Els orígens de la dinàmica complexa

Núria Fagella Rabionet

1 Introducció

El camp de la dinàmica complexa ha experimentat molts avenços en els últims vint anys. Després d'un periode letàrgic de gairebé 60 anys, aquesta àrea de les matemàtiques ha despertat gràcies a les innovadores aportacions de renombrats matemàtics com Denis Sullivan, Adrien Douady, John Hubbard, Mikhail Lyubich i Jean Christophe Yoccoz entre d'altres.

No ens cal oblidar però, que els fonaments d'aquesta teoria van ser establerts als començaments d'aquest segle, principalment per dos matemàtics francesos anomenats Pierre Fatou i Gaston Julia, les aportacions dels quals van ser crucials per al desenvolupament modern de la dinàmica complexa.

Dinàmica complexa (1-dimensional) és el nom (modern) que rep l'estudi de la iteració de funcions holomorfes (ò analítiques complexes) d'una variable. Això vol dir que, donada una funció ϕ holomorfa definida al pla complex (ò a l'esfera de Riemann), volem estudiar el sistema dinàmic que ve donat pels seus iterats $\phi^n = \phi \circ \overset{n)}{\cdots} \circ \phi$.

Però, per què van decidir Fatou i Julia estudiar iteració de funcions? En aquestes pàgines intentarem fer un breu relat de còm van ser els començaments de la teoria de la iteració, quí foren els seus protagonistes i quines les seves motivacions. Sense fer cap intent d'aprofondir en la matèria, sí volem arribar fins alguns dels resultats continguts als treballs de Fatou i Julia, i que van resultar ser sorprenents a la seva època.

2 El mètode de Newton i la teoria local

El mètode de Newton és probablement el mètode iteratiu més conegut i antic que trobem a les matemàtiques. Aquest mètode serveix per aproximar solucions reals ò complexes de l'equació $f(z) = 0$. Escollint un valor arbitrari z_0 prou proper a l'arrel buscada α, el mètode de Newton ens proporciona una successió de punts $\{z_n\}$ amb

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

i tal que convergeix cap a α.

La primera menció sobre iteració de funcions holomorfes es troba en dos estudis detallats del mètode de Newton; un fet per l'alemany Ernst Schröder (1841-1902) al voltant de 1870 [S1, S2], i un altre, de manera independent, pel britànic Arthur Cayley (1821-1895) al 1879 [C1, C2].

Diferents versions del mètode de Newton existeixen des de segles abans de Schröder i Cayley, sempre però des d'un punt de vista d'algoritme real. La diferència marcada pels estudis d'aquests dos matemàtics, és la consideració del mètode com a iteració de la funció holomorfa

$$N(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)},$$

en el pla complexe. Però, de fet, el més significant va ser l'adonar-se'n de que el mètode de Newton era una de les moltes funcions possibles a iterar i de que podia ser útil entendre l'iteració d'una funció holomorfa arbitrària $\phi(z)$, en vistes a trobar mètodes potser millors d'aproximació d'arrels. Schröder va demostrar el següent resultat fonamental.

Teorema 1 (Teorema del punt fix) *Sigui $\phi(z)$ una funció holomorfa en un entorn d'un punt α satisfent $\phi(\alpha) = \alpha$ amb $|\phi'(\alpha)| < 1$. Llavors, per a tot z en un entorn de α tenim que $\lim_{n\to\infty} \phi^n(z) = \alpha$.*

Els punts que satisfan $f(\alpha) = \alpha$ s'anomenen *punts fixos*. El nombre $\rho = \phi'(\alpha)$ rep el nom de *multiplicador* del punt fix. Si es dona el cas $|\rho| < 1$, diem que el punt fix és *atractor*. Amb aquest teorema Schröder va explicar per què funcionava el mètode de Newton, veient que les arrels simples de $f(z)$ són punts fixos atractors de $N(z)$. (Si l'arrel és múltiple, la singularitat de $N(z)$ és evitable i el mateix és cert). Schröder també va adonar-se'n de que si $\rho = 0$, la convergència cap a l'arrel era més ràpida, i en general, ho era més amb més alt fos l'ordre de la primera derivada diferent de zero. Aquesta observació va motivar-lo per intentar trobar altres mètodes de convergència i per tant, a estudiar iteració de funcions holomorfes en general.

Un segon problema que va ser adressat (sense gaires resultats) per Schröder i Cayley va ser el de la iteració del mètode de Newton lluny dels entorns de les arrels. Donat un polinomi quadràtic $f(z)$ amb les seves dues arrels complexes a i b, quines llavors z_0 produiran una successió que convergeixi cap a a, i quines llavors en donaran una que convergeixi cap a b? En general, si α és un punt fix atractor de la funció $\phi(z)$, la *conca d'atracció de α* es defineix com el conjunt de punts del pla que produeixen una successió convergent cap a α, és a dir,

$$\mathcal{A}(\alpha) = \{z \in \mathbb{C} \mid \phi^n(z) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha\}.$$

Per tant, el problema consistia en saber quins punts del pla pertanyien a cada una de les conques d'atracció. El cas quadràtic va ser resolt tant per Schröder com per Cayley, amb la demostració del següent teorema.

Teorema 2 *Sigui $p(z)$ un polinomi quadràtic amb dues arrels diferents. Sigui $N_p(z)$ el mètode de Newton aplicat a $p(z)$ i sigui L la bisectriu perpendicular del segment que conecta les dues arrels de p. Siguin H_1 i H_2 els semiplans que contenen les arrels α_1 i α_2 respectivament. Llavors, $\mathcal{A}(\alpha_1) = H_1$ i $\mathcal{A}(\alpha_2) = H_2$. No obstant, si $z_0 \in L$, aleshores la successió $N_p^n(z_0)$ no convergeix ni cap a α_1 ni cap a α_2.*

Cayley va veure aquest resultat com el punt de partida per l'estudi de les arrels de polinomis de grau arbitrari. No obstant, mai va passar de grau 2. De fet, Cayley va escriure

> ... La divisió [del pla en conques diferents] es fa sense dificultat en el cas quadràtic; però en el cas següent, el d'una equació cúbica, no és en absolut obvi quina és la divisió; i l'autor no ha aconseguit trobar-la... [C3]

No és difícil endevinar les dificultats que va trobar Cayley al voler fer aquest estudi. Com es va demostrar posteriorment (uns quaranta anys més tard) pels graus majors ò iguals a tres, les divisions entre les conques d'atracció de les arrels respectives són "corbes" fractals extremadament complicades que divideixen el pla en infinites components connexes. A més, qualsevol entorn d'un punt arbitrari en aquestes corbes, conté punts que pertanyen a totes les conques d'atracció. Aquestes dificultats són la causa de que fos virtualment impossible resoldre aquest problema pel camí del càlcul directe, tal i com Schröder i Cayley ho intentaven.

Tot i que un nombre considerable de matemàtics com Korkine, Farkas, Koenigs, Böttcher, Siegel, Darboux, Leau i altres van fer importants aportacions a la recient nascuda teoria de

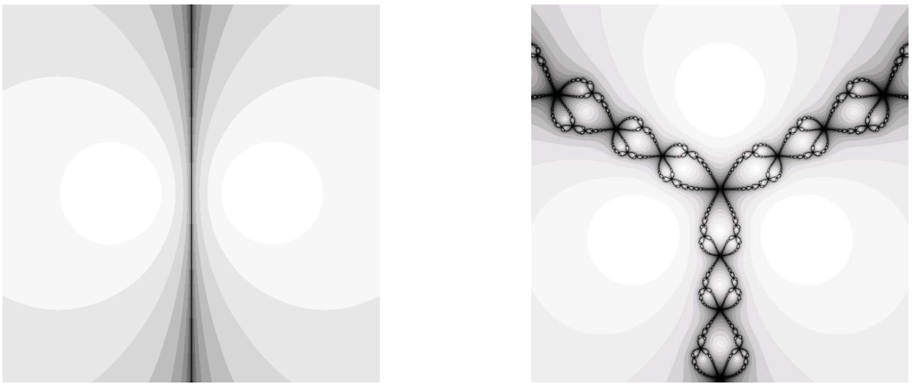

Figure 1: Les conques d'atracció del mètode de Newton per $q(z) = z^2 - 1$ (esquerra) i per $p(z) = z(z-1)(z-e^{i\pi/6})$ (dreta). El color negre indica els punts a la frontera entre diferents conques d'atracció.

iteració de funcions holomorfes, aquestes van ser sempre de caire local, és a dir, aprofondien en el comportament dels iterats en entorns dels punts fixos, no només en el cas atractor, sino per diferents valors del multiplicador.

3 El *Grand Prix* i la teoria global

No va ser fins als treballs de Pierre Fatou (1878-1929) i de Gaston Julia (1893-1978) als voltans dels anys 20, que la teoria global va ser seriosament adreçada. Aquest dos matemàtics van estudiar principalment la iteració de funcions holomorfes de l'esfera de Riemann, és a dir, funcions del tipus $\phi(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ on $p(z)$ i $(q(z)$ són polinomis i z pertany al pla ampliat $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$, identificat amb l'esfera mitjançant la projecció estereogràfica. Per aquestes funcions es defineix el *grau* de ϕ com el màxim dels graus de p i q, i es consideren sempre funcions de grau $d \geq 2$, ja que les funcions de grau 1 (transformacions de Möbius) no són interessants des del punt de vista iteratiu.

Un punt $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ és un *punt crític* de ϕ si $\phi'(z) = 0$. Aquests són els únics punts on ϕ no és un homeomorfisme local. Les funcions racional són expansives en mitjana però molt contractives al voltant dels punts crítics. Aquesta tensió és la responsable de que la dinàmica sigui tan interessant. Recordem que, per exemple, els zeros d'una funció $f(z)$ són punts crítics (i fixos) de la funció racional donada pel mètode de Newton $N_f(z)$.

De gran influència en Fatou i Julia van ser els treballs de Cantor, Lebesgue, Borel i Baire sobre conjunts i funcions que aleshores van ser anomenades "patològiques", altrament tan criticats per altres matemàtics més conservadors de l'època. (En una carta de Charles Hermite a Thomas Stieltjes es llegeix: " ... Fujo amb por i horror davant la plaga lamentable de funcions sense derivades ... [HCS]".)

Però Fatou va demostrar que molts d'aquests conjunts patològics apareixen de manera natural en la iteració de funcions complexes. En el seu curt article [F1] del 1906, va demostrar el següent teorema, considerat com el primer resultat general de caire global.

Teorema 3 *Sigui $\phi(z)$ una funció racional de grau $d > 1$, amb un únic punt fix atractor α. Suposem que un entorn de α conté tots els punts crítics de ϕ i en aquest entorn, tots els punts convergeixen a α sota iteració. Llavors, el conjunt J a l'esfera de Riemann, de punts que no convergeixen a α sota iteració és un conjunt totalment disconnex i perfecte.*

Aquest conjunt J va ser un dels primers anàlegs 2-dimensionals dels conjunts de Cantor de la recta real.

A l'any 1915, l'Acadèmia de la Ciència Francesa va anunciar que donaria el *Grand Prix des Sciences mathématiques* de 1918 – i 3000 francs – al millor estudi sobre iteració. A la convocatòria del Premi, es mencionava la importància de la iteració en, per exemple, els treballs de Henri Poincaré sobre mecànica celest. Es demanava específicament que els treballs candidats adressessin el problema des d'un punt de vista global.

L'Acadèmia va otorgar el premi a Gaston Julia pel seu article [J1] del 1918 tot i calificant-lo com a treball d'un gran nivell. També va otorgar una menció honorífica al segon concursant, el matemàtic Samuel Lattès. Fatou no va arribar a concursar tot i que el seu tractat [F2] del 1919 va estar clarament motivat pel premi. La raó sembla ser que Fatou va anunciar diversos dels seus resultats al Decembre del 1917 [F3]. Dues setmanes més tard, Julia va anunciar que ell ja havia demostrat aquells resultats anteriorment, donant com a prova quatre cartes segellades dipositades a la secretaria de l'Academia amb dates 4 de Juny, 17 d'Agost, Setembre 17 i Decembre 10 de 1917. La qüestió de prioritat va ser poc després confirmada per l'Acadèmia, el que segurament devia fer que Fatou descartés la idea de concursar. Aquest episodi ha crescut fins agafar enormes proporcions en el folklore matemàtic. Fins i tot es diu que Julia va acusar públicament a Fatou de robar els seus resultats, tot i que no sembla haver cap fonament per aquesta afirmació.

4 Els conjunts de Fatou i Julia

La innovació més important en els treballs de Fatou i Julia és, sens dubte, l'ús de la teoria de famílies normals per a partir l'esfera en dos conjunts de comportament dinàmic totalment diferent; aquests conjunts són avui coneguts com els conjunts de Fatou i de Julia.

Definició Sigui ϕ una funció holomorfa a $\widehat{\mathbb{C}}$. Definim el *conjunt estable ò de Fatou* de ϕ, $F(\phi)$, com el conjunt de punts $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ pels que existeix un entorn U de z on $\{\phi^n|_U\}$ és una família normal. És a dir, tota successió d'iterats té una parcial convergent uniformement sobre compactes de U, bé cap a una funció holomorfa ò bé cap a infinit.

Intuitivament, els punts del conjunt estable són aquells que es comporten, sota iteració, igual que els seus veïns propers. Per exemple, tots els punts dins d'una conca d'atracció pertanyen al conjunt estable, ja que la successió d'iterats convergeix uniformement a la funció constant $\widetilde{\phi}(z) \equiv \alpha$. Poden haver altres tipus de punts al conjunt estable. Tots junts formen un conjunt obert i *totalment invariant*, és a dir, les imatges i preimatges dels punts de $F(\phi)$ pertanyen a $F(\phi)$.

El complementari del conjunt de Fatou $J(\phi) = \widehat{\mathbb{C}} \setminus F(\phi)$ s'anomena el *conjunt de Julia de* ϕ. El conjunt de Julia és tancat (ja que és el complementari d'un obert) i també és totalment invariant. Aquests són els punts *inestables* ò "caòtics", és a dir, punts que pertanyen a la frontera de diferents components estables. Quan parlem del mètode de Newton, aquests punts són els que donen lloc a successions que no convergiran cap a cap de les arrels de la funció.

Tant Fatou com Julia van estar molt intrigats davant el fet de que el conjunt de Julia, en molts casos, semblava ser un conjunt peculiar i complicat (al menys pels standards de l'època). Fatou ja havia descrit alguns casos on J era totalment disconnex i perfecte però, més en general, van demostrar, d'entre altres, les següents propietats.

- J és perfecte.
- L'interior de J és buit ò be J és tota l'esfera.
- Per qualsevol $z \in J$, les preimages de z són denses a J.
- J és la clausura dels punts periodics repulsors.

Per *punt periodic* de periode n entenem un punt $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$ tal que $\phi^n(\alpha) = \alpha$, és a dir, un punt fix de ϕ^n. El seu multiplicador és llavors $\rho = (\phi^n)'(\alpha)$. Si $|\rho| < 1$ el punt periòdic s'anomena atractor, ja que "atrau" punts propers sota la iteració de ϕ^n. En cas de tenir $|\rho| > 1$ el punt periòdic s'anomena repulsor, ja que punts propers a α "s'allunyen" d'ell al menys durant les primeres iteracions de ϕ^n. És fàcil veure que els punts periòdics repulsors no poden estar al conjunt estable i per tant pertanyen al conjunt de Julia. No ho és tant però veure que aquests han de ser densos dins de J.

Una altra propietat ben coneguda dels conjunts de Julia és *l'autosimilitud*. Si prenem qualsevol tros J_0 de J (i.e. l'intersecció de qualsevol obert V de $\widehat{\mathbb{C}}$ amb J) trobarem un nombre n tal que $\phi^n(J_0) = J$. Donat que ϕ preserva els angles (és una funció holomorfa) i per tant no distorsiona les imatges, això justifica el fet de que al fer augments de petites porcions d'un conjunt de Julia veiem sempre parts del conjunt total. Tot i que no tenien ordinadors a l'abast, Fatou i Julia ja van preveure l'autosimilitud (veure Figura 2).

> ... Un pot dir que de qualsevol petita porció de J, un pot generar J en la seva totalitat en un nombre finit d'iteracions ... L'estructura de J és la mateixa que la de qualsevol de les seves parts [J1].

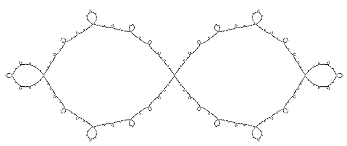

Figure 2: (Esquerra) Intent de Julia de dibuixar J pel polinomi cúbic $\phi(z) = (1/2)(3z - z^3)$. A la dreta podem veure el conjunt de Julia de ϕ.

5 Desenvolupament posterior

Fatou i Julia van fer una descripció extensa i detallada dels conjunts F i J però també van deixar en el camí multitud de problemes oberts. L'exemple més relevant és potser la classificació complerta de les components del conjunt de Fatou. No va ser fins al 1982 que D. Sullivan va aplicar la teoria de funcions quasiconformes per a demostrar que no podien existir dominis errants. Aquest va ser l'inici d'una nova etapa, l'actual, en l'estudi de la teoria de iteració. També el neixement dels ordinadors ha jugat un paper important en aquest resurgiment. Potser van ser les imatges, que no havien pogut ser vistes fins al moment, les veritables responsables de la popularitat de la dinàmica complexa en els anys 80.

Molts dels problemes ja establerts per Fatou i Julia segueixen essent avui objecta de recerca activa. De fet, alguns dels més relevants són fins i tot anteriors a aquests dos matemàtics, com per exemple molts aspectes de la teoria local al voltant de punts fixos amb multiplicador de mòdul 1.

Però un dels objectes que ha atret més atenció en els íltims anys només va ser intuit de manera passatgera per Fatou. Ens referim al renombrat *conjunt de Mandelbrot*, M, que correspon al conjunt de valors $c \in \mathbb{C}$ pels quals el conjunt de Julia de $P_c(z) = z^2 + c$ és connex (veure Figura 3). Tot i que Fatou ja va parlar en ocasions d'aquesta família de polinomis per il.lustrar com perturbacions d'un conjunt de Cantor podien continuar tenint les mateixes propietats, mai va adreçar el problema de l'estudi sistemàtic de l'espai de paràmetres.

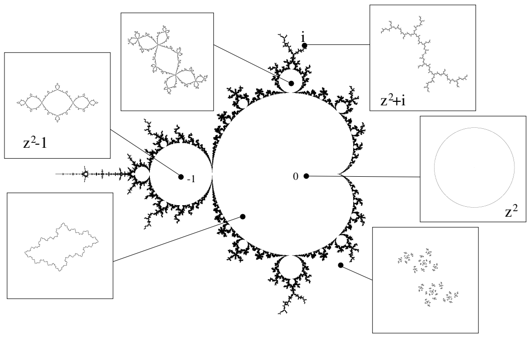

Figure 3: La frontera del conjunt de Mandelbrot M. Alguns valors de $c \in M$ amb els seus corresponents conjunts de Julia.

Tot i que el conjunt de Mandelbrot és el conjunt de bifurcacions més simple imaginable, molts aspectes són encara objecte de recerca activa. Altres espais de paràmetres, com el de les funcions racionals de grau fixat ò el de les funcions exponencials són encara territori per descubrir.

References

[A] Alexander, Daniel, "A history of complex dynamics." Aspects of Mathematics, Max-Planck-Institut, 1994.

[C1] Cayley, Arthur, "Applications of the Newton-Fourier Method to an imaginary root of an equation", *Quat. J. of Pure and App. Math.* **16** (1879), 179-85.

[C2] Cayley, Arthur, "The Newton-Fourier Method imaginary problem", *Am. J. of Math.* **2** (1879), 97.

[C3] Cayley, Arthur, "On the Newton-Fourier imaginary problem", *Proc. Camb. Phil. Soc.* **3** (1880), 231-232.

[F1] Fatou, Pierre, "Sur les solutions uniformes de certaines équations fonctionnelles", *Comp. Rend. heb. S. Acad, Sci.* **143** (1906), 546-48.

[F2] Fatou, Pierre, "Sur les équations fonctionelles", *Bull. Soc. mat. Fr.* **47** (1919), 161-271; **48** (1920), 33-94; 208-314.

[F3] Fatou, Pierre, "Sur les substitutions rationnelles", *Comp. Rend. heb. S. Acad, Sci.* **164** (1917), 806-08; **165** (1917), 992-95.

[HCS] Hermite, Charles i Stieltjes, Thomas Jan, *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes*, 2 volums, Gauthier-Villars, Paris, 1905.

[J1] Julia, Gaston, "Mémoire sur l'iteration des fonctions rationnelles", *J. Mat. Pur. Appl.* **8** (1918), 47-245.

[S1] Schröder, Ernst, "Ueber unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen", *Mathematische Annalen* **2** (1870), 317-65.

[S2] Schröder, Ernst, "Ueber iterite Functionen", *Mathematische Annalen* **3** (1871), 296-322.