Tipus de reduccions de corbes

Xevi Guitart

Departament de Matemàtica Aplicada 2
Universitat Politècnica de Catalunya

Outline

Exemple: corbes el·líptiques

- $E/\mathbb{Q}$ la corba ell·líptica donada per una equació de Weierstrass

$$E:\ \ Y^2Z = X^3 + aX^2Z + bZ^3$$

Volem reduïr-la mòdul $p \neq 2, 3$

- Model Minimal de Weierstrass

$$\mathcal{W}:\ \ Y^2Z = X^3 + cX^2Z + dZ^3$$

amb $c, d \in \mathbb{Z}$ i $\mathrm{ord}_p(\Delta_{\mathcal{W}})$ minimal

- La reducció mòdul p de $\mathcal{W}$ és una corba sobre $\mathbb{F}_p$ d'algun d'aquests tipus:

Exemple: corbes el·líptiques

- $E/\mathbb{Q}$ la corba ell·líptica donada per una equació de Weierstrass

$$E: \; Y^2Z = X^3 + aX^2Z + bZ^3$$

  Volem reduïr-la mòdul $p \neq 2, 3$

- Model Minimal de Weierstrass

$$\mathcal{W}: \; Y^2Z = X^3 + cX^2Z + dZ^3$$

  amb $c, d \in \mathbb{Z}$ i $\mathrm{ord}_p(\Delta_{\mathcal{W}})$ minimal

- La reducció mòdul p de $\mathcal{W}$ és una corba sobre $\mathbb{F}_p$ d'algun d'aquests tipus:

Exemple: corbes el·líptiques

- $E/\mathbb{Q}$ la corba ell·líptica donada per una equació de Weierstrass

$$E: \;\; Y^2Z = X^3 + aX^2Z + bZ^3$$

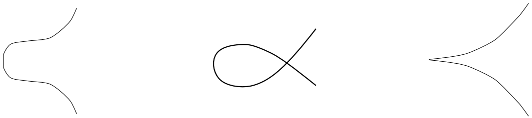
  Volem reduïr-la mòdul $p \neq 2, 3$

- Model Minimal de Weierstrass

$$\mathcal{W}: \;\; Y^2Z = X^3 + cX^2Z + dZ^3$$

  amb $c, d \in \mathbb{Z}$ i $\mathrm{ord}_p(\Delta_{\mathcal{W}})$ minimal

- La reducció mòdul p de $\mathcal{W}$ és una corba sobre $\mathbb{F}_p$ d'algun d'aquests tipus:



Volem generalitzar aquest procés en diversos aspectes:

- Gènere de la corba
- Cos de definició: permetre cossos de nombres

C/K corba projectiva llisa de gènere g
R AVD, K cos de fraccions de R, $\mathfrak{p}$ ideal maximal
$k = R/\mathfrak{p}$ cos residual (suposem $k = \overline{k}$)

- El model enter de C:
  C/R un model regular propi minimal
  - Regular: llis com a superfície aritmètica
  - Propi: les seves fibres són completes
  - Minimal: no té divisors excepcionals

Volem generalitzar aquest procés en diversos aspectes:

- Gènere de la corba
- Cos de definició: permetre cossos de nombres

C/K corba projectiva llisa de gènere g
R AVD, K cos de fraccions de R, $\mathfrak{p}$ ideal maximal
$k = R/\mathfrak{p}$ cos residual (suposem $k = \overline{k}$)

- El model enter de C:
  $\mathcal{C}/R$ un model regular propi minimal
  - Regular: llis com a superfície aritmètica
  - Propi: les seves fibres són completes
  - Minimal: no té divisors excepcionals

Volem generalitzar aquest procés en diversos aspectes:

- Gènere de la corba
- Cos de definició: permetre cossos de nombres

C/K corba projectiva llisa de gènere g
R AVD, K cos de fraccions de R, $\mathfrak{p}$ ideal maximal
$k = R/\mathfrak{p}$ cos residual (suposem $k = \overline{k}$)

- El model enter de C:
  $\mathcal{C}/R$ un model regular propi minimal
  - Regular: llis com a superfície aritmètica
  - Propi: les seves fibres són completes
  - Minimal: no té divisors excepcionals

Volem generalitzar aquest procés en diversos aspectes:

- Gènere de la corba
- Cos de definició: permetre cossos de nombres

C/K corba projectiva llisa de gènere g
R AVD, K cos de fraccions de R, $\mathfrak{p}$ ideal maximal
$k = R/\mathfrak{p}$ cos residual (suposem $k = \overline{k}$)

- El model enter de C:
  $\mathcal{C}/R$ un model regular propi minimal
  - Regular: llis com a superfície aritmètica
  - Propi: les seves fibres són completes
  - Minimal: no té divisors excepcionals

Volem generalitzar aquest procés en diversos aspectes:

- Gènere de la corba
- Cos de definició: permetre cossos de nombres

C/K corba projectiva llisa de gènere g
R AVD, K cos de fraccions de R, $\mathfrak{p}$ ideal maximal
$k = R/\mathfrak{p}$ cos residual (suposem $k = \overline{k}$)

- El model enter de C:
  $\mathcal{C}/R$ un model regular propi minimal
  - Regular: llis com a superfície aritmètica
  - Propi: les seves fibres són completes
  - Minimal: no té divisors excepcionals

La reducció mòdul $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{C}$

$$\pi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$$

- La reducció mòdul $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{C}$ és la fibra en $\mathfrak{p}$

$$\mathcal{C}_{\mathfrak{p}} = \sum_{i=1}^{r} n_i \Gamma_i$$

- És un esquema sobre k
- Cada Γ_i és una corba sobre k i voldrem informació sobre
  1. $p_a(\Gamma_i)$
  2. Les multiplicitats n_i
  3. Les interseccions entre les Γ_i

La reducció mòdul $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{C}$

$$\pi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$$

- La reducció mòdul $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{C}$ és la fibra en $\mathfrak{p}$

$$\mathcal{C}_{\mathfrak{p}} = \sum_{i=1}^{r} n_i \Gamma_i$$

- És un esquema sobre k
- Cada Γ_i és una corba sobre k i voldrem informació sobre
  1. $p_a(\Gamma_i)$
  2. Les multiplicitats n_i
  3. Les interseccions entre les Γ_i

2 diferències importants

1. Classificarem $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$ sense calcular $\mathcal{C}$
2. Veurem $\mathcal{C}$ com un equema sobre R, i.e un objecte fibrat

$$\pi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$$

- La fibra en el punt genèric de $\mathrm{Spec}(R)$ és C/K
- La fibra en $\mathfrak{p}$ és la reducció mod $\mathfrak{p}$.
- Els Γ_i són divisors fibrals de $\mathcal{C}$

Això permet emprar teoria de la intersecció a $\mathcal{C}$

2 diferències importants

1. Classificarem $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$ sense calcular $\mathcal{C}$
2. Veurem $\mathcal{C}$ com un equema sobre R, i.e un objecte fibrat

$$\pi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$$

- La fibra en el punt genèric de $\mathrm{Spec}(R)$ és C/K
- La fibra en $\mathfrak{p}$ és la reducció mod $\mathfrak{p}$.
- Els Γ_i són divisors fibrals de $\mathcal{C}$

Això permet emprar teoria de la intersecció a $\mathcal{C}$

2 diferències importants

1. Classificarem $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$ sense calcular $\mathcal{C}$
2. Veurem $\mathcal{C}$ com un equema sobre R, i.e un objecte fibrat

$$\pi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$$

- La fibra en el punt genèric de $\mathrm{Spec}(R)$ és C/K
- La fibra en $\mathfrak{p}$ és la reducció mod $\mathfrak{p}$.
- Els Γ_i són divisors fibrals de $\mathcal{C}$

Això permet emprar teoria de la intersecció a $\mathcal{C}$

Anàleg geomètric

- $V/\mathbb{C}$ superfície
- $F/\mathbb{C}$ corba
- Amb un morfisme

$$\pi : V \longrightarrow F$$

- La fibra genèrica és una corba C de gènere g
- Volem saber com pot ser la fibra $\pi^{-1}(t)$ en un punt de $t \in F$.

Exemple

- V Corba el·líptica sobre $\mathbb{C}(T)$

$$V : Y^2Z = X^3 + a(T)XZ^2 + b(T)Z^3$$

$$a(T), b(T) \in \mathbb{C}[T], \quad \Delta(T) \neq 0$$

- V és una superfície a $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

$$\begin{array}{cccc} \pi : & V & \longrightarrow & \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \\ & (x,y,z,t) & \mapsto & t \end{array}$$

- $\Delta(T) \neq 0 \Rightarrow$ la fibra genèrica és una corba el·líptica
- La fibra en un punt $t_0 \in \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ és la corba

$$E_{t_0} : Y^2Z = X^3 + a(t_0)XZ^2 + b(t_0)Z^3$$

- E_t és una d'aquestes corbes:

Exemple

- V Corba el·líptica sobre $\mathbb{C}(T)$

$$V : Y^2Z = X^3 + a(T)XZ^2 + b(T)Z^3$$

$$a(T), b(T) \in \mathbb{C}[T], \quad \Delta(T) \neq 0$$

- V és una superfície a $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

$$\begin{array}{rccc} \pi : & V & \longrightarrow & \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \\ & (x, y, z, t) & \mapsto & t \end{array}$$

- $\Delta(T) \neq 0 \Rightarrow$ la fibra genèrica és una corba el·líptica
- La fibra en un punt $t_0 \in \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ és la corba

$$E_{t_0} : Y^2Z = X^3 + a(t_0)XZ^2 + b(t_0)Z^3$$

- E_t és una d'aquestes corbes:

Exemple

- V Corba el·líptica sobre $\mathbb{C}(T)$

$$V : Y^2Z = X^3 + a(T)XZ^2 + b(T)Z^3$$
$$a(T), b(T) \in \mathbb{C}[T], \quad \Delta(T) \neq 0$$

- V és una superfície a $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

$$\begin{array}{rccc} \pi : & V & \longrightarrow & \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \\ & (x, y, z, t) & \mapsto & t \end{array}$$

- $\Delta(T) \neq 0 \Rightarrow$ la fibra genèrica és una corba el·líptica
- La fibra en un punt $t_0 \in \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ és la corba

$$E_{t_0} : \; Y^2Z = X^3 + a(t_0)XZ^2 + b(t_0)Z^3$$

- E_t és una d'aquestes corbes:

Exemple

- V Corba el·líptica sobre $\mathbb{C}(T)$

$$V : Y^2Z = X^3 + a(T)XZ^2 + b(T)Z^3$$

$$a(T), b(T) \in \mathbb{C}[T], \quad \Delta(T) \neq 0$$

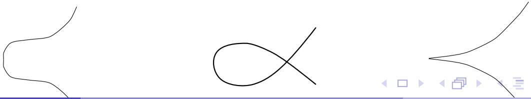
- V és una superfície a $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

$$\begin{array}{rccc} \pi : & V & \longrightarrow & \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \\ & (x,y,z,t) & \mapsto & t \end{array}$$

- $\Delta(T) \neq 0 \Rightarrow$ la fibra genèrica és una corba el·líptica
- La fibra en un punt $t_0 \in \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ és la corba

$$E_{t_0} : \; Y^2Z = X^3 + a(t_0)XZ^2 + b(t_0)Z^3$$

- E_t és una d'aquestes corbes:



Anàleg geomètric

- En general: si V
  - és regular
  - té fibres completes
  - no té divisors excepcionals

  el problema es pot resoldre fent servir només teoria de la intersecció a V.
- En el nostre cas $\mathcal{C}$
  - és regular
  - propi (fibres completes)
  - minimal (sense divisors excepcionals)

  la solució geomètrica s'adapta al cas aritmètic.

Anàleg geomètric

- En general: si V
  - és regular
  - té fibres completes
  - no té divisors excepcionals

  el problema es pot resoldre fent servir només teoria de la intersecció a V.
- En el nostre cas $\mathcal{C}$
  - és regular
  - propi (fibres completes)
  - minimal (sense divisors excepcionals)

  la solució geomètrica s'adapta al cas aritmètic.

Classificacions segons el gènere de la fibra genèrica

- Gènere 1: classificació completa de la fibra especial
  - Kodaira: cas geomètric
  - Néron: adapta la prova al context aritmètic
- Gènere 2: classificació completa de la fibra especial
  - Ogg: cas geomètric
  - Namikawa-Ueno: completen la llista
- Cas $g \geq 2$: no hi ha classificació completa
  - Artin i Winters: per a cada g el nombre de tipus és finit

Teoria de la intersecció

Com que el model $\mathcal{C}/R$ és regular i propi tenim:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Div}(\mathcal{C}) \times \mathrm{Div}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{C}) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ (D, \Gamma) & \longmapsto & D \cdot \Gamma \end{array}$$

Si Γ és un divisor fibral aleshores

- $\Gamma^2 \leq 0$
- $\Gamma^2 = 0$ si i només si $\Gamma = a\,\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$, $a \in \mathbb{Q}$
- Fòrmula d'adjunció:

$$\Gamma^2 + K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma = 2p_a(\Gamma) - 2$$

$K_{\mathcal{C}}$ és el divisor excepcional de $\mathcal{C}$

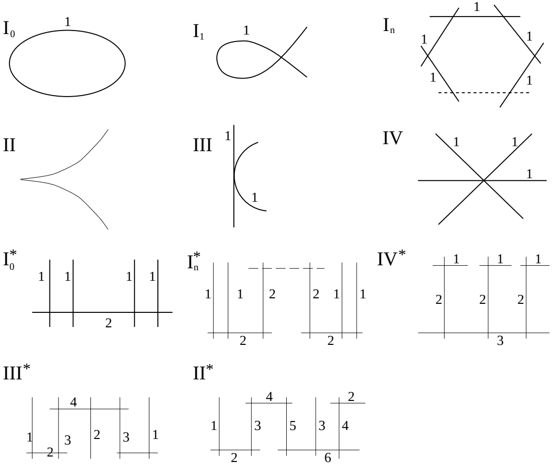
Outline

Outline

Classificació de Kodaira-Néron

- E/K una corba el·líptica
- $\mathcal{C}/R$ un model regular propi minimal de E/K

Aleshores $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}} = \sum_{i=1}^{r} n_i \Gamma_i$ és d'algun dels tipus:



Idea de la prova

$$\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}^2 + K_{\mathcal{C}} \cdot \mathcal{C}_{\mathfrak{p}} = 2g - 2 = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} n_i \, K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 0$$

1. Si $r = 1$
   - $p_a(\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}) = 1 \Rightarrow$ Tipus I_0, I_1, II
2. Si $r > 1$
   - $\Gamma_i \neq a\,\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$
   - $\mathcal{C}/R$ minimal $\Rightarrow K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i \geq 0$

   - $p_a(\Gamma_i) = 0$, $\Gamma_i^2 = -2$
   - $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$ és unió de $\mathbb{P}^1_k$'s

Idea de la prova

$$\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}^2 + K_{\mathcal{C}} \cdot \mathcal{C}_{\mathfrak{p}} = 2g - 2 = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} n_i\, K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 0$$

1. Si $r = 1$
   - $p_a(\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}) = 1 \Rightarrow$ Tipus I_0, I_1, II
2. Si $r > 1$
   - $\Gamma_i \neq a\,\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$
   - $\mathcal{C}/R$ minimal $\Rightarrow K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i \geq 0$
     - $\Gamma_i^2 + K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 2p_a(\Gamma_i) - 2$
   - $p_a(\Gamma_i) = 0$, $\Gamma_i^2 = -2$
   - $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$ és unió de $\mathbb{P}_k^1$'s

Idea de la prova

$$\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}^2 + K_{\mathcal{C}} \cdot \mathcal{C}_{\mathfrak{p}} = 2g - 2 = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} n_i K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 0$$

1. Si $r = 1$
   - $p_a(\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}) = 1 \Rightarrow$ Tipus I_0, I_1, II
2. Si $r > 1$
   - $\Gamma_i \neq a\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$
   - $\mathcal{C}/R$ minimal $\Rightarrow K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i \geq 0$
     - $\Gamma_i^2 + K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 2p_a(\Gamma_i) - 2$
   - $p_a(\Gamma_i) = 0$, $\Gamma_i^2 = -2$
   - $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$ és unió de $\mathbb{P}_k^1$'s

Idea de la prova

$$\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}^2 + K_{\mathcal{C}} \cdot \mathcal{C}_{\mathfrak{p}} = 2g - 2 = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} n_i\, K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 0$$

1. Si $r = 1$
   - $p_a(\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}) = 1 \Rightarrow$ Tipus I_0, I_1, II
2. Si $r > 1$
   - $\Gamma_i \neq a\,\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$
   - $\mathcal{C}/R$ minimal $\Rightarrow K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i \geq 0$
     - $\Gamma_i^2 + K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 2p_a(\Gamma_i) - 2$
   - $p_a(\Gamma_i) = 0,\ \Gamma_i^2 = -2$
   - $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$ és unió de $\mathbb{P}^1_k$'s

Idea de la prova

$$\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}^2 + K_{\mathcal{C}} \cdot \mathcal{C}_{\mathfrak{p}} = 2g - 2 = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} n_i K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 0$$

1. Si $r = 1$
   - $p_a(\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}) = 1 \Rightarrow$ Tipus I_0, I_1, II
2. Si $r > 1$
   - $\Gamma_i \neq a\,\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$
   - $\mathcal{C}/R$ minimal $\Rightarrow K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i \geq 0$
     - ★ $\Gamma_i^2 + K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 2p_a(\Gamma_i) - 2$
   - $p_a(\Gamma_i) = 0$, $\Gamma_i^2 = -2$
   - $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$ és unió de $\mathbb{P}_k^1$'s

Idea de la prova

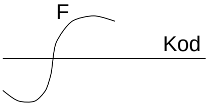
Per a trobar les configuracions concretes:

- intersecció de cada Γ_i amb la resta de la fibra

$$(\mathcal{C}_{\mathfrak{p}} - n_i\,\Gamma_i)\cdot\Gamma_i = 2\,n_i$$

Outline

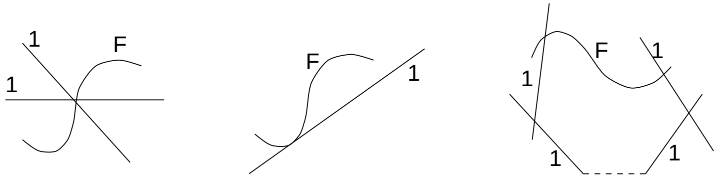
Notació: si F és una corba qualsevol la figura



indica

- qualsevol de les configuracions de Kodaira-Néron amb més d'una component
- però amb una component de multiplicitat 1 substituïda per F

Per exemple:



Reducció de corbes de gènere 2

$$\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}^2 + K_{\mathcal{C}} \cdot \mathcal{C}_{\mathfrak{p}} = 2g - 2 = 2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} n_i \, K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 2$$

1. Si $r = 1$
   - $p_a(\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}) = 2$
2. Si $r > 1$
   - $\mathcal{C}$ minimal $\Rightarrow K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i \geq 0$
   - $\Gamma_i^2 + k_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 2p_a(\Gamma_i) - 2$
   - Cada Γ_i és d'algun dels tipus següents:

Reducció de corbes de gènere 2

$$\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}^2 + K_{\mathcal{C}} \cdot \mathcal{C}_{\mathfrak{p}} = 2g - 2 = 2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} n_i K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 2$$

1. Si $r = 1$
   - $p_a(\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}) = 2$
2. Si $r > 1$
   - $\mathcal{C}$ minimal $\Rightarrow K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i \geq 0$
   - $\Gamma_i^2 + k_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 2p_a(\Gamma_i) - 2$
   - Cada Γ_i és d'algun dels tipus següents:
     - Tipus A: $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 1$
     - Tipus B: $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 1$
     - Tipus C: $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 2$
     - Tipus D: $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 2$
     - Tipus E: $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 0$

Reducció de corbes de gènere 2

$$\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}^2 + K_{\mathcal{C}} \cdot \mathcal{C}_{\mathfrak{p}} = 2g - 2 = 2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} n_i \, K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 2$$

1. Si $r = 1$
   - $p_a(\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}) = 2$
2. Si $r > 1$
   - $\mathcal{C}$ minimal $\Rightarrow K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i \geq 0$
   - $\Gamma_i^2 + k_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 2p_a(\Gamma_i) - 2$
   - Cada Γ_i és d'algun dels tipus següents:

     Tipus A: $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 1$

     Tipus B: $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 1$

     Tipus C: $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 2$

     Tipus D: $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 2$

     Tipus E: $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 0$

Reducció de corbes de gènere 2

$$\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}^2 + K_{\mathcal{C}} \cdot \mathcal{C}_{\mathfrak{p}} = 2g - 2 = 2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} n_i K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 2$$

1. Si $r = 1$
   - $p_a(\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}) = 2$
2. Si $r > 1$
   - $\mathcal{C}$ minimal $\Rightarrow K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i \geq 0$
   - $\Gamma_i^2 + k_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 2p_a(\Gamma_i) - 2$
   - Cada Γ_i és d'algun dels tipus següents:

     Tipus A: $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 1$
     Tipus B: $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 1$
     Tipus C: $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 2$
     Tipus D: $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 2$
     Tipus E: $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 0$

Reducció de corbes de gènere 2

$$\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}^2 + K_{\mathcal{C}} \cdot \mathcal{C}_{\mathfrak{p}} = 2g - 2 = 2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} n_i K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 2$$

1. Si $r = 1$
   - $p_a(\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}) = 2$
2. Si $r > 1$
   - $\mathcal{C}$ minimal $\Rightarrow K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i \geq 0$
   - $\Gamma_i^2 + k_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 2p_a(\Gamma_i) - 2$
   - Cada Γ_i és d'algun dels tipus següents:

     Tipus A: $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 1$
     Tipus B: $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 1$
     Tipus C: $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 2$
     Tipus D: $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 2$
     Tipus E: $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 0$

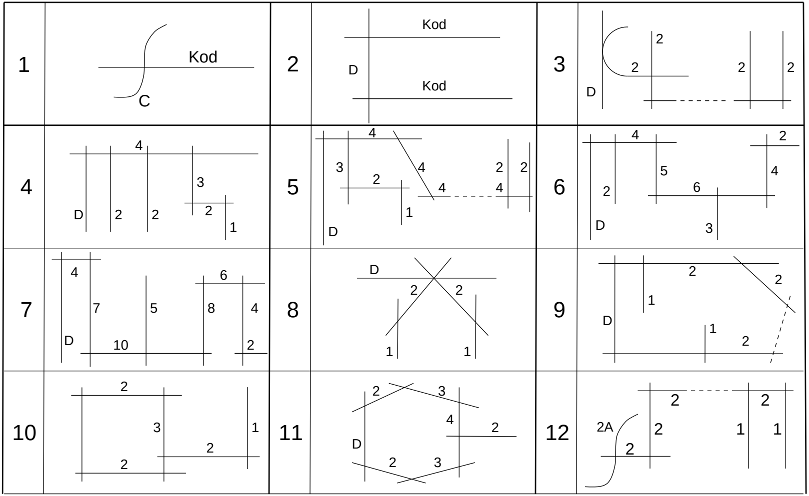
Reducció de corbes de gènere 2

$$\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}^2 + K_{\mathcal{C}} \cdot \mathcal{C}_{\mathfrak{p}} = 2g - 2 = 2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} n_i K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 2$$

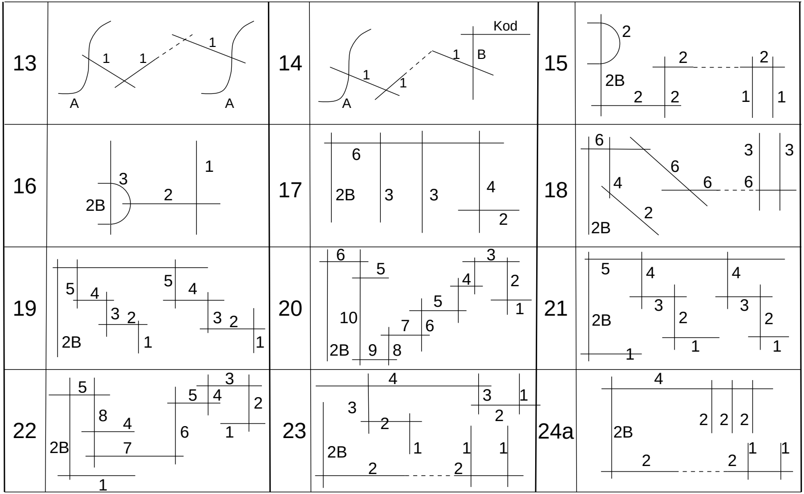
1. Si $r = 1$
   - $p_a(\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}) = 2$
2. Si $r > 1$
   - $\mathcal{C}$ minimal $\Rightarrow K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i \geq 0$
   - $\Gamma_i^2 + k_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 2p_a(\Gamma_i) - 2$
   - Cada Γ_i és d'algun dels tipus següents:

Tipus A:	$K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 1$	$\Gamma_i^2 = -1$	$p_a(\Gamma_i) = 1$
Tipus B:	$K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 1$	$\Gamma_i^2 = -3$	$p_a(\Gamma_i) = 0$
Tipus C:	$K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 2$	$\Gamma_i^2 = -2$	$p_a(\Gamma_i) = 1$
Tipus D:	$K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 2$	$\Gamma_i^2 = -4$	$p_a(\Gamma_i) = 0$
Tipus E:	$K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 0$	$\Gamma_i^2 = -2$	$p_a(\Gamma_i) = 0$

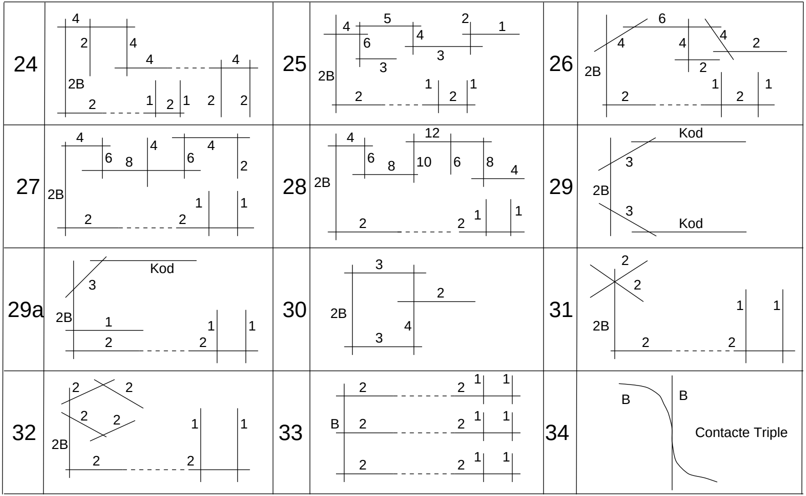
Classificació d'Ogg



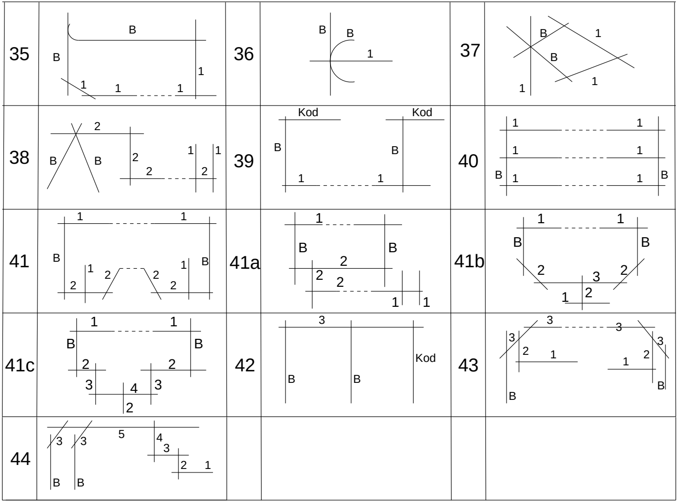
Classificació d'Ogg



Classificació d'Ogg



Classificació d'Ogg



Outline

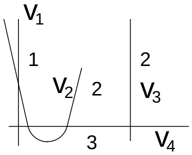
El graf dual

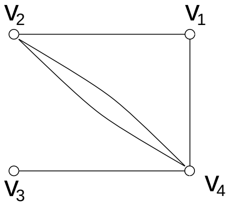
C/K corba de gènere $g \geq 2$
$\mathcal{C}/R$ model propi regular minimal
$\mathcal{C}_{\mathfrak{p}} = \sum_{i=1}^{r} n_i \Gamma_i$

- El graf dual de $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$ és el graf $G(\mathcal{C}_{\mathfrak{p}})$ que té
  - un vèrtex v_i per a cada component Γ_i
  - $\Gamma_i \cdot \Gamma_j$ arestes entre v_i i v_j
- La mateixa definició per a qualsevol divisor fibral.

El graf dual

- Exemple:

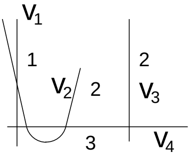


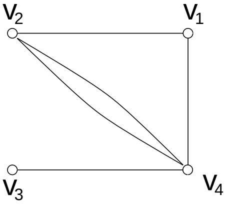


- No hi ha informació de multiplicitats i tangències.
- Un divisor Γ és connex $\iff$ $G(\Gamma)$ és connex

El graf dual

- Exemple:

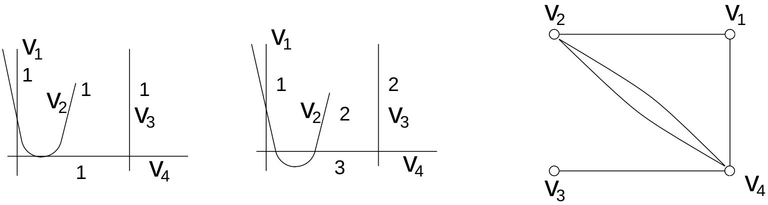




- No hi ha informació de multiplicitats i tangències.
- Un divisor Γ és connex $\iff$ $G(\Gamma)$ és connex

El graf dual

- Exemple:



- No hi ha informació de multiplicitats i tangències.
- Un divisor Γ és connex $\iff$ $G(\Gamma)$ és connex

Reducció de corbes amb $g \geq 2$

Com sempre tenim la restricció

$$\sum_{i=1}^{r} n_i \, K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 2g - 2$$

i $\mathcal{C}/R$ minimal $\Rightarrow K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i \geq 0$.
Els Γ_i es divideixen en:

1. $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i > 0$
   - Com a molt n'hi ha $2g - 2$
   - No podem dir que tinguin gènere aritmètic 0
2. $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 0$
   - $p_a(\Gamma_i) = 0$
   - $\Gamma_i \cdot \Gamma_j \leq 1$ per $i \neq j$
   - $\Gamma_i^2 = -2$

Considerem només les components amb $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 0$: és una unió de $\mathbb{P}^1_k$ possiblement no connexa.
En el graf dual pot ser no connex.

Reducció de corbes amb $g \geq 2$

Com sempre tenim la restricció

$$\sum_{i=1}^{r} n_i \, K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 2g - 2$$

i $\mathcal{C}/R$ minimal $\Rightarrow K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i \geq 0$.
Els Γ_i es divideixen en:

1. $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i > 0$
   - Com a molt n'hi ha $2g - 2$
   - No podem dir que tinguin gènere aritmètic 0
2. $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 0$
   - $p_a(\Gamma_i) = 0$
   - $\Gamma_i \cdot \Gamma_j \leq 1$ per $i \neq j$
   - $\Gamma_i^2 = -2$

Considerem només les components amb $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 0$: és una unió de $\mathbb{P}^1_k$ possiblement no connexa.
En el graf dual pot ser no connex.

Reducció de corbes amb $g \geq 2$

Com sempre tenim la restricció

$$\sum_{i=1}^{r} n_i \, K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 2g - 2$$

i $\mathcal{C}/R$ minimal $\Rightarrow K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i \geq 0$.
Els Γ_i es divideixen en:

1. $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i > 0$
   - Com a molt n'hi ha $2g - 2$
   - No podem dir que tinguin gènere aritmètic 0
2. $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 0$
   - $p_a(\Gamma_i) = 0$
   - $\Gamma_i \cdot \Gamma_j \leq 1$ per $i \neq j$
   - $\Gamma_i^2 = -2$

Considerem només les components amb $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 0$: és una unió de $\mathbb{P}^1_k$ possiblement no connexa.
En el graf dual pot ser no connex.

Reducció de corbes amb $g \geq 2$

Com sempre tenim la restricció

$$\sum_{i=1}^{r} n_i \, K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 2g - 2$$

i $\mathcal{C}/R$ minimal $\Rightarrow K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i \geq 0$.

Els Γ_i es divideixen en:

1. $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i > 0$
   - Com a molt n'hi ha $2g - 2$
   - No podem dir que tinguin gènere aritmètic 0
2. $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 0$
   - $p_a(\Gamma_i) = 0$
   - $\Gamma_i \cdot \Gamma_j \leq 1$ per $i \neq j$
   - $\Gamma_i^2 = -2$

Considerem només les components amb $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 0$: és una unió de $\mathbb{P}^1_k$ possiblement no connexa.

En el graf dual pot ser no connex.

Reducció de corbes amb $g \geq 2$

Com sempre tenim la restricció

$$\sum_{i=1}^{r} n_i K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 2g - 2$$

i $\mathcal{C}/R$ minimal $\Rightarrow K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i \geq 0$.
Els Γ_i es divideixen en:

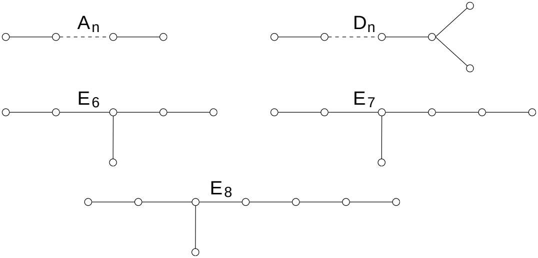
1. $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i > 0$
   - Com a molt n'hi ha $2g - 2$
   - No podem dir que tinguin gènere aritmètic 0
2. $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 0$
   - $p_a(\Gamma_i) = 0$
   - $\Gamma_i \cdot \Gamma_j \leq 1$ per $i \neq j$
   - $\Gamma_i^2 = -2$

Considerem només les components amb $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 0$: és una unió de $\mathbb{P}_k^1$ possiblement no connexa.
En el graf dual pot ser no connex.

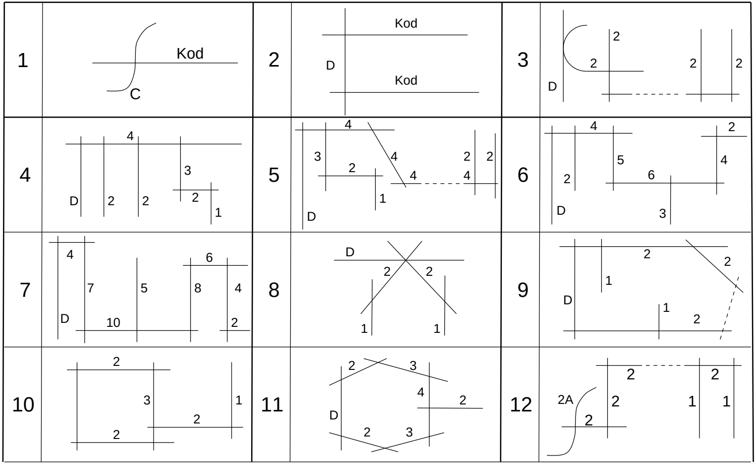
Reducció de corbes amb $g \geq 2$

Proposició

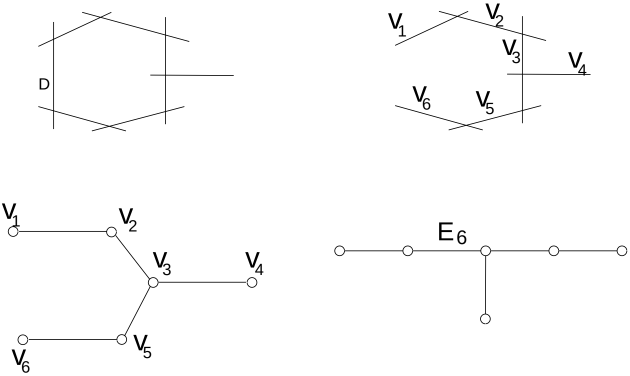
$G(\mathcal{C}_\mathfrak{p})$ el graf dual de $\mathcal{C}_\mathfrak{p}$
$G_1(\mathcal{C}_\mathfrak{p})$ el graf on ens quedem els Γ_i amb $K_\mathcal{C} \cdot \Gamma_i = 0$
Tota component connexa de $G_1(\mathcal{C}_\mathfrak{p})$ és alguna d'aquestes:



Ho podem observar a la classificació d'Ogg:

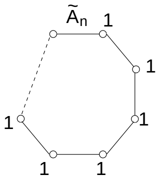


Exemple: tipus 11



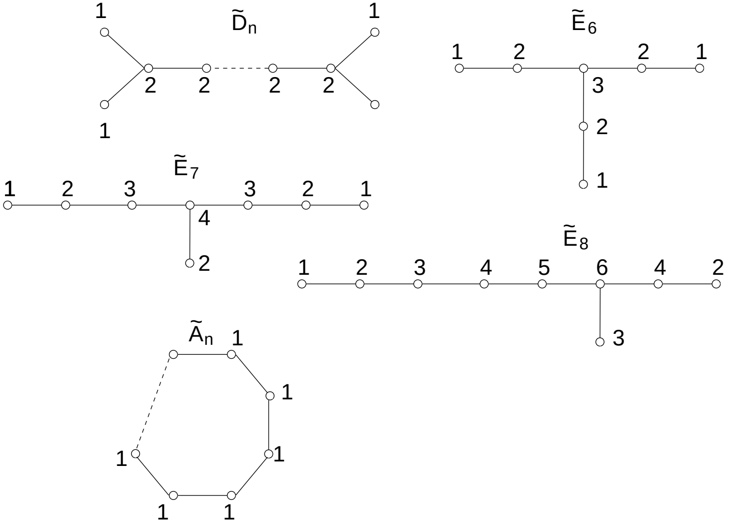
Demostració

- $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$ divisors irreductibles associats a una component connexa.
- Γ divisor amb suport $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s \Rightarrow \Gamma^2 < 0$
- Si el graf té un camí tancat, conté un subraf del tipus



el divisor Γ associat a aquest subgraf compleix $\Gamma^2 = 0$

Demostració



Multiplicitats i nombre de components connexes de $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$

Proposició

$G(\mathcal{C}_{\mathfrak{p}})$ el graf dual de $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$
$G_1(\mathcal{C}_{\mathfrak{p}})$ el graf on ens quedem els Γ_i amb $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 0$
Existeix una constant c que només depèn de g tal que

1. *$n_i \leq c$ per a tot i.*
2. *El nombre de components connexes de $G_1(\mathcal{C}_{\mathfrak{p}})$ és menor que c.*

Corol·lari

Per a g fixat hi ha un nombre finit de tipus de reduccions possibles per a $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$

Multiplicitats i nombre de components connexes de $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$

Proposició

$G(\mathcal{C}_{\mathfrak{p}})$ el graf dual de $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$
$G_1(\mathcal{C}_{\mathfrak{p}})$ el graf on ens quedem els Γ_i amb $K_{\mathcal{C}} \cdot \Gamma_i = 0$
Existeix una constant c que només depèn de g tal que

1. *$n_i \leq c$ per a tot i.*
2. *El nombre de components connexes de $G_1(\mathcal{C}_{\mathfrak{p}})$ és menor que c.*

Corol·lari

Per a g fixat hi ha un nombre finit de tipus de reduccions possibles per a $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$

Tipus de reduccions de corbes

Xevi Guitart

Departament de Matemàtica Aplicada 2
Universitat Politècnica de Catalunya