Abelian Varieties over $\mathbb{Q}$ and Modular Forms (Ribet, 1992)

Xevi Guitart

UPC

Seminari de Teoria de Nombres de Barcelona

Índex

La conjectura de Taniyama-Shimura

Teorema (Wiles, Breuil, Conrad, Diamond, Taylor, 2001)

$C/\mathbb{Q}$ corba el·líptica. Per a algun N existeix una isogènia definida sobre $\mathbb{Q}$

$$J_1(N) \longrightarrow C.$$

És a dir, C és un factor simple de $J_1(N)$ llevat de $\mathbb{Q}$-isogènia.

La conjectura de Taniyama-Shimura

Teorema (Wiles, Breuil, Conrad, Diamond, Taylor, 2001)

$C/\mathbb{Q}$ corba el·líptica. Per a algun N existeix una isogènia definida sobre $\mathbb{Q}$

$$J_1(N) \longrightarrow C.$$

És a dir, C és un factor simple de $J_1(N)$ llevat de $\mathbb{Q}$-isogènia.

- Caracterització de les varietats abelianes de dimensió 1 que apareixen com a factors $\mathbb{Q}$-simples llevat d'isogènia de les varietats $J_1(N)$:

La conjectura de Taniyama-Shimura

Teorema (Wiles, Breuil, Conrad, Diamond, Taylor, 2001)

$C/\mathbb{Q}$ corba el·líptica. Per a algun N existeix una isogènia definida sobre $\mathbb{Q}$

$$J_1(N) \longrightarrow C.$$

És a dir, C és un factor simple de $J_1(N)$ llevat de $\mathbb{Q}$-isogènia.

- Caracterització de les varietats abelianes de dimensió 1 que apareixen com a factors $\mathbb{Q}$-simples llevat d'isogènia de les varietats $J_1(N)$:
  - Són totes les corbes el·líptiques definides sobre $\mathbb{Q}$

En aquest article Ribet demostra* dues generalitzacions de Taniyama-Shimura:

En aquest article Ribet demostra* dues generalitzacions de Taniyama-Shimura:

1. Caracteritza les varietats abelianes $A/\mathbb{Q}$ de qualsevol dimensió que apareixen com a factors $\mathbb{Q}$-simples llevat d'isogènia de les diferents varietats $J_1(N)$.

En aquest article Ribet demostra* dues generalitzacions de Taniyama-Shimura:

1. Caracteritza les varietats abelianes $A/\mathbb{Q}$ de qualsevol dimensió que apareixen com a factors $\mathbb{Q}$-simples llevat d'isogènia de les diferents varietats $J_1(N)$.
   - Són les varietats abelianes de tipus GL_2.

En aquest article Ribet demostra* dues generalitzacions de Taniyama-Shimura:

1. Caracteritza les varietats abelianes $A/\mathbb{Q}$ de qualsevol dimensió que apareixen com a factors $\mathbb{Q}$-simples llevat d'isogènia de les diferents varietats $J_1(N)$.
    - Són les varietats abelianes de tipus GL_2.
2. Caracteritza les corbes el·líptiques $C/\bar{\mathbb{Q}}$ que apareixen com a factors $\bar{\mathbb{Q}}$-simples llevat d'isogènia de les diferents $J_1(N)_{\bar{\mathbb{Q}}}$.

En aquest article Ribet demostra* dues generalitzacions de Taniyama-Shimura:

1. Caracteritza les varietats abelianes $A/\mathbb{Q}$ de qualsevol dimensió que apareixen com a factors $\mathbb{Q}$-simples llevat d'isogènia de les diferents varietats $J_1(N)$.
   - Són les varietats abelianes de tipus GL_2.
2. Caracteritza les corbes el·líptiques $C/\bar{\mathbb{Q}}$ que apareixen com a factors $\bar{\mathbb{Q}}$-simples llevat d'isogènia de les diferents $J_1(N)_{\bar{\mathbb{Q}}}$.
   - Són les $\mathbb{Q}$-corbes el·líptiques.

En aquest article Ribet demostra* dues generalitzacions de Taniyama-Shimura:

1. Caracteritza les varietats abelianes $A/\mathbb{Q}$ de qualsevol dimensió que apareixen com a factors $\mathbb{Q}$-simples llevat d'isogènia de les diferents varietats $J_1(N)$.
   - Són les varietats abelianes de tipus GL_2.
2. Caracteritza les corbes el·líptiques $C/\bar{\mathbb{Q}}$ que apareixen com a factors $\bar{\mathbb{Q}}$-simples llevat d'isogènia de les diferents $J_1(N)_{\bar{\mathbb{Q}}}$.
   - Són les $\mathbb{Q}$-corbes el·líptiques.

(*) Suposant certa la Conjectura de Serre sobre representacions de Galois.

Índex

Índex

Varietats Abelianes de tipus GL_2

Definició

Una varietat abeliana $A/\mathbb{Q}$ és de tipus GL_2 si $\mathrm{End}^0_{\mathbb{Q}}(A) = \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ és un cos de nombres de grau igual a la dimensió de A.

Varietats Abelianes de tipus GL_2

Definició

Una varietat abeliana $A/\mathbb{Q}$ és de tipus GL_2 si $\mathrm{End}^0_{\mathbb{Q}}(A) = \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ és un cos de nombres de grau igual a la dimensió de A.

Exemples

1. $C/\mathbb{Q}$ corba el·líptica: $\mathrm{End}^0_{\mathbb{Q}}(C) \simeq \mathbb{Q}$

Varietats Abelianes de tipus GL_2

Definició

Una varietat abeliana $A/\mathbb{Q}$ és de tipus GL_2 si $\mathrm{End}^0_{\mathbb{Q}}(A) = \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ és un cos de nombres de grau igual a la dimensió de A.

Exemples

1. $C/\mathbb{Q}$ corba el·líptica: $\mathrm{End}^0_{\mathbb{Q}}(C) \simeq \mathbb{Q}$
2. $f = \sum a_n q^n \in S_2(\Gamma_1(N))$ parabòlica normalitzada i forma pròpia pels operadors de Hecke

Varietats Abelianes de tipus GL_2

Definició

Una varietat abeliana $A/\mathbb{Q}$ és de tipus GL_2 si $\mathrm{End}^0_{\mathbb{Q}}(A) = \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ és un cos de nombres de grau igual a la dimensió de A.

Exemples

1. $C/\mathbb{Q}$ corba el·líptica: $\mathrm{End}^0_{\mathbb{Q}}(C) \simeq \mathbb{Q}$
2. $f = \sum a_n q^n \in S_2(\Gamma_1(N))$ parabòlica normalitzada i forma pròpia pels operadors de Hecke
   Shimura associa a f una varietat abeliana A_f de tipus GL_2
   A_f és un quocient de $J_1(N)$ i $\mathrm{End}^0_{\mathbb{Q}}(A_f) \simeq \mathbb{Q}(\dots, a_n, \dots)$

Teorema (Ribet, 1980)

$J_1(N)$ és isògena a un producte de varietats de tipus A_f.

Teorema (Ribet, 1980)

$J_1(N)$ és isògena a un producte de varietats de tipus A_f.

- Per tant: si $A/\mathbb{Q}$ és un factor simple de $J_1(N) \Rightarrow A \sim A_f \Rightarrow A$ és de tipus GL_2

Teorema (Ribet, 1980)

$J_1(N)$ és isògena a un producte de varietats de tipus A_f.

- Per tant: si $A/\mathbb{Q}$ és un factor simple de $J_1(N) \Rightarrow A \sim A_f \Rightarrow A$ és de tipus GL_2

Teorema (Ribet, AVQMF 1992)

$A/\mathbb{Q}$ de tipus $\mathrm{GL}_2 \Rightarrow A$ és isògena a un quocient d'algun $J_1(N)$.
Equivalentment: A de tipus $\mathrm{GL}_2 \Rightarrow A$ és isògena a alguna A_f

Teorema (Ribet, 1980)

$J_1(N)$ és isògena a un producte de varietats de tipus A_f.

- Per tant: si $A/\mathbb{Q}$ és un factor simple de $J_1(N) \Rightarrow A \sim A_f \Rightarrow A$ és de tipus GL_2

Teorema (Ribet, AVQMF 1992)

$A/\mathbb{Q}$ de tipus $\mathrm{GL}_2 \Rightarrow A$ és isògena a un quocient d'algun $J_1(N)$.
Equivalentment: A de tipus $\mathrm{GL}_2 \Rightarrow A$ és isògena a alguna A_f

Ingredients de la demostració:

1. Conjectura de Serre
2. Teorema de la isogènia de Faltings

Representacions associades a Varietats de Tipus GL_2

A de tipus GL_2, $E = \mathrm{End}^0_{\mathbb{Q}}(A)$, $V_\ell(A) = T_\ell(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

Representacions associades a Varietats de Tipus GL_2

A de tipus GL_2, $E = \mathrm{End}^0_{\mathbb{Q}}(A)$, $V_\ell(A) = T_\ell(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

- $V_\ell(A)$ és un $E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$-mòdul lliure de rang $\frac{2 \dim A}{[E:\mathbb{Q}]} = 2$.
- Tenim la representació ℓ-àdica

$$\rho_\ell : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Aut}_{E\otimes\mathbb{Q}_\ell}(V_\ell(A)) \simeq \mathrm{GL}_2(E \otimes \mathbb{Q}_\ell)$$

Representacions associades a Varietats de Tipus GL_2

A de tipus GL_2, $E = \mathrm{End}^0_{\mathbb{Q}}(A)$, $V_\ell(A) = T_\ell(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

- $V_\ell(A)$ és un $E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$-mòdul lliure de rang $\frac{2 \dim A}{[E:\mathbb{Q}]} = 2$.
- Tenim la representació ℓ-àdica

$$\rho_\ell : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Aut}_{E\otimes\mathbb{Q}_\ell}(V_\ell(A)) \simeq \mathrm{GL}_2(E \otimes \mathbb{Q}_\ell)$$

- Com que $E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell \simeq \prod_{\lambda \mid \ell} E_\lambda$ tenim:

$$\rho_\ell : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(E \otimes \mathbb{Q}_\ell) \simeq \prod_{\lambda \mid \ell} \mathrm{GL}_2(E_\lambda)$$

- Per a cada primer λ de E amb $\lambda \mid \ell$ tenim una representació λ-àdica

$$\rho_\lambda : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(E_\lambda)$$

Representacions associades a Varietats de Tipus GL_2

A de tipus GL_2, $E = \mathrm{End}^0_{\mathbb{Q}}(A)$, $V_\ell(A) = T_\ell(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

- $V_\ell(A)$ és un $E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$-mòdul lliure de rang $\frac{2 \dim A}{[E:\mathbb{Q}]} = 2$.
- Tenim la representació ℓ-àdica

$$\rho_\ell : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Aut}_{E\otimes\mathbb{Q}_\ell}(V_\ell(A)) \simeq \mathrm{GL}_2(E \otimes \mathbb{Q}_\ell)$$

- Com que $E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell \simeq \prod_{\lambda \mid \ell} E_\lambda$ tenim:

$$\rho_\ell : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(E \otimes \mathbb{Q}_\ell) \simeq \prod_{\lambda \mid \ell} \mathrm{GL}_2(E_\lambda)$$

- Per a cada primer λ de E amb $\lambda \mid \ell$ tenim una representació λ-àdica

$$\rho_\lambda : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(E_\lambda)$$

  Propietat: si $p \neq \ell$ primer de bona reducció de A aleshores:
  - ρ_λ és no ramificada en p
  - el polinomi característic de $\rho_\lambda(\mathrm{Frob}_p)$ té coef. a E, i no depèn de ℓ.

Reduccions de les representacions λ-àdiques

A de tipus GL_2, $E = \mathrm{End}^0_{\mathbb{Q}}(A)$, $\mathcal{O} =$ anell d'enters de E.

- Podem suposar que $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A) \simeq \mathcal{O}$
  (canviant si cal A per una varietat isògena)
- Les representacions λ-àdiques tenen coeficients a $\mathcal{O}_\lambda$:

$$\rho_\ell : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}\otimes\mathbb{Z}_\ell}(T_\ell(A)) \simeq \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}\otimes\mathbb{Z}_\ell) \simeq \prod_{\lambda \mid \ell} \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\lambda)$$

Reduccions de les representacions λ-àdiques

A de tipus GL_2, $E = \mathrm{End}^0_{\mathbb{Q}}(A)$, $\mathcal{O} =$ anell d'enters de E.

- Podem suposar que $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A) \simeq \mathcal{O}$ (canviant si cal A per una varietat isògena)
- Les representacions λ-àdiques tenen coeficients a $\mathcal{O}_\lambda$:

$$\rho_\ell : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}\otimes\mathbb{Z}_\ell}(T_\ell(A)) \simeq \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}\otimes\mathbb{Z}_\ell) \simeq \prod_{\lambda \mid \ell} \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\lambda)$$

- La red. mod. λ és: $\overline{\rho}_\lambda : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\lambda/\lambda\mathcal{O}_\lambda) \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_\lambda)$

Representacions associades a formes modulars

Teorema

$f = \sum a_n q^n \in S_k(\Gamma_1(N))$ forma pròpia pels operadors de Hecke
$E_f = \mathbb{Q}(\dots, a_n, \dots)$, $\mathcal{O}_f =$ anell d'enters d'E_f.
Existeix una representació

$$\rho_{f,\ell} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_f \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell)$$

associada a f:

Representacions associades a formes modulars

Teorema

$f = \sum a_n q^n \in S_k(\Gamma_1(N))$ forma pròpia pels operadors de Hecke
$E_f = \mathbb{Q}(\ldots, a_n, \ldots)$, $\mathcal{O}_f =$ anell d'enters d'E_f.
Existeix una representació

$$\rho_{f,\ell} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_f \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell)$$

associada a f:

- si $p \nmid \ell \cdot N$: ρ_ℓ és no ramificada en p, $\mathrm{tr}(\rho_{f,\ell}(\mathrm{Frob}_p)) = a_p$, i det $\rho_{f,\ell}(\mathrm{Frob}_p) = \varepsilon(p) \cdot p^{k-1}$.

Representacions associades a formes modulars

Teorema

$f = \sum a_n q^n \in S_k(\Gamma_1(N))$ forma pròpia pels operadors de Hecke
$E_f = \mathbb{Q}(\dots, a_n, \dots)$, $\mathcal{O}_f =$ anell d'enters d'E_f.
Existeix una representació

$$\rho_{f,\ell} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_f \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell) \simeq \prod_{\tilde{\lambda} \mid \ell} \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{f,\tilde{\lambda}})$$

associada a f:

- si $p \nmid \ell \cdot N$: ρ_ℓ és no ramificada en p, $\mathrm{tr}(\rho_{f,\ell}(\mathrm{Frob}_p)) = a_p$, i det $\rho_{f,\ell}(\mathrm{Frob}_p) = \varepsilon(p) \cdot p^{k-1}$.

Representacions associades a formes modulars

Teorema

$f = \sum a_n q^n \in S_k(\Gamma_1(N))$ forma pròpia pels operadors de Hecke
$E_f = \mathbb{Q}(\ldots, a_n, \ldots)$, $\mathcal{O}_f =$ anell d'enters d'E_f.
Existeix una representació

$$\rho_{f,\ell} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_f \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell) \simeq \prod_{\tilde{\lambda} \mid \ell} \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{f,\tilde{\lambda}})$$

associada a f:

- si $p \nmid \ell \cdot N$: ρ_ℓ és no ramificada en p, $\mathrm{tr}(\rho_{f,\ell}(\mathrm{Frob}_p)) = a_p$, i det $\rho_{f,\ell}(\mathrm{Frob}_p) = \varepsilon(p) \cdot p^{k-1}$.

Per a cada $\tilde{\lambda} \mid \ell$ tenim

$$\overline{\rho}_{f,\tilde{\lambda}} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{f,\tilde{\lambda}}/\tilde{\lambda}\mathcal{O}_{f,\tilde{\lambda}}) \subseteq \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$$

que és contínua, irreductible (quasi sempre) i senar.

La Conjectura de Serre

Conjectura de Serre

Sigui $\rho : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ una representació contínua, irreductible i senar. Aleshores existeix $f \in S_k(\Gamma_1(N))$ i $\tilde{\lambda} \subseteq \mathcal{O}_f$ tal que

$$\rho \simeq \overline{\rho}_{f,\tilde{\lambda}}.$$

A més, la conjectura dóna una recepta per a calcular $k = k(\rho)$ i un nivell $N = N(\rho)$ per a una forma f que resol el problema.

La Conjectura de Serre

Conjectura de Serre

Sigui $\rho : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ una representació contínua, irreductible i senar. Aleshores existeix $f \in S_k(\Gamma_1(N))$ i $\tilde{\lambda} \subseteq \mathcal{O}_f$ tal que

$$\rho \simeq \overline{\rho}_{f,\tilde{\lambda}}.$$

A més, la conjectura dóna una recepta per a calcular $k = k(\rho)$ i un nivell $N = N(\rho)$ per a una forma f que resol el problema.

Aplicació a les varietats de tipus GL_2

Lema previ: quasi per a tot λ la representació $\overline{\rho}_\lambda$ és senar i absolutament irreductible.

La Conjectura de Serre

Conjectura de Serre

Sigui $\rho : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ una representació contínua, irreductible i senar. Aleshores existeix $f \in S_k(\Gamma_1(N))$ i $\tilde{\lambda} \subseteq \mathcal{O}_f$ tal que

$$\rho \simeq \overline{\rho}_{f,\tilde{\lambda}}.$$

A més, la conjectura dóna una recepta per a calcular $k = k(\rho)$ i un nivell $N = N(\rho)$ per a una forma f que resol el problema.

Aplicació a les varietats de tipus GL_2

Lema previ: quasi per a tot λ la representació $\overline{\rho}_\lambda$ és senar i absolutament irreductible.

Per a aquests λ la representació $\overline{\rho}_\lambda$ és modular: existeix una forma modular $f_\lambda \in S_{k_\lambda}(N_\lambda)$ i un primer $\tilde{\lambda}$ de $\mathcal{O}_{f_\lambda}$ tal que

$$\overline{\rho}_\lambda \simeq \overline{\rho}_{f_\lambda,\tilde{\lambda}}$$

Sigui Λ el conjunt infinit de primers λ tals que $\overline{\rho}_\lambda$ és irreductible i *A* té bona reducció en $\ell(\lambda)$.

Sigui Λ el conjunt infinit de primers λ tals que $\overline{\rho}_\lambda$ és irreductible i A té bona reducció en $\ell(\lambda)$.

Lema 1

Per a tot $\lambda \in \Lambda$, es té que $k_\lambda = 2$

Sigui Λ el conjunt infinit de primers λ tals que $\overline{\rho}_\lambda$ és irreductible i A té bona reducció en $\ell(\lambda)$.

Lema 1

Per a tot $\lambda \in \Lambda$, es té que $k_\lambda = 2$

Demostració.

- $\det \overline{\rho}_\lambda \mid I_\ell = \overline{\chi}_\ell$
- A té bona reducció en ℓ
- Un teorema de Serre implica que $k_\lambda = 2$.

Sigui Λ el conjunt infinit de primers λ tals que $\overline{\rho}_\lambda$ és irreductible i A té bona reducció en $\ell(\lambda)$.

Lema 1

Per a tot $\lambda \in \Lambda$, es té que $k_\lambda = 2$

Demostració.

- $\det \overline{\rho}_\lambda \mid I_\ell = \overline{\chi}_\ell$
- A té bona reducció en ℓ
- Un teorema de Serre implica que $k_\lambda = 2$.

Lema 2

Els nivells N_λ estan fitats, per $\lambda \in \Lambda$

Sigui Λ el conjunt infinit de primers λ tals que $\overline{\rho}_\lambda$ és irreductible i A té bona reducció en $\ell(\lambda)$.

Lema 1

Per a tot $\lambda \in \Lambda$, es té que $k_\lambda = 2$

Demostració.

- $\det \overline{\rho}_\lambda \mid I_\ell = \overline{\chi}_\ell$
- A té bona reducció en ℓ
- Un teorema de Serre implica que $k_\lambda = 2$.

Lema 2

Els nivells N_λ estan fitats, per $\lambda \in \Lambda$

Demostració.

- Fórmula per a $N_\lambda \Rightarrow N_\lambda$ divideix el conductor de ρ_λ
- El conductor de ρ_λ divideix el conductor de ρ_ℓ
- El conductor de ρ_ℓ no depèn de ℓ (és el conductor de A)

- Hi ha un nombre finit de formes modulars de pes 2 que donen lloc a infinites $\overline{\rho}_\lambda$.

- Hi ha un nombre finit de formes modulars de pes 2 que donen lloc a infinites $\overline{\rho}_\lambda$.
- Existeix una forma $f \in S_2(\Gamma_1(N))$ que dóna lloc a infinites $\overline{\rho}_\lambda$.

- Hi ha un nombre finit de formes modulars de pes 2 que donen lloc a infinites $\overline{\rho}_\lambda$.
- Existeix una forma $f \in S_2(\Gamma_1(N))$ que dóna lloc a infinites $\overline{\rho}_\lambda$.
- Veiem que $A \sim A_f$.

- Hi ha un nombre finit de formes modulars de pes 2 que donen lloc a infinites $\overline{\rho}_\lambda$.
- Existeix una forma $f \in S_2(\Gamma_1(N))$ que dóna lloc a infinites $\overline{\rho}_\lambda$.
- Veiem que $A \sim A_f$.

Teorema (Faltings)

$A \sim A_f \iff L_p(A, s) = L_p(A_f, s)$ quasi per a tot p

$$L_p(A, s) = \det(1 - p^{-s} \cdot \mathrm{Frob_p} \mid T_\ell(A))^{-1}$$

$$L_p(A_f, s) = \det(1 - p^{-s} \cdot \mathrm{Frob_p} \mid T_\ell(A_f))^{-1}$$

- Existeixen infinits $\lambda \in \Lambda$ tals que $\overline{\rho}_{\lambda} \simeq \overline{\rho}_{A_f,\tilde{\lambda}}$ per a algun $\tilde{\lambda}$

- Existeixen infinits $\lambda \in \Lambda$ tals que $\overline{\rho}_\lambda \simeq \overline{\rho}_{A_f,\tilde{\lambda}}$ per a algun $\tilde{\lambda}$
- Sigui p un primer de bona reducció. Aleshores:
  - Els polinomis característics de $\mathrm{Frob_p}$ per a les dues representacions són iguals

- Existeixen infinits $\lambda \in \Lambda$ tals que $\overline{\rho}_\lambda \simeq \overline{\rho}_{A_f,\tilde{\lambda}}$ per a algun $\tilde{\lambda}$
- Sigui p un primer de bona reducció. Aleshores:
  - Els polinomis característics de $\mathrm{Frob_p}$ per a les dues representacions són iguals
  - $\det(1-p^{-s}\cdot \mathrm{Frob_p} \mid T_\ell(A)) \bmod \lambda = \det(1-p^{-s}\cdot \mathrm{Frob_p} \mid T_\ell(A_f)) \bmod \tilde{\lambda}$

- Existeixen infinits $\lambda \in \Lambda$ tals que $\overline{\rho}_\lambda \simeq \overline{\rho}_{A_f,\tilde{\lambda}}$ per a algun $\tilde{\lambda}$
- Sigui p un primer de bona reducció. Aleshores:
  - Els polinomis característics de $\mathrm{Frob_p}$ per a les dues representacions són iguals
  - $\det(1-p^{-s}\cdot\mathrm{Frob_p} \mid T_\ell(A)) \bmod \lambda = \det(1-p^{-s}\cdot\mathrm{Frob_p} \mid T_\ell(A_f)) \bmod \tilde{\lambda}$
  - $\det(1-p^{-s}\cdot\mathrm{Frob_p} \mid T_\ell(A)) \equiv \det(1-p^{-s}\cdot\mathrm{Frob_p} \mid T_\ell(A_f)) \bmod \lambda'$

- Existeixen infinits $\lambda \in \Lambda$ tals que $\overline{\rho}_\lambda \simeq \overline{\rho}_{A_f,\tilde{\lambda}}$ per a algun $\tilde{\lambda}$
- Sigui p un primer de bona reducció. Aleshores:
  - Els polinomis característics de $\mathrm{Frob_p}$ per a les dues representacions són iguals
  - $\det(1-p^{-s}\cdot\mathrm{Frob_p} \mid T_\ell(A)) \bmod \lambda = \det(1-p^{-s}\cdot\mathrm{Frob_p} \mid T_\ell(A_f)) \bmod \tilde{\lambda}$
  - $\det(1-p^{-s}\cdot\mathrm{Frob_p} \mid T_\ell(A)) \equiv \det(1-p^{-s}\cdot\mathrm{Frob_p} \mid T_\ell(A_f)) \bmod \lambda'$
  - $\det(1-p^{-s}\cdot\mathrm{Frob_p} \mid T_\ell(A))$ i $\det(1-p^{-s}\cdot\mathrm{Frob_p} \mid T_\ell(A_f))$ són congruents mòdul infinits primers.

- Existeixen infinits $\lambda \in \Lambda$ tals que $\overline{\rho}_\lambda \simeq \overline{\rho}_{A_f,\tilde{\lambda}}$ per a algun $\tilde{\lambda}$
- Sigui p un primer de bona reducció. Aleshores:
  - Els polinomis característics de $\mathrm{Frob_p}$ per a les dues representacions són iguals
  - $\det(1 - p^{-s} \cdot \mathrm{Frob_p} \mid T_\ell(A)) \bmod \lambda = \det(1 - p^{-s} \cdot \mathrm{Frob_p} \mid T_\ell(A_f)) \bmod \tilde{\lambda}$
  - $\det(1 - p^{-s} \cdot \mathrm{Frob_p} \mid T_\ell(A)) \equiv \det(1 - p^{-s} \cdot \mathrm{Frob_p} \mid T_\ell(A_f)) \bmod \lambda'$
  - $\det(1 - p^{-s} \cdot \mathrm{Frob_p} \mid T_\ell(A))$ i $\det(1 - p^{-s} \cdot \mathrm{Frob_p} \mid T_\ell(A_f))$ són congruents mòdul infinits primers.
  - $\det(1 - p^{-s} \cdot \mathrm{Frob_p} \mid T_\ell(A)) = \det(1 - p^{-s} \cdot \mathrm{Frob_p} \mid T_\ell(A_f))$

- Existeixen infinits $\lambda \in \Lambda$ tals que $\overline{\rho}_\lambda \simeq \overline{\rho}_{A_f,\tilde{\lambda}}$ per a algun $\tilde{\lambda}$
- Sigui p un primer de bona reducció. Aleshores:
  - Els polinomis característics de $\mathrm{Frob_p}$ per a les dues representacions són iguals
  - $\det(1-p^{-s}\cdot\mathrm{Frob_p} \mid T_\ell(A)) \bmod \lambda = \det(1-p^{-s}\cdot\mathrm{Frob_p} \mid T_\ell(A_f)) \bmod \tilde{\lambda}$
  - $\det(1-p^{-s}\cdot\mathrm{Frob_p} \mid T_\ell(A)) \equiv \det(1-p^{-s}\cdot\mathrm{Frob_p} \mid T_\ell(A_f)) \bmod \lambda'$
  - $\det(1-p^{-s}\cdot\mathrm{Frob_p} \mid T_\ell(A))$ i $\det(1-p^{-s}\cdot\mathrm{Frob_p} \mid T_\ell(A_f))$ són congruents mòdul infinits primers.
  - $\det(1-p^{-s}\cdot\mathrm{Frob_p} \mid T_\ell(A)) = \det(1-p^{-s}\cdot\mathrm{Frob_p} \mid T_\ell(A_f))$
  - $L_p(A,s) = L_p(A_f,s)$ quasi per a tot $p \Rightarrow A \sim A_f$

Índex

$\mathbb{Q}$-Corbes

Definició

Una $\mathbb{Q}$-corba és una corba el·líptica $C/\bar{\mathbb{Q}}$ que és isògena a totes les seves conjugades per Galois. És a dir, per a tot $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ existeix una isogènia

$$\mu_\sigma : {}^\sigma C \longrightarrow C$$

$\mathbb{Q}$-Corbes

Definició

Una $\mathbb{Q}$-corba és una corba el·líptica $C/\bar{\mathbb{Q}}$ que és isògena a totes les seves conjugades per Galois. És a dir, per a tot $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ existeix una isogènia

$$\mu_\sigma : {}^\sigma C \longrightarrow C$$

Teorema (Ribet, AVQMF 1992)

Assumint la conjectura de Serre, aleshores una corba el·líptica $C/\bar{\mathbb{Q}}$ és isògena a un factor d'alguna varietat de la forma $J_1(N)$ si i només si C és una $\mathbb{Q}$-corba.

$\mathbb{Q}$-Corbes

Definició

Una $\mathbb{Q}$-corba és una corba el·líptica $C/\bar{\mathbb{Q}}$ que és isògena a totes les seves conjugades per Galois. És a dir, per a tot $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ existeix una isogènia

$$\mu_\sigma : {}^\sigma C \longrightarrow C$$

Teorema (Ribet, AVQMF 1992)

Assumint la conjectura de Serre, aleshores una corba el·líptica $C/\bar{\mathbb{Q}}$ és isògena a un factor d'alguna varietat de la forma $J_1(N)$ si i només si C és una $\mathbb{Q}$-corba.

Equivalentment

Una corba el·líptica $C/\bar{\mathbb{Q}}$ és isògena a un factor d'una varietat de tipus GL_2 si i només si C és una $\mathbb{Q}$-corba.

Varietats de tipus GL_2 amb CM

Teorema (Shimura, 1972)

Sigui A una varietat abeliana de tipus GL_2. Si $A_{\bar{\mathbb{Q}}}$ té alguna subvarietat amb CM, aleshores

$$A_{\bar{\mathbb{Q}}} \sim C^n$$

on $C/\bar{\mathbb{Q}}$ és una corba el·líptica amb multiplicació complexa.

Varietats de tipus GL_2 amb CM

Teorema (Shimura, 1972)

Sigui A una varietat abeliana de tipus GL_2. Si $A_{\bar{\mathbb{Q}}}$ té alguna subvarietat amb CM, aleshores

$$A_{\bar{\mathbb{Q}}} \sim C^n$$

on $C/\bar{\mathbb{Q}}$ és una corba el·líptica amb multiplicació complexa.

- C és una $\mathbb{Q}$-corba (${}^\sigma C^n \sim {}^\sigma A = A \sim C^n \Rightarrow {}^\sigma C \sim C$)

Varietats de tipus GL_2 amb CM

Teorema (Shimura, 1972)

Sigui A una varietat abeliana de tipus GL_2. Si $A_{\bar{\mathbb{Q}}}$ té alguna subvarietat amb CM, aleshores

$$A_{\bar{\mathbb{Q}}} \sim C^n$$

on $C/\bar{\mathbb{Q}}$ és una corba el·líptica amb multiplicació complexa.

- C és una $\mathbb{Q}$-corba (${}^\sigma C^n \sim {}^\sigma A = A \sim C^n \Rightarrow {}^\sigma C \sim C$)

Teorema (Shimura, 1971)

Tota $\mathbb{Q}$-corba amb multiplicació complexa isògena a un factor d'alguna varietat de tipus GL_2.

De Varietats de Tipus GL_2 sense CM a $\mathbb{Q}$-corbes

A varietat de tipus GL_2, $E = \mathrm{End}^0_{\mathbb{Q}}(A)$.

De Varietats de Tipus GL_2 sense CM a $\mathbb{Q}$-corbes

A varietat de tipus GL_2, $E = \mathrm{End}^0_{\mathbb{Q}}(A)$.

Proposició (Ribet, AVQMF 1992)

Si $A_{\bar{\mathbb{Q}}}$ no té cap subvarietat amb CM, aleshores

$$A_{\bar{\mathbb{Q}}} \sim B^n$$

on B és una varietat $\bar{\mathbb{Q}}$-simple. En particular, si una corba el·líptica C és quocient de $A_{\bar{\mathbb{Q}}}$ aleshores C és una $\mathbb{Q}$-corba.

De Varietats de Tipus GL_2 sense CM a $\mathbb{Q}$-corbes

A varietat de tipus GL_2, $E = \mathrm{End}^0_{\mathbb{Q}}(A)$.

Proposició (Ribet, AVQMF 1992)

Si $A_{\bar{\mathbb{Q}}}$ no té cap subvarietat amb CM, aleshores

$$A_{\bar{\mathbb{Q}}} \sim B^n$$

on B és una varietat $\bar{\mathbb{Q}}$-simple. En particular, si una corba el·líptica C és quocient de $A_{\bar{\mathbb{Q}}}$ aleshores C és una $\mathbb{Q}$-corba.

Demostració.

- $A_{\bar{\mathbb{Q}}} \sim B_1^{n_1} \times B_2^{n_2} \times \cdots \times B_s^{n_s}$

De Varietats de Tipus GL_2 sense CM a $\mathbb{Q}$-corbes

A varietat de tipus GL_2, $E = \mathrm{End}^0_{\mathbb{Q}}(A)$.

Proposició (Ribet, AVQMF 1992)

Si $A_{\bar{\mathbb{Q}}}$ no té cap subvarietat amb CM, aleshores

$$A_{\bar{\mathbb{Q}}} \sim B^n$$

on B és una varietat $\bar{\mathbb{Q}}$-simple. En particular, si una corba el·líptica C és quocient de $A_{\bar{\mathbb{Q}}}$ aleshores C és una $\mathbb{Q}$-corba.

Demostració.

- $A_{\bar{\mathbb{Q}}} \sim B_1^{n_1} \times B_2^{n_2} \times \cdots \times B_s^{n_s}$
- E cos $\Rightarrow$ E actua en $B_i^{n_i} \Rightarrow [E : \mathbb{Q}] \mid 2 \cdot n_i \cdot \dim B_i$
- $[E : \mathbb{Q}] = \dim A = \sum n_i \cdot \dim B_i$

De Varietats de Tipus GL_2 sense CM a $\mathbb{Q}$-corbes

A varietat de tipus GL_2, $E = \mathrm{End}^0_{\mathbb{Q}}(A)$.

Proposició (Ribet, AVQMF 1992)

Si $A_{\bar{\mathbb{Q}}}$ no té cap subvarietat amb CM, aleshores

$$A_{\bar{\mathbb{Q}}} \sim B^n$$

on B és una varietat $\bar{\mathbb{Q}}$-simple. En particular, si una corba el·líptica C és quocient de $A_{\bar{\mathbb{Q}}}$ aleshores C és una $\mathbb{Q}$-corba.

Demostració.

- $A_{\bar{\mathbb{Q}}} \sim B_1^{n_1} \times B_2^{n_2} \times \cdots \times B_s^{n_s}$
- E cos $\Rightarrow$ E actua en $B_i^{n_i} \Rightarrow [E : \mathbb{Q}] \mid 2 \cdot n_i \cdot \dim B_i$
- $[E : \mathbb{Q}] = \dim A = \sum n_i \cdot \dim B_i$
- $[E : \mathbb{Q}] = \dim B_i^{n_i}$ o $[E : \mathbb{Q}] = 2 \cdot \dim B_i^{n_i}$

De Varietats de Tipus GL_2 sense CM a $\mathbb{Q}$-corbes

A varietat de tipus GL_2, $E = \mathrm{End}^0_{\mathbb{Q}}(A)$.

Proposició (Ribet, AVQMF 1992)

Si $A_{\bar{\mathbb{Q}}}$ no té cap subvarietat amb CM, aleshores

$$A_{\bar{\mathbb{Q}}} \sim B^n$$

on B és una varietat $\bar{\mathbb{Q}}$-simple. En particular, si una corba el·líptica C és quocient de $A_{\bar{\mathbb{Q}}}$ aleshores C és una $\mathbb{Q}$-corba.

Demostració.

- $A_{\bar{\mathbb{Q}}} \sim B_1^{n_1} \times B_2^{n_2} \times \cdots \times B_s^{n_s}$
- E cos $\Rightarrow E$ actua en $B_i^{n_i} \Rightarrow [E:\mathbb{Q}] \mid 2 \cdot n_i \cdot \dim B_i$
- $[E:\mathbb{Q}] = \dim A = \sum n_i \cdot \dim B_i$
- $[E:\mathbb{Q}] = \dim B_i^{n_i}$

De Varietats de Tipus GL_2 sense CM a $\mathbb{Q}$-corbes

A varietat de tipus GL_2, $E = \mathrm{End}^0_{\mathbb{Q}}(A)$.

Proposició (Ribet, AVQMF 1992)

Si $A_{\bar{\mathbb{Q}}}$ no té cap subvarietat amb CM, aleshores

$$A_{\bar{\mathbb{Q}}} \sim B^n$$

on B és una varietat $\bar{\mathbb{Q}}$-simple. En particular, si una corba el·líptica C és quocient de $A_{\bar{\mathbb{Q}}}$ aleshores C és una $\mathbb{Q}$-corba.

Demostració.

- $A_{\bar{\mathbb{Q}}} \sim B_1^{n_1} \times B_2^{n_2} \times \cdots \times B_s^{n_s}$
- E cos $\Rightarrow$ E actua en $B_i^{n_i} \Rightarrow [E : \mathbb{Q}] \mid 2 \cdot n_i \cdot \dim B_i$
- $[E : \mathbb{Q}] = \dim A = \sum n_i \cdot \dim B_i$
- $[E : \mathbb{Q}] = \dim B_i^{n_i} \Rightarrow A_{\bar{\mathbb{Q}}} \sim B_i^{n_i}$

De $\mathbb{Q}$-corbes a varietats de tipus GL_2

Teorema (Ribet, AVQMF 1992)

Si $C/\bar{\mathbb{Q}}$ és una $\mathbb{Q}$-corba sense CM, aleshores existeix una varietat $A/\mathbb{Q}$ de tipus GL_2 tal que $A_{\bar{\mathbb{Q}}} \sim C^n$.

De $\mathbb{Q}$-corbes a varietats de tipus GL_2

Teorema (Ribet, AVQMF 1992)

Si $C/\bar{\mathbb{Q}}$ és una $\mathbb{Q}$-corba sense CM, aleshores existeix una varietat $A/\mathbb{Q}$ de tipus GL_2 tal que $A_{\bar{\mathbb{Q}}} \sim C^n$.

- Cal veure:
  1. per a cert n existeix una varietat $A/\mathbb{Q}$ amb $A_{\bar{\mathbb{Q}}} \sim C^n$
  2. $\mathrm{End}^0_{\mathbb{Q}}(A)$ és un cos de grau n.

Teorema de descens de Weil per a Varietats

L/K extensió de Galois, B/L una varietat algebraica quasiprojectiva. Existeix una varietat A/K isomorfa a B si i només si per a tot $\sigma \in Gal(L/K)$ existeix un isomorfisme $\phi_\sigma : {}^\sigma B \to B$ i es satisfà que

$$\phi_\sigma \circ {}^\sigma\phi_\tau \circ \phi_{\sigma\tau}^{-1} = 1$$

Teorema de descens de Weil per a Varietats

L/K extensió de Galois, B/L una varietat algebraica quasiprojectiva. Existeix una varietat A/K isomorfa a B si i només si per a tot $\sigma \in Gal(L/K)$ existeix un isomorfisme $\phi_\sigma : {}^\sigma B \to B$ i es satisfà que

$$\phi_\sigma \circ {}^\sigma\phi_\tau \circ \phi_{\sigma\tau}^{-1} = 1$$

Ribet: descens per a varietats abelianes llevat d'isogènia

B/L varietat abeliana. Existeix una varietat A/K isògena a B si i només si per a tot $\sigma \in Gal(L/K)$ existeix una isogènia $\mu_\sigma : {}^\sigma B \to B$ i es satisfà que

$$\mu_\sigma \circ {}^\sigma\mu_\tau \circ \mu_{\sigma\tau}^{-1} = 1.$$

C una $\mathbb{Q}$-corba: $\mu_\sigma : {}^\sigma C \longrightarrow C$

C una $\mathbb{Q}$-corba: $\mu_\sigma : {}^\sigma C \longrightarrow C$

- $\mu_\sigma \circ {}^\sigma\mu_\tau \circ \mu_{\sigma\tau}^{-1} \in \mathrm{End}^0(C)^* = \mathbb{Q}^*$
- $C \xrightarrow{\mu_{\sigma\tau}^{-1}} {}^{\sigma\tau}C \xrightarrow{{}^\sigma\mu_\tau} {}^\sigma C \xrightarrow{\mu_\sigma} C$

C una $\mathbb{Q}$-corba: $\mu_\sigma : {}^\sigma C \longrightarrow C$

- $\mu_\sigma \circ {}^\sigma\mu_\tau \circ \mu_{\sigma\tau}^{-1} \in \mathrm{End}^0(C)^* = \mathbb{Q}^*$
- $C \xrightarrow{\mu_{\sigma\tau}^{-1}} {}^{\sigma\tau}C \xrightarrow{{}^\sigma\mu_\tau} {}^\sigma C \xrightarrow{\mu_\sigma} C$
- $$\begin{array}{rccl} c: & G_\mathbb{Q} \times G_\mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q}^* \\ & (\sigma, \tau) & \longmapsto & c(\sigma,\tau) = \mu_\sigma \circ {}^\sigma\mu_\tau \circ \mu_{\sigma\tau}^{-1} \end{array}$$

C una $\mathbb{Q}$-corba: $\mu_\sigma : {}^\sigma C \longrightarrow C$

- $\mu_\sigma \circ {}^\sigma\mu_\tau \circ \mu_{\sigma\tau}^{-1} \in \mathrm{End}^0(C)^* = \mathbb{Q}^*$
- $C \xrightarrow{\mu_{\sigma\tau}^{-1}} {}^{\sigma\tau}C \xrightarrow{{}^\sigma\mu_\tau} {}^\sigma C \xrightarrow{\mu_\sigma} C$
- $$\begin{array}{rccl} c: & G_\mathbb{Q} \times G_\mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q}^* \\ & (\sigma,\tau) & \longmapsto & c(\sigma,\tau) = \mu_\sigma \circ {}^\sigma\mu_\tau \circ \mu_{\sigma\tau}^{-1} \end{array}$$
- $[c] \in H^2(G_\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^*)$

C una $\mathbb{Q}$-corba: $\mu_\sigma : {}^\sigma C \longrightarrow C$

- $\mu_\sigma \circ {}^\sigma\mu_\tau \circ \mu_{\sigma\tau}^{-1} \in \mathrm{End}^0(C)^* = \mathbb{Q}^*$
- $C \xrightarrow{\mu_{\sigma\tau}^{-1}} {}^{\sigma\tau}C \xrightarrow{{}^\sigma\mu_\tau} {}^\sigma C \xrightarrow{\mu_\sigma} C$
- $$\begin{array}{rccl} c: & G_\mathbb{Q} \times G_\mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q}^* \\ & (\sigma,\tau) & \longmapsto & c(\sigma,\tau) = \mu_\sigma \circ {}^\sigma\mu_\tau \circ \mu_{\sigma\tau}^{-1} \end{array}$$
- $[c] \in H^2(G_\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^*)$
- Tenim isogènies $\mu_\sigma : {}^\sigma C^n \longrightarrow C^n$ i $\mu_\sigma \circ {}^\sigma\mu_\tau \circ \mu_{\sigma\tau}^{-1} = c(\sigma,\tau)$

C una $\mathbb{Q}$-corba: $\mu_\sigma : {}^\sigma C \longrightarrow C$

- $\mu_\sigma \circ {}^\sigma\mu_\tau \circ \mu_{\sigma\tau}^{-1} \in \mathrm{End}^0(C)^* = \mathbb{Q}^*$
- $C \xrightarrow{\mu_{\sigma\tau}^{-1}} {}^{\sigma\tau}C \xrightarrow{{}^\sigma\mu_\tau} {}^\sigma C \xrightarrow{\mu_\sigma} C$
- $$\begin{array}{rccl} c: & G_\mathbb{Q} \times G_\mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q}^* \\ & (\sigma,\tau) & \longmapsto & c(\sigma,\tau) = \mu_\sigma \circ {}^\sigma\mu_\tau \circ \mu_{\sigma\tau}^{-1} \end{array}$$
- $[c] \in H^2(G_\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^*)$
- Tenim isogènies $\mu_\sigma : {}^\sigma C^n \longrightarrow C^n$ i $\mu_\sigma \circ {}^\sigma\mu_\tau \circ \mu_{\sigma\tau}^{-1} = c(\sigma,\tau)$
- Descens de Ribet: si $[c] = 1$ aleshores C^n és isògena a una varietat definida sobre $\mathbb{Q}$. Però en general $[c] \neq 1$.

- Podem veure $[c]$ a dins de $H^2(G_{\mathbb{Q}}, \bar{\mathbb{Q}}^*)$ (amb acció trivial).

- Podem veure $[c]$ a dins de $H^2(G_{\mathbb{Q}}, \bar{\mathbb{Q}}^*)$ (amb acció trivial).
- Teorema (Tate): $H^2(G_{\mathbb{Q}}, \bar{\mathbb{Q}}^*) = \{1\}$

- Podem veure $[c]$ a dins de $H^2(G_{\mathbb{Q}}, \bar{\mathbb{Q}}^*)$ (amb acció trivial).
- Teorema (Tate): $H^2(G_{\mathbb{Q}}, \bar{\mathbb{Q}}^*) = \{1\}$
- Existeix $\alpha : G_{\mathbb{Q}} \to \bar{\mathbb{Q}}^*$ tal que

$$c(\sigma, \tau) = \alpha(\sigma)\alpha(\tau)\alpha(\sigma\tau)^{-1}$$

- Podem veure $[c]$ a dins de $H^2(G_{\mathbb{Q}}, \bar{\mathbb{Q}}^*)$ (amb acció trivial).
- Teorema (Tate): $H^2(G_{\mathbb{Q}}, \bar{\mathbb{Q}}^*) = \{1\}$
- Existeix $\alpha : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \bar{\mathbb{Q}}^*$ tal que

$$c(\sigma, \tau) = \alpha(\sigma)\alpha(\tau)\alpha(\sigma\tau)^{-1}$$

- $E := \mathbb{Q}(\ldots, \alpha(\sigma), \ldots)$ i $n = [E : \mathbb{Q}]$.

- Podem veure $[c]$ a dins de $H^2(G_{\mathbb{Q}}, \bar{\mathbb{Q}}^*)$ (amb acció trivial).
- Teorema (Tate): $H^2(G_{\mathbb{Q}}, \bar{\mathbb{Q}}^*) = \{1\}$
- Existeix $\alpha : G_{\mathbb{Q}} \to \bar{\mathbb{Q}}^*$ tal que

$$c(\sigma, \tau) = \alpha(\sigma)\alpha(\tau)\alpha(\sigma\tau)^{-1}$$

- $E := \mathbb{Q}(\dots, \alpha(\sigma), \dots)$ i $n = [E : \mathbb{Q}]$.
- $E \hookrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{End}^0(C^n) \Rightarrow \alpha(\sigma)$ actua en C^n

- Podem veure $[c]$ a dins de $H^2(G_{\mathbb{Q}}, \bar{\mathbb{Q}}^*)$ (amb acció trivial).
- Teorema (Tate): $H^2(G_{\mathbb{Q}}, \bar{\mathbb{Q}}^*) = \{1\}$
- Existeix $\alpha : G_{\mathbb{Q}} \to \bar{\mathbb{Q}}^*$ tal que

$$c(\sigma, \tau) = \alpha(\sigma)\alpha(\tau)\alpha(\sigma\tau)^{-1}$$

- $E := \mathbb{Q}(\dots, \alpha(\sigma), \dots)$ i $n = [E : \mathbb{Q}]$.
- $E \hookrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{End}^0(C^n) \Rightarrow \alpha(\sigma)$ actua en C^n
- Tenim isogènies $\nu_\sigma : {}^\sigma C^n \xrightarrow{\mu_\sigma} C^n \xrightarrow{\alpha(\sigma)^{-1}} C^n$

- Podem veure $[c]$ a dins de $H^2(G_{\mathbb{Q}}, \bar{\mathbb{Q}}^*)$ (amb acció trivial).
- Teorema (Tate): $H^2(G_{\mathbb{Q}}, \bar{\mathbb{Q}}^*) = \{1\}$
- Existeix $\alpha : G_{\mathbb{Q}} \to \bar{\mathbb{Q}}^*$ tal que

$$c(\sigma,\tau) = \alpha(\sigma)\alpha(\tau)\alpha(\sigma\tau)^{-1}$$

- $E := \mathbb{Q}(\dots, \alpha(\sigma), \dots)$ i $n = [E : \mathbb{Q}]$.
- $E \hookrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{End}^0(C^n) \Rightarrow \alpha(\sigma)$ actua en C^n
- Tenim isogènies $\nu_\sigma : {}^\sigma C^n \xrightarrow{\mu_\sigma} C^n \xrightarrow{\alpha(\sigma)^{-1}} C^n$
- $\nu_\sigma \circ {}^\sigma\nu_\tau \circ \nu_{\sigma\tau}^{-1} = \alpha(\sigma)^{-1}\mu_\sigma {}^\sigma\alpha(\tau)^{-1\,\sigma}\mu_\tau\mu_{\sigma\tau}^{-1}\alpha(\sigma\tau) = \alpha(\sigma)^{-1}\alpha(\tau)^{-1}\alpha(\sigma\tau)\mu_\sigma {}^\sigma\mu_\tau\mu_{\sigma\tau}^{-1} = c(\sigma,\tau)^{-1}c(\sigma,\tau) = 1$

- Podem veure $[c]$ a dins de $H^2(G_{\mathbb{Q}}, \bar{\mathbb{Q}}^*)$ (amb acció trivial).
- Teorema (Tate): $H^2(G_{\mathbb{Q}}, \bar{\mathbb{Q}}^*) = \{1\}$
- Existeix $\alpha : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \bar{\mathbb{Q}}^*$ tal que

$$c(\sigma,\tau) = \alpha(\sigma)\alpha(\tau)\alpha(\sigma\tau)^{-1}$$

- $E := \mathbb{Q}(\dots, \alpha(\sigma), \dots)$ i $n = [E : \mathbb{Q}]$.
- $E \hookrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{End}^0(C^n) \Rightarrow \alpha(\sigma)$ actua en C^n
- Tenim isogènies $\nu_\sigma : {}^\sigma C^n \xrightarrow{\mu_\sigma} C^n \xrightarrow{\alpha(\sigma)^{-1}} C^n$
- $\nu_\sigma \circ {}^\sigma\nu_\tau \circ \nu_{\sigma\tau}^{-1} = \alpha(\sigma)^{-1}\mu_\sigma {}^\sigma\alpha(\tau)^{-1\,\sigma}\mu_\tau\mu_{\sigma\tau}^{-1}\alpha(\sigma\tau) =$
  $\alpha(\sigma)^{-1}\alpha(\tau)^{-1}\alpha(\sigma\tau)\mu_\sigma {}^\sigma\mu_\tau\mu_{\sigma\tau}^{-1} = c(\sigma,\tau)^{-1}c(\sigma,\tau) = 1$
- Existeix $A/\mathbb{Q}$ i una isogènia $\kappa : C^n \rightarrow A_{\bar{\mathbb{Q}}}$.

- Per tant, $\mathrm{End}^0_{\mathbb{Q}} A \simeq \mathrm{End}^0_{\mathbb{Q}}(C^n) \simeq \mathrm{M}_n(\mathbb{Q})$ i l'isomorfisme és donat per κ.
- Sota aquest isomorfisme, si $\varphi \in \mathrm{End}^0_{\mathbb{Q}}(A)$ es correspon amb $x \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Q})$ aleshores ${}^\sigma\varphi$ es correspon amb $\alpha(\sigma) x \alpha(\sigma)^{-1}$
- Per tant, $\mathrm{End}^0_{\mathbb{Q}}(A) \simeq C_{\mathrm{M}_n(\mathbb{Q})}(E) \simeq E$ i A és de tipus GL_2.

Abelian Varieties over $\mathbb{Q}$ and Modular Forms (Ribet, 1992)

Xevi Guitart

UPC

Seminari de Teoria de Nombres de Barcelona