***Alerta 2***: *Pel que fa al recíproc, la convergència puntual d'una successió NO implica convergència en $L^p$!*

(b) Per $1 \leq p < \infty$, siguin $f, f_n : X \to \mathbb{C}$, $n \geq 1$ funcions mesurables tals que:

- $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ a.e. $x \in X$.
- Existeix $g \in L^p(\mu)$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ a.e. $x \in X$.

Aleshores sí que tenim $f_n \to f$ en $L^p$. És cert això per a $p = \infty$?

**36.** Sigui $\mathcal{C}^1([0,1])$ el conjunt de funcions $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ en un entorn obert de $[0,1]$. Proveu que si $\|\cdot\|_\infty$ denota la norma del suprem sobre l'interval $[0,1]$, aleshores

$$\|f\|_{\mathcal{C}^1([0,1])} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

és una norma ben definida que dóna estructura d'espai de Banach a $\mathcal{C}^1([0,1])$. Se us acut alguna norma equivalent? Quina norma posaríeu a $\mathcal{C}^k([0,1])$ per $k \geq 2$?

**37.** Considerem l'operador derivada $Df = f'$ per tota $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$. Estudieu la seva acotació en els següents casos. Si ho està, calculeu la seva norma i digueu si és accessible[1].

(a) $D : (\mathcal{C}^1([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.

(b) $D : (\mathcal{C}^1([0,1]), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^1}) \to (\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.

**38.** Sigui $z = \{z_n\}_n$ una successió de nombres complexos. Recordeu que

$$\ell^2 = \left\{ x = \{x_n\}_n \subseteq \mathbb{C} : \|x\|_2 = \left( \sum_n |x_n|^2 \right)^{1/2} < \infty \right\}.$$

[1]Direm que la norma d'un operador acotat $T : E \to F$ és *accessible* si existeix un element $x \in E \setminus \{0\}$ tal que $\|Tx\|_F = \|T\|_{E\to F}\|x\|_E$.

(a) Demostreu que si fixem $z \in \ell^\infty$, aleshores $T_z$ definit per

$$T_z x = T_z(\{x_n\}_n) = \{z_n x_n\}_n$$

és lineal i acotat de $\ell^2$ a $\ell^2$ amb $\|T_z\|_{\ell^2 \to \ell^2} = \|z\|_\infty$.

(b) Suposem que $\{z_n x_n\}_n \in \ell^2$ per a tota successió $x \in \ell^2$. Proveu que $z \in \ell^\infty$.

**39.** Sigui $1 < p < \infty$ i $p'$ el seu exponent conjugat $\left(p' = \frac{p}{p-1}\right)$. Fixem $y = \{y_n\}_n \in \ell^{p'}$.

(a) Proveu que si definim

$$u_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}, \quad \forall x = \{x_n\}_n \in \ell^p,$$

tenim que $u_y : \ell^p \to \mathbb{C}$ és una forma lineal i contínua amb $\|u_y\|_{\ell^p \to \mathbb{C}} = \|y\|_{p'}$.

(b) Comproveu que si $u_y = u_z$, aleshores $y = z$.

**40.** Considerem $\mathbb{C}[x]$ l'espai de polinomis d'una variable amb coeficients en $\mathbb{C}$. Donat $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ un polinomi de grau $n$, li associem la norma $\|p\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$.

(a) Li dóna això una estructura d'espai de Banach?

(b) Proveu que, per qualsevol $k \geq 0$, l'operador

$$p(x) \longmapsto x^k p(x)$$

és una isometria de $(\mathbb{C}[x], \|\cdot\|_1)$ en si mateix.

(c) Relacioneu això amb espais de successions i escriviu la conclusió que es pot treure en aquest cas.

**41. BONUS:** Sigui $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i $1 \leq p \leq \infty$. Definim l'operador

$$T_g f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy, \quad \text{on } f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

(a) Observeu que $T_g$ és un operador lineal.

(b) Proveu que, en els casos $p = 1$, $p = \infty$,

$$T_g : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n) \tag{1}$$

és un operador acotat amb $\|T_g\|_{L^p \to L^p} \leq \|g\|_{L^1}$.

(c) Observeu que, si definim

$$\mu(E) = \int_E |g(y)| dy$$

per a tot $E \subseteq \mathbb{R}^n$ mesurable Lebesgue, aleshores $\mu$ és una mesura a $\mathbb{R}^n$ (de fet, finita). Per tant, $d\mu(y) = |g(y)|dy$.

(d) Demostreu que (1) també és acotat en els casos $1 < p < \infty$.
*Indicació: Compareu-ho amb el cas $p = 1$ i mireu com salvar les diferències. Si voleu, podeu fer servir l'apartat (c).*

**42.** Resol el següent problema de valors inicials a $[0, 1]$ com a sèrie de Neumann:

$$u''(t) - tu(t) = 2t, \quad u(0) = 0, \; u'(0) = 0.$$