# Una construcción cuaterniónica de módulos singulares $p$-ádicos

Xevi Guitart (UB) Marc Masdeu (UAB) Xavier Xarles (UAB)

Seminario de teoría de números ICMAT-UAM

# Outline

1. La teoría clásica: módulos singulares
2. Una teoría reciente: módulos singulares $p$-ádicos
3. Nuestra propupesta: una versión cuaterniónica

# Outline

1. La teoría clásica: módulos singulares
2. Una teoría reciente: módulos singulares $p$-ádicos
3. Nuestra propupesta: una versión cuaterniónica

# Teoría de cuerpos de clase explícita

- $K$ cuerpo de números: describe $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$ via $K$
- Aplicación de Artin $\theta_K\colon C_K := \mathbb{A}_K^\times/K^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$
  - $\widehat{C_K} \simeq \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$, $\widehat{C_K} := \varprojlim_U C_K/U$
  - $\{$subgrupos de índice finito de $C_K\} \leftrightarrow \{$ ext. ab. finitas de $K\}$
- CFT explícita: dar generadores explícitos de $K^{\mathrm{ab}}$?
  - Se sabe en algunos casos: $K = \mathbb{Q}$, cuadrático imaginario.

**Teorema (Kronecker–Webber)**

- Toda extensión abeliana de $\mathbb{Q}$ está contenida en un ciclotómico.
- $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}} = \mathbb{Q}(\{e^{2\pi i m}\}_{m\in\mathbb{Q}})$.

- $e(z) = e^{2\pi i z}$ evaluada en $z$'s racionales produce números algebraicos, que generan extensiones abelianas.
- Encontrar funciones similares para cualquier $K$ es el Kronecker's Jugendtraum o Problema 12 de Hilbert
- Si $K$ es imaginario cuadrático, el papel de $e^{2\pi i z}$ lo juega $j(z)$

# Teoría de cuerpos de clase explícita

- $K$ cuerpo de números: describe $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$ via $K$
- Aplicación de Artin $\theta_K \colon C_K := \mathbb{A}_K^\times/K^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$
  - $\widehat{C_K} \simeq \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$, $\widehat{C_K} := \varprojlim_U C_K/U$
  - $\{$subgrupos de índice finito de $C_K\} \leftrightarrow \{$ ext. ab. finitas de $K\}$
- CFT explícita: dar generadores explícitos de $K^{\mathrm{ab}}$?
  - Se sabe en algunos casos: $K = \mathbb{Q}$, cuadrático imaginario.

**Teorema (Kronecker–Webber)**

- Toda extensión abeliana de $\mathbb{Q}$ está contenida en un ciclotómico.
- $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}} = \mathbb{Q}(\{e^{2\pi i m}\}_{m\in\mathbb{Q}})$.

- $e(z) = e^{2\pi i z}$ evaluada en $z$'s racionales produce números algebraicos, que generan extensiones abelianas.
- Encontrar funciones similares para cualquier $K$ es el Kronecker's Jugendtraum o Problema 12 de Hilbert
- Si $K$ es imaginario cuadrático, el papel de $e^{2\pi i z}$ lo juega $j(z)$

# Teoría de cuerpos de clase explícita

- $K$ cuerpo de números: describe $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$ via $K$
- Aplicación de Artin $\theta_K \colon C_K := \mathbb{A}_K^\times/K^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$
  - $\widehat{C_K} \simeq \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$, $\quad \widehat{C_K} := \lim_U C_K/U$
  - $\{$subgrupos de índice finito de $C_K\} \leftrightarrow \{$ ext. ab. finitas de $K\}$
- CFT explícita: dar generadores explícitos de $K^{\mathrm{ab}}$?
  - Se sabe en algunos casos: $K = \mathbb{Q}$, cuadrático imaginario.

**Teorema (Kronecker–Webber)**

- Toda extensión abeliana de $\mathbb{Q}$ está contenida en un ciclotómico.
- $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}} = \mathbb{Q}(\{e^{2\pi i m}\}_{m\in\mathbb{Q}})$.

- $e(z) = e^{2\pi i z}$ evaluada en $z$'s racionales produce números algebraicos, que generan extensiones abelianas.
- Encontrar funciones similares para cualquier $K$ es el Kronecker's Jugendtraum o Problema 12 de Hilbert
- Si $K$ es imaginario cuadrático, el papel de $e^{2\pi i z}$ lo juega $j(z)$

# Teoría de cuerpos de clase explícita

- $K$ cuerpo de números: describe $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$ via $K$
- Aplicación de Artin $\theta_K\colon C_K := \mathbb{A}_K^\times/K^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$
  - $\widehat{C_K} \simeq \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$, $\quad \widehat{C_K} := \lim_U C_K/U$
  - {subgrupos de índice finito de $C_K$} $\leftrightarrow$ { ext. ab. finitas de $K$}
- CFT explícita: dar generadores explícitos de $K^{\mathrm{ab}}$?
  - Se sabe en algunos casos: $K = \mathbb{Q}$, cuadrático imaginario.

**Teorema (Kronecker–Webber)**

- Toda extensión abeliana de $\mathbb{Q}$ está contenida en un ciclotómico.
- $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}} = \mathbb{Q}(\{e^{2\pi i m}\}_{m\in\mathbb{Q}})$.

- $e(z) = e^{2\pi i z}$ evaluada en $z$'s racionales produce números algebraicos, que generan extensiones abelianas.
- Encontrar funciones similares para cualquier $K$ es el Kronecker's Jugendtraum o Problema 12 de Hilbert
- Si $K$ es imaginario cuadrático, el papel de $e^{2\pi i z}$ lo juega $j(z)$

# Teoría de cuerpos de clase explícita

- $K$ cuerpo de números: describe $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$ via $K$
- Aplicación de Artin $\theta_K\colon C_K := \mathbb{A}_K^\times/K^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$
  - $\widehat{C_K} \simeq \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$, $\quad \widehat{C_K} := \lim_U C_K/U$
  - {subgrupos de índice finito de $C_K$} $\leftrightarrow$ { ext. ab. finitas de $K$}
- CFT explícita: dar generadores explícitos de $K^{\mathrm{ab}}$?
  - Se sabe en algunos casos: $K = \mathbb{Q}$, cuadrático imaginario.

**Teorema (Kronecker–Webber)**

- Toda extensión abeliana de $\mathbb{Q}$ está contenida en un ciclotómico.
- $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}} = \mathbb{Q}(\{e^{2\pi i m}\}_{m\in\mathbb{Q}})$.

- $e(z) = e^{2\pi i z}$ evaluada en $z$'s racionales produce números algebraicos, que generan extensiones abelianas.
- Encontrar funciones similares para cualquier $K$ es el Kronecker's Jugendtraum o Problema 12 de Hilbert
- Si $K$ es imaginario cuadrático, el papel de $e^{2\pi i z}$ lo juega $j(z)$

# Teoría de cuerpos de clase explícita

- $K$ cuerpo de números: describe $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$ via $K$
- Aplicación de Artin $\theta_K\colon C_K := \mathbb{A}_K^\times/K^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$
  - $\widehat{C_K} \simeq \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$, $\quad \widehat{C_K} := \lim_U C_K/U$
  - $\{$subgrupos de índice finito de $C_K\} \leftrightarrow \{$ ext. ab. finitas de $K\}$
- CFT explícita: dar generadores explícitos de $K^{\mathrm{ab}}$?
  - Se sabe en algunos casos: $K = \mathbb{Q}$, cuadrático imaginario.

**Teorema (Kronecker–Webber)**

- Toda extensión abeliana de $\mathbb{Q}$ está contenida en un ciclotómico.
- $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}} = \mathbb{Q}(\{e^{2\pi i m}\}_{m\in\mathbb{Q}})$.

- $e(z) = e^{2\pi i z}$ evaluada en $z$'s racionales produce números algebraicos, que generan extensiones abelianas.
- Encontrar funciones similares para cualquier $K$ es el Kronecker's Jugendtraum o Problema 12 de Hilbert
- Si $K$ es imaginario cuadrático, el papel de $e^{2\pi i z}$ lo juega $j(z)$

# Teoría de cuerpos de clase explícita

- $K$ cuerpo de números: describe $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$ via $K$
- Aplicación de Artin $\theta_K \colon C_K := \mathbb{A}_K^\times / K^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$
  - $\widehat{C_K} \simeq \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$, $\quad \widehat{C_K} := \lim_U C_K/U$
  - $\{$subgrupos de índice finito de $C_K\} \leftrightarrow \{$ ext. ab. finitas de $K\}$
- CFT explícita: dar generadores explícitos de $K^{\mathrm{ab}}$?
  - Se sabe en algunos casos: $K = \mathbb{Q}$, cuadrático imaginario.

**Teorema (Kronecker–Webber)**

- Toda extensión abeliana de $\mathbb{Q}$ está contenida en un ciclotómico.
- $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}} = \mathbb{Q}(\{e^{2\pi i m}\}_{m \in \mathbb{Q}})$.

- $e(z) = e^{2\pi i z}$ evaluada en $z$'s racionales produce números algebraicos, que generan extensiones abelianas.
- Encontrar funciones similares para cualquier $K$ es el Kronecker's Jugendtraum o Problema 12 de Hilbert
- Si $K$ es imaginario cuadrático, el papel de $e^{2\pi i z}$ lo juega $j(z)$

# Teoría de cuerpos de clase explícita

- $K$ cuerpo de números: describe $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$ via $K$
- Aplicación de Artin $\theta_K\colon C_K := \mathbb{A}_K^\times/K^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$
  - $\widehat{C_K} \simeq \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$, $\quad \widehat{C_K} := \lim_U C_K/U$
  - $\{$subgrupos de índice finito de $C_K\} \leftrightarrow \{$ ext. ab. finitas de $K\}$
- CFT explícita: dar generadores explícitos de $K^{\mathrm{ab}}$?
  - Se sabe en algunos casos: $K = \mathbb{Q}$, cuadrático imaginario.

**Teorema (Kronecker–Webber)**

- Toda extensión abeliana de $\mathbb{Q}$ está contenida en un ciclotómico.
- $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}} = \mathbb{Q}(\{e^{2\pi i m}\}_{m\in\mathbb{Q}})$.

- $e(z) = e^{2\pi i z}$ evaluada en $z$'s racionales produce números algebraicos, que generan extensiones abelianas.
- Encontrar funciones similares para cualquier $K$ es el Kronecker's Jugendtraum o Problema 12 de Hilbert
- Si $K$ es imaginario cuadrático, el papel de $e^{2\pi i z}$ lo juega $j(z)$

# Teoría de cuerpos de clase explícita

- $K$ cuerpo de números: describe $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$ via $K$
- Aplicación de Artin $\theta_K\colon C_K := \mathbb{A}_K^\times/K^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$
  - $\widehat{C_K} \simeq \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$, $\quad \widehat{C_K} := \lim_U C_K/U$
  - $\{$subgrupos de índice finito de $C_K\} \leftrightarrow \{$ ext. ab. finitas de $K\}$
- CFT explícita: dar generadores explícitos de $K^{\mathrm{ab}}$?
  - Se sabe en algunos casos: $K = \mathbb{Q}$, cuadrático imaginario.

## Teorema (Kronecker–Webber)

- Toda extensión abeliana de $\mathbb{Q}$ está contenida en un ciclotómico.
- $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}} = \mathbb{Q}(\{e^{2\pi i m}\}_{m\in\mathbb{Q}})$.

- $e(z) = e^{2\pi i z}$ evaluada en $z$'s racionales produce números algebraicos, que generan extensiones abelianas.
- Encontrar funciones similares para cualquier $K$ es el Kronecker's Jugendtraum o Problema 12 de Hilbert
- Si $K$ es imaginario cuadrático, el papel de $e^{2\pi i z}$ lo juega $j(z)$

# Teoría de cuerpos de clase explícita

- $K$ cuerpo de números: describe $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$ via $K$
- Aplicación de Artin $\theta_K \colon C_K := \mathbb{A}_K^\times/K^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$
  - $\widehat{C_K} \simeq \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$, $\quad \widehat{C_K} := \lim_U C_K/U$
  - $\{$subgrupos de índice finito de $C_K\} \leftrightarrow \{$ ext. ab. finitas de $K\}$
- CFT explícita: dar generadores explícitos de $K^{\mathrm{ab}}$?
  - Se sabe en algunos casos: $K = \mathbb{Q}$, cuadrático imaginario.

**Teorema (Kronecker–Webber)**

- Toda extensión abeliana de $\mathbb{Q}$ está contenida en un ciclotómico.
- $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}} = \mathbb{Q}(\{e^{2\pi i m}\}_{m\in\mathbb{Q}})$.

- $e(z) = e^{2\pi i z}$ evaluada en $z$'s racionales produce números algebraicos, que generan extensiones abelianas.
- Encontrar funciones similares para cualquier $K$ es el Kronecker's Jugendtraum o Problema 12 de Hilbert
- Si $K$ es imaginario cuadrático, el papel de $e^{2\pi i z}$ lo juega $j(z)$

# Teoría de cuerpos de clase explícita

- $K$ cuerpo de números: describe $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$ via $K$
- Aplicación de Artin $\theta_K \colon C_K := \mathbb{A}_K^\times/K^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$
  - $\widehat{C_K} \simeq \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$, $\quad \widehat{C_K} := \lim_U C_K/U$
  - $\{$subgrupos de índice finito de $C_K\} \leftrightarrow \{$ ext. ab. finitas de $K\}$
- CFT explícita: dar generadores explícitos de $K^{\mathrm{ab}}$?
  - Se sabe en algunos casos: $K = \mathbb{Q}$, cuadrático imaginario.

## Teorema (Kronecker–Webber)

- Toda extensión abeliana de $\mathbb{Q}$ está contenida en un ciclotómico.
- $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}} = \mathbb{Q}(\{e^{2\pi i m}\}_{m\in\mathbb{Q}})$.

- $e(z) = e^{2\pi i z}$ evaluada en $z$'s racionales produce números algebraicos, que generan extensiones abelianas.
- Encontrar funciones similares para cualquier $K$ es el Kronecker's Jugendtraum o Problema 12 de Hilbert
- Si $K$ es imaginario cuadrático, el papel de $e^{2\pi i z}$ lo juega $j(z)$

# La function *j*

- Es una función $j\colon \mathcal{H} = \{\tau \in \mathbb{C}\colon \mathrm{Im}(\tau) > 0\} \longrightarrow \mathbb{C}$.
- $\tau \in \mathcal{H} \rightsquigarrow E_\tau = \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ curva elíptica y $j(\tau) := j(E_\tau)$.
- $E_\tau\colon y^2 = 4x^3 - g_2(\tau)x - g_3(\tau)$
- $g_2(\tau) = 60G_4(\tau)$, $g_3(\tau) = 140G_6(\tau)$, $G_k(\tau) := \sum_{c,d\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(c\tau+d)^k}$
- $j(\tau) = 1728\frac{g_2(\tau)^3}{g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2}$
- $j(q) = q^{-1} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + 864299970q^3 + \cdots (q = e^{2\pi i\tau})$
- $j$ es una función modular: es invariante por $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$
- Toda función invariante por $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ es una función racional en $j$

# La function $j$

- Es una función $j\colon \mathcal{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \colon \mathrm{Im}(\tau) > 0\} \longrightarrow \mathbb{C}$.
- $\tau \in \mathcal{H} \rightsquigarrow E_\tau = \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ curva elíptica y $j(\tau) := j(E_\tau)$.
- $E_\tau \colon y^2 = 4x^3 - g_2(\tau)x - g_3(\tau)$
- $g_2(\tau) = 60G_4(\tau)$, $g_3(\tau) = 140G_6(\tau)$, $G_k(\tau) := \sum_{c,d\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(c\tau+d)^k}$
- $j(\tau) = 1728\frac{g_2(\tau)^3}{g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2}$
- $j(q) = q^{-1} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + 864299970q^3 + \cdots (q = e^{2\pi i\tau})$
- $j$ es una función modular: es invariante por $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$
- Toda función invariante por $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ es una función racional en $j$

# La function $j$

- Es una función $j\colon \mathcal{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \colon \mathrm{Im}(\tau) > 0\} \longrightarrow \mathbb{C}$.
- $\tau \in \mathcal{H} \rightsquigarrow E_\tau = \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ curva elíptica y $j(\tau) := j(E_\tau)$.
- $E_\tau \colon y^2 = 4x^3 - g_2(\tau)x - g_3(\tau)$
- $g_2(\tau) = 60G_4(\tau)$, $g_3(\tau) = 140G_6(\tau)$, $G_k(\tau) := \sum_{c,d\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(c\tau+d)^k}$
- $j(\tau) = 1728\frac{g_2(\tau)^3}{g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2}$
- $j(q) = q^{-1} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + 864299970q^3 + \cdots (q = e^{2\pi i\tau})$
- $j$ es una función modular: es invariante por $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$
- Toda función invariante por $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ es una función racional en $j$

# La function $j$

- Es una función $j\colon \mathcal{H} = \{\tau \in \mathbb{C}\colon \mathrm{Im}(\tau) > 0\} \longrightarrow \mathbb{C}$.
- $\tau \in \mathcal{H} \rightsquigarrow E_\tau = \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ curva elíptica y $j(\tau) := j(E_\tau)$.
- $E_\tau\colon y^2 = 4x^3 - g_2(\tau)x - g_3(\tau)$
- $g_2(\tau) = 60G_4(\tau)$, $g_3(\tau) = 140G_6(\tau)$, $G_k(\tau) := \sum_{c,d\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(c\tau+d)^k}$
- $j(\tau) = 1728\frac{g_2(\tau)^3}{g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2}$
- $j(q) = q^{-1} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + 864299970q^3 + \cdots (q = e^{2\pi i\tau})$
- $j$ es una función modular: es invariante por $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$
- Toda función invariante por $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ es una función racional en $j$

# La function $j$

- Es una función $j\colon \mathcal{H} = \{\tau \in \mathbb{C}\colon \mathrm{Im}(\tau) > 0\} \longrightarrow \mathbb{C}$.
- $\tau \in \mathcal{H} \rightsquigarrow E_\tau = \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ curva elíptica y $j(\tau) := j(E_\tau)$.
- $E_\tau\colon y^2 = 4x^3 - g_2(\tau)x - g_3(\tau)$
- $g_2(\tau) = 60G_4(\tau)$, $g_3(\tau) = 140G_6(\tau)$, $G_k(\tau) := \sum_{c,d\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(c\tau+d)^k}$
- $j(\tau) = 1728\frac{g_2(\tau)^3}{g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2}$
- $j(q) = q^{-1} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + 864299970q^3 + \cdots (q = e^{2\pi i\tau})$
- $j$ es una función modular: es invariante por $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$
- Toda función invariante por $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ es una función racional en $j$

# La function $j$

- Es una función $j\colon \mathcal{H} = \{\tau \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im}(\tau) > 0\} \longrightarrow \mathbb{C}$.
- $\tau \in \mathcal{H} \rightsquigarrow E_\tau = \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ curva elíptica y $j(\tau) := j(E_\tau)$.
- $E_\tau\colon y^2 = 4x^3 - g_2(\tau)x - g_3(\tau)$
- $g_2(\tau) = 60G_4(\tau)$, $g_3(\tau) = 140G_6(\tau)$, $G_k(\tau) := \sum_{c,d\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(c\tau+d)^k}$
- $j(\tau) = 1728\frac{g_2(\tau)^3}{g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2}$
- $j(q) = q^{-1} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + 864299970q^3 + \cdots (q = e^{2\pi i\tau})$
- $j$ es una función modular: es invariante por $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$
- Toda función invariante por $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ es una función racional en $j$

# La function $j$

- Es una función $j\colon \mathcal{H} = \{\tau \in \mathbb{C}\colon \mathrm{Im}(\tau) > 0\} \longrightarrow \mathbb{C}$.
- $\tau \in \mathcal{H} \rightsquigarrow E_\tau = \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ curva elíptica y $j(\tau) := j(E_\tau)$.
- $E_\tau\colon y^2 = 4x^3 - g_2(\tau)x - g_3(\tau)$
- $g_2(\tau) = 60G_4(\tau)$, $g_3(\tau) = 140G_6(\tau)$, $G_k(\tau) := \sum_{c,d\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(c\tau+d)^k}$
- $j(\tau) = 1728\frac{g_2(\tau)^3}{g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2}$
- $j(q) = q^{-1} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + 864299970q^3 + \cdots (q = e^{2\pi i\tau})$
- $j$ es una función modular: es invariante por $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$
- Toda función invariante por $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ es una función racional en $j$

# La function $j$

- Es una función $j\colon \mathcal{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \colon \mathrm{Im}(\tau) > 0\} \longrightarrow \mathbb{C}$.
- $\tau \in \mathcal{H} \rightsquigarrow E_\tau = \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ curva elíptica y $j(\tau) := j(E_\tau)$.
- $E_\tau \colon y^2 = 4x^3 - g_2(\tau)x - g_3(\tau)$
- $g_2(\tau) = 60G_4(\tau)$, $g_3(\tau) = 140G_6(\tau)$, $G_k(\tau) := \sum_{c,d\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(c\tau+d)^k}$
- $j(\tau) = 1728\frac{g_2(\tau)^3}{g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2}$
- $j(q) = q^{-1} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + 864299970q^3 + \cdots (q = e^{2\pi i\tau})$
- $j$ es una función modular: es invariante por $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$
- Toda función invariante por $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ es una función racional en $j$

# La función $j$ y CFT explícita

- Módulos singulares: si $\tau$ es un cuadrático imaginario, $j(\tau)$ es algebraico y genera una extensión abeliana de $K$.
- $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ cuadrático imaginario y $\tau \in K \setminus \mathbb{Q}$, $\tau \in \mathcal{H}$
- $E_\tau$ tiene CM por $K$:
  - $\mathcal{O}_\tau := \mathrm{End}(E_\tau)$ orden en $\mathcal{O}_K$
- $K(j(\tau))$ es el ring class field de $\mathcal{O}_\tau$ ($\leftrightarrow \prod_\ell (\mathcal{O}_\tau \otimes \mathbb{Z}_\ell)^\times \subset \mathbb{A}_K^\times$)
  - Ejemplo: si $\mathcal{O}_\tau = \mathcal{O}_K$ entonces $K(j(\tau))$ es el Hilbert class field de $K$
- $K(\{j(\tau)\}_{\tau \in K \setminus \mathbb{Q}}) \subset K^{\mathrm{ab}}$.
- $K^{\mathrm{ab}}$ se obtiene adjuntando puntos de torsión de $E_\tau$.

**Pregunta**

Hay alguna construcción similar para $K$ más generales?

- Si $K$ cuadrático real, teoría conjetural de Darmon–Vonk (2021)

# La función $j$ y CFT explícita

- Módulos singulares: si $\tau$ es un cuadrático imaginario, $j(\tau)$ es algebraico y genera una extensión abeliana de $K$.
- $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ cuadrático imaginario y $\tau \in K \setminus \mathbb{Q}$, $\tau \in \mathcal{H}$
- $E_\tau$ tiene CM por $K$:
  - $\mathcal{O}_\tau := \mathrm{End}(E_\tau)$ orden en $\mathcal{O}_K$
- $K(j(\tau))$ es el ring class field de $\mathcal{O}_\tau$ ($\leftrightarrow \prod_\ell (\mathcal{O}_\tau \otimes \mathbb{Z}_\ell)^\times \subset \mathbb{A}_K^\times$)
  - Ejemplo: si $\mathcal{O}_\tau = \mathcal{O}_K$ entonces $K(j(\tau))$ es el Hilbert class field de $K$
- $K(\{j(\tau)\}_{\tau \in K \setminus \mathbb{Q}}) \subset K^{\mathrm{ab}}$.
- $K^{\mathrm{ab}}$ se obtiene adjuntando puntos de torsión de $E_\tau$.

**Pregunta**

Hay alguna construcción similar para $K$ más generales?

- Si $K$ cuadrático real, teoría conjetural de Darmon–Vonk (2021)

# La función $j$ y CFT explícita

- Módulos singulares: si $\tau$ es un cuadrático imaginario, $j(\tau)$ es algebraico y genera una extensión abeliana de $K$.
- $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ cuadrático imaginario y $\tau \in K \setminus \mathbb{Q}$, $\tau \in \mathcal{H}$
- $E_\tau$ tiene CM por $K$:
  - $\mathcal{O}_\tau := \mathrm{End}(E_\tau)$ orden en $\mathcal{O}_K$
- $K(j(\tau))$ es el ring class field de $\mathcal{O}_\tau$ ($\leftrightarrow \prod_\ell (\mathcal{O}_\tau \otimes \mathbb{Z}_\ell)^\times \subset \mathbb{A}_K^\times$)
  - Ejemplo: si $\mathcal{O}_\tau = \mathcal{O}_K$ entonces $K(j(\tau))$ es el Hilbert class field de $K$
- $K(\{j(\tau)\}_{\tau \in K \setminus \mathbb{Q}}) \subset K^{\mathrm{ab}}$.
- $K^{\mathrm{ab}}$ se obtiene adjuntando puntos de torsión de $E_\tau$.

**Pregunta**

Hay alguna construcción similar para $K$ más generales?

- Si $K$ cuadrático real, teoría conjetural de Darmon–Vonk (2021)

# La función $j$ y CFT explícita

- Módulos singulares: si $\tau$ es un cuadrático imaginario, $j(\tau)$ es algebraico y genera una extensión abeliana de $K$.
- $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ cuadrático imaginario y $\tau \in K \setminus \mathbb{Q}$, $\tau \in \mathcal{H}$
- $E_\tau$ tiene CM por $K$:
  - $\mathcal{O}_\tau := \mathrm{End}(E_\tau)$ orden en $\mathcal{O}_K$
- $K(j(\tau))$ es el ring class field de $\mathcal{O}_\tau$ ($\leftrightarrow \prod_\ell (\mathcal{O}_\tau \otimes \mathbb{Z}_\ell)^\times \subset \mathbb{A}_K^\times$)
  - Ejemplo: si $\mathcal{O}_\tau = \mathcal{O}_K$ entonces $K(j(\tau))$ es el Hilbert class field de $K$
- $K(\{j(\tau)\}_{\tau \in K \setminus \mathbb{Q}}) \subset K^{\mathrm{ab}}$.
- $K^{\mathrm{ab}}$ se obtiene adjuntando puntos de torsión de $E_\tau$.

**Pregunta**

Hay alguna construcción similar para $K$ más generales?

- Si $K$ cuadrático real, teoría conjetural de Darmon–Vonk (2021)

# La función $j$ y CFT explícita

- Módulos singulares: si $\tau$ es un cuadrático imaginario, $j(\tau)$ es algebraico y genera una extensión abeliana de $K$.
- $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ cuadrático imaginario y $\tau \in K \setminus \mathbb{Q}$, $\tau \in \mathcal{H}$
- $E_\tau$ tiene CM por $K$:
  - $\mathcal{O}_\tau := \mathrm{End}(E_\tau)$ orden en $\mathcal{O}_K$
- $K(j(\tau))$ es el ring class field de $\mathcal{O}_\tau$ ($\leftrightarrow \prod_\ell (\mathcal{O}_\tau \otimes \mathbb{Z}_\ell)^\times \subset \mathbb{A}_K^\times$)
  - Ejemplo: si $\mathcal{O}_\tau = \mathcal{O}_K$ entonces $K(j(\tau))$ es el Hilbert class field de $K$
- $K(\{j(\tau)\}_{\tau \in K \setminus \mathbb{Q}}) \subset K^{\mathrm{ab}}$.
- $K^{\mathrm{ab}}$ se obtiene adjuntando puntos de torsión de $E_\tau$.

**Pregunta**

Hay alguna construcción similar para $K$ más generales?

- Si $K$ cuadrático real, teoría conjetural de Darmon–Vonk (2021)

# La función $j$ y CFT explícita

- Módulos singulares: si $\tau$ es un cuadrático imaginario, $j(\tau)$ es algebraico y genera una extensión abeliana de $K$.
- $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ cuadrático imaginario y $\tau \in K \setminus \mathbb{Q}$, $\tau \in \mathcal{H}$
- $E_\tau$ tiene CM por $K$:
  - $\mathcal{O}_\tau := \mathrm{End}(E_\tau)$ orden en $\mathcal{O}_K$
- $K(j(\tau))$ es el ring class field de $\mathcal{O}_\tau$ ($\leftrightarrow \prod_\ell (\mathcal{O}_\tau \otimes \mathbb{Z}_\ell)^\times \subset \mathbb{A}_K^\times$)
  - Ejemplo: si $\mathcal{O}_\tau = \mathcal{O}_K$ entonces $K(j(\tau))$ es el Hilbert class field de $K$
- $K(\{j(\tau)\}_{\tau \in K \setminus \mathbb{Q}}) \subset K^{\mathrm{ab}}$.
- $K^{\mathrm{ab}}$ se obtiene adjuntando puntos de torsión de $E_\tau$.

**Pregunta**

Hay alguna construcción similar para $K$ más generales?

- Si $K$ cuadrático real, teoría conjetural de Darmon–Vonk (2021)

# La función $j$ y CFT explícita

- Módulos singulares: si $\tau$ es un cuadrático imaginario, $j(\tau)$ es algebraico y genera una extensión abeliana de $K$.
- $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ cuadrático imaginario y $\tau \in K \setminus \mathbb{Q}$, $\tau \in \mathcal{H}$
- $E_\tau$ tiene CM por $K$:
  - $\mathcal{O}_\tau := \mathrm{End}(E_\tau)$ orden en $\mathcal{O}_K$
- $K(j(\tau))$ es el ring class field de $\mathcal{O}_\tau$ ($\leftrightarrow \prod_\ell (\mathcal{O}_\tau \otimes \mathbb{Z}_\ell)^\times \subset \mathbb{A}_K^\times$)
  - Ejemplo: si $\mathcal{O}_\tau = \mathcal{O}_K$ entonces $K(j(\tau))$ es el Hilbert class field de $K$
- $K(\{j(\tau)\}_{\tau \in K \setminus \mathbb{Q}}) \subset K^{\mathrm{ab}}$.
- $K^{\mathrm{ab}}$ se obtiene adjuntando puntos de torsión de $E_\tau$.

**Pregunta**

Hay alguna construcción similar para $K$ más generales?

- Si $K$ cuadrático real, teoría conjetural de Darmon–Vonk (2021)

# La función $j$ y CFT explícita

- Módulos singulares: si $\tau$ es un cuadrático imaginario, $j(\tau)$ es algebraico y genera una extensión abeliana de $K$.
- $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ cuadrático imaginario y $\tau \in K \setminus \mathbb{Q}$, $\tau \in \mathcal{H}$
- $E_\tau$ tiene CM por $K$:
  - $\mathcal{O}_\tau := \mathrm{End}(E_\tau)$ orden en $\mathcal{O}_K$
- $K(j(\tau))$ es el ring class field de $\mathcal{O}_\tau$ ($\leftrightarrow \prod_\ell (\mathcal{O}_\tau \otimes \mathbb{Z}_\ell)^\times \subset \mathbb{A}_K^\times$)
  - Ejemplo: si $\mathcal{O}_\tau = \mathcal{O}_K$ entonces $K(j(\tau))$ es el Hilbert class field de $K$
- $K(\{j(\tau)\}_{\tau \in K \setminus \mathbb{Q}}) \subset K^{\mathrm{ab}}$.
- $K^{\mathrm{ab}}$ se obtiene adjuntando puntos de torsión de $E_\tau$.

**Pregunta**

Hay alguna construcción similar para $K$ más generales?

- Si $K$ cuadrático real, teoría conjetural de Darmon–Vonk (2021)

# La función $j$ y CFT explícita

- Módulos singulares: si $\tau$ es un cuadrático imaginario, $j(\tau)$ es algebraico y genera una extensión abeliana de $K$.
- $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ cuadrático imaginario y $\tau \in K \setminus \mathbb{Q}$, $\tau \in \mathcal{H}$
- $E_\tau$ tiene CM por $K$:
  - $\mathcal{O}_\tau := \mathrm{End}(E_\tau)$ orden en $\mathcal{O}_K$
- $K(j(\tau))$ es el ring class field de $\mathcal{O}_\tau$ ($\leftrightarrow \prod_\ell (\mathcal{O}_\tau \otimes \mathbb{Z}_\ell)^\times \subset \mathbb{A}_K^\times$)
  - Ejemplo: si $\mathcal{O}_\tau = \mathcal{O}_K$ entonces $K(j(\tau))$ es el Hilbert class field de $K$
- $K(\{j(\tau)\}_{\tau \in K \setminus \mathbb{Q}}) \subset K^{\mathrm{ab}}$.
- $K^{\mathrm{ab}}$ se obtiene adjuntando puntos de torsión de $E_\tau$.

**Pregunta**

Hay alguna construcción similar para $K$ más generales?

- Si $K$ cuadrático real, teoría conjetural de Darmon–Vonk (2021)

# Outline

# Darmon–Vonk's $p$-adic singular moduli

- $K$ cuerpo cuadrático real y $\tau \in K \setminus \mathbb{Q}$.
- Problema: $\tau \notin \mathcal{H}$ y no se puede evaluar $j$ en $\tau$
  - Cambiar $\mathcal{H} = (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^+$ por $\mathcal{H}_p = \mathbb{C}_p \setminus \mathbb{Q}_p$ el semiplano $p$-ádico
  - Si $p$ no descompone en $K$, entonces $\tau \in \mathcal{H}_p$.
  - La acción de $\Gamma := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$ en $\mathcal{H}_p$ y en

$$\mathcal{M}^\times = \{\text{funciones rigidas meromorfas en } \mathcal{H}_p\}.$$

  - El análogo de $j$ ahora sería una función en $H^0(\Gamma, \mathcal{M}^\times)$.
- Problema: $H^0(\Gamma, \mathcal{M}^\times) = \mathbb{C}_p \rightsquigarrow$ no hay funciones interesantes aquí
  - Solución: considerar $H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times)$

# Darmon–Vonk's $p$-adic singular moduli

- $K$ cuerpo cuadrático real y $\tau \in K \setminus \mathbb{Q}$.
- Problema: $\tau \notin \mathcal{H}$ y no se puede evaluar $j$ en $\tau$
  - Cambiar $\mathcal{H} = (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^+$ por $\mathcal{H}_p = \mathbb{C}_p \setminus \mathbb{Q}_p$ el semiplano $p$-ádico
  - Si $p$ no descompone en $K$, entonces $\tau \in \mathcal{H}_p$.
  - La acción de $\Gamma := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$ en $\mathcal{H}_p$ y en

$$\mathcal{M}^\times = \{\text{funciones rigidas meromorfas en } \mathcal{H}_p\}.$$

  - El análogo de $j$ ahora sería una función en $H^0(\Gamma, \mathcal{M}^\times)$.
- Problema: $H^0(\Gamma, \mathcal{M}^\times) = \mathbb{C}_p \rightsquigarrow$ no hay funciones interesantes aquí

  - Solución: considerar $H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times)$

# Darmon–Vonk's $p$-adic singular moduli

- $K$ cuerpo cuadrático real y $\tau \in K \setminus \mathbb{Q}$.
- Problema: $\tau \notin \mathcal{H}$ y no se puede evaluar $j$ en $\tau$
  - Cambiar $\mathcal{H} = (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^+$ por $\mathcal{H}_p = \mathbb{C}_p \setminus \mathbb{Q}_p$ el semiplano $p$-ádico
  - Si $p$ no descompone en $K$, entonces $\tau \in \mathcal{H}_p$.
  - La acción de $\Gamma := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$ en $\mathcal{H}_p$ y en

$$\mathcal{M}^\times = \{\text{funciones rigidas meromorfas en } \mathcal{H}_p\}.$$

  - El análogo de $j$ ahora sería una función en $H^0(\Gamma, \mathcal{M}^\times)$.
- Problema: $H^0(\Gamma, \mathcal{M}^\times) = \mathbb{C}_p \rightsquigarrow$ no hay funciones interesantes aquí
  - Solución: considerar $H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times)$

# Darmon–Vonk's $p$-adic singular moduli

- $K$ cuerpo cuadrático real y $\tau \in K \setminus \mathbb{Q}$.
- Problema: $\tau \notin \mathcal{H}$ y no se puede evaluar $j$ en $\tau$
  - Cambiar $\mathcal{H} = (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^+$ por $\mathcal{H}_p = \mathbb{C}_p \setminus \mathbb{Q}_p$ el semiplano $p$-ádico
  - Si $p$ no descompone en $K$, entonces $\tau \in \mathcal{H}_p$.
  - La acción de $\Gamma := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$ en $\mathcal{H}_p$ y en

$$\mathcal{M}^\times = \{\text{funciones rigidas meromorfas en } \mathcal{H}_p\}.$$

  - El análogo de $j$ ahora sería una función en $H^0(\Gamma, \mathcal{M}^\times)$.
- Problema: $H^0(\Gamma, \mathcal{M}^\times) = \mathbb{C}_p \rightsquigarrow$ no hay funciones interesantes aquí
  - Solución: considerar $H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times)$

# Darmon–Vonk's $p$-adic singular moduli

- $K$ cuerpo cuadrático real y $\tau \in K \setminus \mathbb{Q}$.
- Problema: $\tau \notin \mathcal{H}$ y no se puede evaluar $j$ en $\tau$
  - Cambiar $\mathcal{H} = (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^+$ por $\mathcal{H}_p = \mathbb{C}_p \setminus \mathbb{Q}_p$ el semiplano $p$-ádico
  - Si $p$ no descompone en $K$, entonces $\tau \in \mathcal{H}_p$.
  - La acción de $\Gamma := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$ en $\mathcal{H}_p$ y en

$$\mathcal{M}^\times = \{\text{funciones rigidas meromorfas en } \mathcal{H}_p\}.$$

  - El análogo de $j$ ahora sería una función en $H^0(\Gamma, \mathcal{M}^\times)$.
- Problema: $H^0(\Gamma, \mathcal{M}^\times) = \mathbb{C}_p \rightsquigarrow$ no hay funciones interesantes aquí
  - Solución: considerar $H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times)$

# Darmon–Vonk's $p$-adic singular moduli

- $K$ cuerpo cuadrático real y $\tau \in K \setminus \mathbb{Q}$.
- Problema: $\tau \notin \mathcal{H}$ y no se puede evaluar $j$ en $\tau$
  - Cambiar $\mathcal{H} = (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^+$ por $\mathcal{H}_p = \mathbb{C}_p \setminus \mathbb{Q}_p$ el semiplano $p$-ádico
  - Si $p$ no descompone en $K$, entonces $\tau \in \mathcal{H}_p$.
  - La acción de $\Gamma := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$ en $\mathcal{H}_p$ y en

$$\mathcal{M}^\times = \{\text{funciones rigidas meromorfas en } \mathcal{H}_p\}.$$

  - El análogo de $j$ ahora sería una función en $H^0(\Gamma, \mathcal{M}^\times)$.
- Problema: $H^0(\Gamma, \mathcal{M}^\times) = \mathbb{C}_p \rightsquigarrow$ no hay funciones interesantes aquí
  - Solución: considerar $H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times)$

# Darmon–Vonk's $p$-adic singular moduli

- $K$ cuerpo cuadrático real y $\tau \in K \setminus \mathbb{Q}$.
- Problema: $\tau \notin \mathcal{H}$ y no se puede evaluar $j$ en $\tau$
  - Cambiar $\mathcal{H} = (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^+$ por $\mathcal{H}_p = \mathbb{C}_p \setminus \mathbb{Q}_p$ el semiplano $p$-ádico
  - Si $p$ no descompone en $K$, entonces $\tau \in \mathcal{H}_p$.
  - La acción de $\Gamma := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$ en $\mathcal{H}_p$ y en

$$\mathcal{M}^\times = \{\text{funciones rigidas meromorfas en } \mathcal{H}_p\}.$$

  - El análogo de $j$ ahora sería una función en $H^0(\Gamma, \mathcal{M}^\times)$.
- Problema: $H^0(\Gamma, \mathcal{M}^\times) = \mathbb{C}_p \rightsquigarrow$ no hay funciones interesantes aquí
  - Solución: considerar $H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times)$

# Darmon–Vonk's $p$-adic singular moduli

- $K$ cuerpo cuadrático real y $\tau \in K \setminus \mathbb{Q}$.
- Problema: $\tau \notin \mathcal{H}$ y no se puede evaluar $j$ en $\tau$
  - Cambiar $\mathcal{H} = (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^+$ por $\mathcal{H}_p = \mathbb{C}_p \setminus \mathbb{Q}_p$ el semiplano $p$-ádico
  - Si $p$ no descompone en $K$, entonces $\tau \in \mathcal{H}_p$.
  - La acción de $\Gamma := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$ en $\mathcal{H}_p$ y en

$$\mathcal{M}^\times = \{\text{funciones rigidas meromorfas en } \mathcal{H}_p\}.$$

  - El análogo de $j$ ahora sería una función en $H^0(\Gamma, \mathcal{M}^\times)$.
- Problema: $H^0(\Gamma, \mathcal{M}^\times) = \mathbb{C}_p \rightsquigarrow$ no hay funciones interesantes aquí
  - Solución: considerar $H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times)$

# Rigid meromorphic cocycles

## Definición (Rigid meromorphic cocycles)

Classes en $H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times)$ cuya restricción a $\Gamma_\infty$ es constante

- Son funciones en $J\colon \Gamma \longrightarrow \mathcal{M}^\times$ tales que $J(\gamma_1\gamma_2) = J(\gamma_1) \cdot \gamma_1 J(\gamma_2)$ y $J(\gamma) \in \mathbb{C}_p^\times$ si $\gamma$ es triangular superior
- Se pueden evaluar en puntos RM $\tau \in K \setminus \mathbb{Q}$:
  - $\mathrm{Stab}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])}(\tau) = \langle \pm\gamma_\tau \rangle \rightsquigarrow J(\gamma_\tau) \in \mathcal{M}^\times$
  - $J[\tau] := J(\gamma_\tau)(\tau)$

## Conjetura (Darmon–Vonk)

- Si $\tau$ es RM y $J$ un rigid meromorphic cocyce, $J[\tau]$ es algebraico
- Cuerpo de definición se puede precisar (composición de ring class fields)

- Para algunos valores pequeños de $p$, hay RMC explícitos $J_\theta$, associados a valores $\theta$ RM.

# Rigid meromorphic cocycles

## Definición (Rigid meromorphic cocycles)

Classes en $H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times)$ cuya restricción a $\Gamma_\infty$ es constante

- Son funciones en $J \colon \Gamma \longrightarrow \mathcal{M}^\times$ tales que $J(\gamma_1\gamma_2) = J(\gamma_1) \cdot \gamma_1 J(\gamma_2)$ y $J(\gamma) \in \mathbb{C}_p^\times$ si $\gamma$ es triangular superior
- Se pueden evaluar en puntos RM $\tau \in K \setminus \mathbb{Q}$:
  - $\mathrm{Stab}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])}(\tau) = \langle \pm\gamma_\tau \rangle \rightsquigarrow J(\gamma_\tau) \in \mathcal{M}^\times$
  - $J[\tau] := J(\gamma_\tau)(\tau)$

## Conjetura (Darmon–Vonk)

- Si $\tau$ es RM y $J$ un rigid meromorphic cocyce, $J[\tau]$ es algebraico
- Cuerpo de definición se puede precisar (composición de ring class fields)

- Para algunos valores pequeños de $p$, hay RMC explícitos $J_\theta$, associados a valores $\theta$ RM.

# Rigid meromorphic cocycles

## Definición (Rigid meromorphic cocycles)

Classes en $H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times)$ cuya restricción a $\Gamma_\infty$ es constante

- Son funciones en $J\colon \Gamma \longrightarrow \mathcal{M}^\times$ tales que $J(\gamma_1\gamma_2) = J(\gamma_1) \cdot \gamma_1 J(\gamma_2)$ y $J(\gamma) \in \mathbb{C}_p^\times$ si $\gamma$ es triangular superior
- Se pueden evaluar en puntos RM $\tau \in K \setminus \mathbb{Q}$:
  - $\mathrm{Stab}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])}(\tau) = \langle \pm\gamma_\tau \rangle \rightsquigarrow J(\gamma_\tau) \in \mathcal{M}^\times$
  - $J[\tau] := J(\gamma_\tau)(\tau)$

## Conjetura (Darmon–Vonk)

- Si $\tau$ es RM y $J$ un rigid meromorphic cocyce, $J[\tau]$ es algebraico
- Cuerpo de definición se puede precisar (composición de ring class fields)

- Para algunos valores pequeños de $p$, hay RMC explícitos $J_\theta$, associados a valores $\theta$ RM.

# Rigid meromorphic cocycles

## Definición (Rigid meromorphic cocycles)

Classes en $H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times)$ cuya restricción a $\Gamma_\infty$ es constante

- Son funciones en $J\colon \Gamma \longrightarrow \mathcal{M}^\times$ tales que $J(\gamma_1\gamma_2) = J(\gamma_1)\cdot \gamma_1 J(\gamma_2)$ y $J(\gamma) \in \mathbb{C}_p^\times$ si $\gamma$ es triangular superior
- Se pueden evaluar en puntos RM $\tau \in K \setminus \mathbb{Q}$:
  - $\mathrm{Stab}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])}(\tau) = \langle \pm\gamma_\tau \rangle \rightsquigarrow J(\gamma_\tau) \in \mathcal{M}^\times$
  - $J[\tau] := J(\gamma_\tau)(\tau)$

## Conjetura (Darmon–Vonk)

- Si $\tau$ es RM y $J$ un rigid meromorphic cocyce, $J[\tau]$ es algebraico
- Cuerpo de definición se puede precisar (composición de ring class fields)

- Para algunos valores pequeños de $p$, hay RMC explícitos $J_\theta$, associados a valores $\theta$ RM.

# Rigid meromorphic cocycles

## Definición (Rigid meromorphic cocycles)

Classes en $H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times)$ cuya restricción a $\Gamma_\infty$ es constante

- Son funciones en $J\colon \Gamma \longrightarrow \mathcal{M}^\times$ tales que $J(\gamma_1\gamma_2) = J(\gamma_1)\cdot\gamma_1 J(\gamma_2)$ y $J(\gamma) \in \mathbb{C}_p^\times$ si $\gamma$ es triangular superior
- Se pueden evaluar en puntos RM $\tau \in K \setminus \mathbb{Q}$:
  - $\mathrm{Stab}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])}(\tau) = \langle \pm\gamma_\tau \rangle \rightsquigarrow J(\gamma_\tau) \in \mathcal{M}^\times$
  - $J[\tau] := J(\gamma_\tau)(\tau)$

## Conjetura (Darmon–Vonk)

- Si $\tau$ es RM y $J$ un rigid meromorphic cocyce, $J[\tau]$ es algebraico
- Cuerpo de definición se puede precisar (composición de ring class fields)

- Para algunos valores pequeños de $p$, hay RMC explícitos $J_\theta$, associados a valores $\theta$ RM.

# Rigid meromorphic cocycles

## Definición (Rigid meromorphic cocycles)

Classes en $H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times)$ cuya restricción a $\Gamma_\infty$ es constante

- Son funciones en $J \colon \Gamma \longrightarrow \mathcal{M}^\times$ tales que $J(\gamma_1\gamma_2) = J(\gamma_1) \cdot \gamma_1 J(\gamma_2)$ y $J(\gamma) \in \mathbb{C}_p^\times$ si $\gamma$ es triangular superior
- Se pueden evaluar en puntos RM $\tau \in K \setminus \mathbb{Q}$:
  - $\mathrm{Stab}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])}(\tau) = \langle \pm\gamma_\tau \rangle \rightsquigarrow J(\gamma_\tau) \in \mathcal{M}^\times$
  - $J[\tau] := J(\gamma_\tau)(\tau)$

## Conjetura (Darmon–Vonk)

- Si $\tau$ es RM y $J$ un rigid meromorphic cocyce, $J[\tau]$ es algebraico
- Cuerpo de definición se puede precisar (composición de ring class fields)

- Para algunos valores pequeños de $p$, hay RMC explícitos $J_\theta$, associados a valores $\theta$ RM.

# Rigid meromorphic cocycles

## Definición (Rigid meromorphic cocycles)

Classes en $H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times)$ cuya restricción a $\Gamma_\infty$ es constante

- Son funciones en $J\colon \Gamma \longrightarrow \mathcal{M}^\times$ tales que $J(\gamma_1\gamma_2) = J(\gamma_1)\cdot\gamma_1 J(\gamma_2)$ y $J(\gamma) \in \mathbb{C}_p^\times$ si $\gamma$ es triangular superior
- Se pueden evaluar en puntos RM $\tau \in K \setminus \mathbb{Q}$:
  - $\mathrm{Stab}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])}(\tau) = \langle \pm\gamma_\tau \rangle \rightsquigarrow J(\gamma_\tau) \in \mathcal{M}^\times$
  - $J[\tau] := J(\gamma_\tau)(\tau)$

## Conjetura (Darmon–Vonk)

- Si $\tau$ es RM y $J$ un rigid meromorphic cocyce, $J[\tau]$ es algebraico
- Cuerpo de definición se puede precisar (composición de ring class fields)

- Para algunos valores pequeños de $p$, hay RMC explícitos $J_\theta$, associados a valores $\theta$ RM.

# Rigid meromorphic cocycles: ejemplos explícitos

- Una idea para construir una función Γ-invariante
  - Escoger $\theta \in \mathcal{H}_p$ RM y definir $J_\theta(z) := \prod_{w \in \Gamma\theta}(z - w)$
  - Sus ceros son la Γ-órbita de $\theta$
  - Para $\gamma \in \Gamma \rightsquigarrow (\gamma J_\theta)(z) = \prod_{w \in \Gamma\theta}(\gamma^{-1}z - w)$ tiene los mismos ceros
  - $J_\theta = c \cdot \gamma J_\theta$ para algun $c \in \mathbb{C}_p^\times \rightsquigarrow J_\theta \in H^0(\Gamma, \mathcal{M}^\times/\mathbb{C}_p^\times)$
  - Pero $\Gamma\theta$ es denso en $\mathcal{H}_p$, eso no tiene sentido
- Para $\gamma \in \Gamma$ fijo, definimos una función $J_\theta(\gamma)$ cuyo divisor es un subconjunto discreto de $\Gamma\theta$:

$$\text{para } w \in \Gamma\theta \rightsquigarrow \delta_\gamma(w) := \begin{cases} \pm 1 & \text{if } C(x, \gamma x) \cap C(w, w') \neq \emptyset \\ 0 & \text{else.} \end{cases},$$

  - $J_\theta(\gamma) = \prod_{w \in \Gamma \cdot \theta}(z - w)^{\delta_\gamma(w)}$ es una función en $\mathcal{M}^\times$
  - $J_\theta \in H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times/\mathbb{C}_p^\times)$
- $H^1(\Gamma, \mathbb{C}_p^\times) \to H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times) \to H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times/\mathbb{C}_p^\times) \to H^2(\Gamma, \mathbb{C}_p^\times) \simeq H^1(\Gamma_0(p), \mathbb{C}_p)$
- Si $X_0(p)$ tiene género 0, $J_\theta$ sube a $J_\theta^+ \in H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times)$

# Rigid meromorphic cocycles: ejemplos explícitos

- Una idea para construir una función Γ-invariante
  - Escoger $\theta \in \mathcal{H}_p$ RM y definir $J_\theta(z) := \prod_{w \in \Gamma\theta}(z - w)$
  - Sus ceros son la Γ-órbita de $\theta$
  - Para $\gamma \in \Gamma \rightsquigarrow (\gamma J_\theta)(z) = \prod_{w \in \Gamma\theta}(\gamma^{-1} z - w)$ tiene los mismos ceros
  - $J_\theta = c \cdot \gamma J_\theta$ para algun $c \in \mathbb{C}_p^\times \rightsquigarrow J_\theta \in H^0(\Gamma, \mathcal{M}^\times/\mathbb{C}_p^\times)$
  - Pero $\Gamma\theta$ es denso en $\mathcal{H}_p$, eso no tiene sentido
- Para $\gamma \in \Gamma$ fijo, definimos una función $J_\theta(\gamma)$ cuyo divisor es un subconjunto discreto de $\Gamma\theta$:

$$\text{para } w \in \Gamma\theta \rightsquigarrow \delta_\gamma(w) := \begin{cases} \pm 1 & \text{if } C(x, \gamma x) \cap C(w, w') \neq \emptyset \\ 0 & \text{else.} \end{cases},$$

  - $J_\theta(\gamma) = \prod_{w \in \Gamma \cdot \theta}(z - w)^{\delta_\gamma(w)}$ es una función en $\mathcal{M}^\times$
  - $J_\theta \in H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times/\mathbb{C}_p^\times)$
- $H^1(\Gamma, \mathbb{C}_p^\times) \to H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times) \to H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times/\mathbb{C}_p^\times) \to H^2(\Gamma, \mathbb{C}_p^\times) \simeq H^1(\Gamma_0(p), \mathbb{C}_p)$
- Si $X_0(p)$ tiene género 0, $J_\theta$ sube a $J_\theta^+ \in H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times)$

# Rigid meromorphic cocycles: ejemplos explícitos

- Una idea para construir una función Γ-invariante
  - Escoger $\theta \in \mathcal{H}_p$ RM y definir $J_\theta(z) := \prod_{w \in \Gamma\theta}(z - w)$
  - Sus ceros son la Γ-órbita de $\theta$
  - Para $\gamma \in \Gamma \rightsquigarrow (\gamma J_\theta)(z) = \prod_{w \in \Gamma\theta}(\gamma^{-1}z - w)$ tiene los mismos ceros
  - $J_\theta = c \cdot \gamma J_\theta$ para algun $c \in \mathbb{C}_p^\times \rightsquigarrow J_\theta \in H^0(\Gamma, \mathcal{M}^\times/\mathbb{C}_p^\times)$
  - Pero $\Gamma\theta$ es denso en $\mathcal{H}_p$, eso no tiene sentido
- Para $\gamma \in \Gamma$ fijo, definimos una función $J_\theta(\gamma)$ cuyo divisor es un subconjunto discreto de $\Gamma\theta$:

$$\text{para } w \in \Gamma\theta \rightsquigarrow \delta_\gamma(w) := \begin{cases} \pm 1 & \text{if } C(x, \gamma x) \cap C(w, w') \neq \emptyset \\ 0 & \text{else.} \end{cases},$$

  - $J_\theta(\gamma) = \prod_{w \in \Gamma \cdot \theta}(z - w)^{\delta_\gamma(w)}$ es una función en $\mathcal{M}^\times$
  - $J_\theta \in H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times/\mathbb{C}_p^\times)$
- $H^1(\Gamma, \mathbb{C}_p^\times) \to H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times) \to H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times/\mathbb{C}_p^\times) \to H^2(\Gamma, \mathbb{C}_p^\times) \simeq H^1(\Gamma_0(p), \mathbb{C}_p)$
- Si $X_0(p)$ tiene género 0, $J_\theta$ sube a $J_\theta^+ \in H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times)$

# Rigid meromorphic cocycles: ejemplos explícitos

- Una idea para construir una función Γ-invariante
  - Escoger $\theta \in \mathcal{H}_p$ RM y definir $J_\theta(z) := \prod_{w \in \Gamma\theta}(z - w)$
  - Sus ceros son la Γ-órbita de $\theta$
  - Para $\gamma \in \Gamma \rightsquigarrow (\gamma J_\theta)(z) = \prod_{w \in \Gamma\theta}(\gamma^{-1}z - w)$ tiene los mismos ceros
  - $J_\theta = c \cdot \gamma J_\theta$ para algun $c \in \mathbb{C}_p^\times \rightsquigarrow J_\theta \in H^0(\Gamma, \mathcal{M}^\times/\mathbb{C}_p^\times)$
  - Pero $\Gamma\theta$ es denso en $\mathcal{H}_p$, eso no tiene sentido
- Para $\gamma \in \Gamma$ fijo, definimos una función $J_\theta(\gamma)$ cuyo divisor es un subconjunto discreto de $\Gamma\theta$:

$$\text{para } w \in \Gamma\theta \rightsquigarrow \delta_\gamma(w) := \begin{cases} \pm 1 & \text{if } C(x, \gamma x) \cap C(w, w') \neq \emptyset \\ 0 & \text{else.} \end{cases},$$

  - $J_\theta(\gamma) = \prod_{w \in \Gamma\cdot\theta}(z - w)^{\delta_\gamma(w)}$ es una función en $\mathcal{M}^\times$
  - $J_\theta \in H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times/\mathbb{C}_p^\times)$
- $H^1(\Gamma, \mathbb{C}_p^\times) \to H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times) \to H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times/\mathbb{C}_p^\times) \to H^2(\Gamma, \mathbb{C}_p^\times) \simeq H^1(\Gamma_0(p), \mathbb{C}_p)$
- Si $X_0(p)$ tiene género 0, $J_\theta$ sube a $J_\theta^+ \in H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times)$

# Rigid meromorphic cocycles: ejemplos explícitos

- Una idea para construir una función $\Gamma$-invariante
  - Escoger $\theta \in \mathcal{H}_p$ RM y definir $J_\theta(z) := \prod_{w \in \Gamma\theta}(z - w)$
  - Sus ceros son la $\Gamma$-órbita de $\theta$
  - Para $\gamma \in \Gamma \rightsquigarrow (\gamma J_\theta)(z) = \prod_{w \in \Gamma\theta}(\gamma^{-1} z - w)$ tiene los mismos ceros
  - $J_\theta = c \cdot \gamma J_\theta$ para algun $c \in \mathbb{C}_p^\times \rightsquigarrow J_\theta \in H^0(\Gamma, \mathcal{M}^\times / \mathbb{C}_p^\times)$
  - Pero $\Gamma\theta$ es denso en $\mathcal{H}_p$, eso no tiene sentido
- Para $\gamma \in \Gamma$ fijo, definimos una función $J_\theta(\gamma)$ cuyo divisor es un subconjunto discreto de $\Gamma\theta$:

$$\text{para } w \in \Gamma\theta \rightsquigarrow \delta_\gamma(w) := \begin{cases} \pm 1 & \text{if } C(x, \gamma x) \cap C(w, w') \neq \emptyset \\ 0 & \text{else.} \end{cases},$$

  - $J_\theta(\gamma) = \prod_{w \in \Gamma \cdot \theta}(z - w)^{\delta_\gamma(w)}$ es una función en $\mathcal{M}^\times$
  - $J_\theta \in H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times / \mathbb{C}_p^\times)$
- $H^1(\Gamma, \mathbb{C}_p^\times) \to H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times) \to H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times / \mathbb{C}_p^\times) \to H^2(\Gamma, \mathbb{C}_p^\times) \simeq H^1(\Gamma_0(p), \mathbb{C}_p)$
- Si $X_0(p)$ tiene género 0, $J_\theta$ sube a $J_\theta^+ \in H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times)$

# Rigid meromorphic cocycles: ejemplos explícitos

- Una idea para construir una función $\Gamma$-invariante
  - Escoger $\theta \in \mathcal{H}_p$ RM y definir $J_\theta(z) := \prod_{w\in\Gamma\theta}(z-w)$
  - Sus ceros son la $\Gamma$-órbita de $\theta$
  - Para $\gamma \in \Gamma \rightsquigarrow (\gamma J_\theta)(z) = \prod_{w\in\Gamma\theta}(\gamma^{-1}z-w)$ tiene los mismos ceros
  - $J_\theta = c\cdot\gamma J_\theta$ para algun $c \in \mathbb{C}_p^\times \rightsquigarrow J_\theta \in H^0(\Gamma, \mathcal{M}^\times/\mathbb{C}_p^\times)$
  - Pero $\Gamma\theta$ es denso en $\mathcal{H}_p$, eso no tiene sentido
- Para $\gamma \in \Gamma$ fijo, definimos una función $J_\theta(\gamma)$ cuyo divisor es un subconjunto discreto de $\Gamma\theta$:

$$\text{para } w \in \Gamma\theta \rightsquigarrow \delta_\gamma(w) := \begin{cases} \pm 1 & \text{if } C(x,\gamma x)\cap C(w,w') \neq \emptyset \\ 0 & \text{else.} \end{cases},$$

  - $J_\theta(\gamma) = \prod_{w\in\Gamma\cdot\theta}(z-w)^{\delta_\gamma(w)}$ es una función en $\mathcal{M}^\times$
  - $J_\theta \in H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times/\mathbb{C}_p^\times)$
- $H^1(\Gamma,\mathbb{C}_p^\times)\to H^1(\Gamma,\mathcal{M}^\times)\to H^1(\Gamma,\mathcal{M}^\times/\mathbb{C}_p^\times)\to H^2(\Gamma,\mathbb{C}_p^\times) \simeq H^1(\Gamma_0(p),\mathbb{C}_p)$
- Si $X_0(p)$ tiene género 0, $J_\theta$ sube a $J_\theta^+ \in H^1(\Gamma,\mathcal{M}^\times)$

# Rigid meromorphic cocycles: ejemplos explícitos

- Una idea para construir una función Γ-invariante
  - Escoger $\theta \in \mathcal{H}_p$ RM y definir $J_\theta(z) := \prod_{w\in\Gamma\theta}(z-w)$
  - Sus ceros son la Γ-órbita de $\theta$
  - Para $\gamma \in \Gamma \rightsquigarrow (\gamma J_\theta)(z) = \prod_{w\in\Gamma\theta}(\gamma^{-1}z - w)$ tiene los mismos ceros
  - $J_\theta = c \cdot \gamma J_\theta$ para algun $c \in \mathbb{C}_p^\times \rightsquigarrow J_\theta \in H^0(\Gamma, \mathcal{M}^\times/\mathbb{C}_p^\times)$
  - Pero $\Gamma\theta$ es denso en $\mathcal{H}_p$, eso no tiene sentido
- Para $\gamma \in \Gamma$ fijo, definimos una función $J_\theta(\gamma)$ cuyo divisor es un subconjunto discreto de $\Gamma\theta$:

$$\text{para } w \in \Gamma\theta \rightsquigarrow \delta_\gamma(w) := \begin{cases} \pm 1 & \text{if } C(x,\gamma x) \cap C(w,w') \neq \emptyset \\ 0 & \text{else.} \end{cases},$$

  - $J_\theta(\gamma) = \prod_{w\in\Gamma\cdot\theta}(z-w)^{\delta_\gamma(w)}$ es una función en $\mathcal{M}^\times$
  - $J_\theta \in H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times/\mathbb{C}_p^\times)$
- $H^1(\Gamma,\mathbb{C}_p^\times) \to H^1(\Gamma,\mathcal{M}^\times) \to H^1(\Gamma,\mathcal{M}^\times/\mathbb{C}_p^\times) \to H^2(\Gamma,\mathbb{C}_p^\times) \simeq H^1(\Gamma_0(p),\mathbb{C}_p)$
- Si $X_0(p)$ tiene género 0, $J_\theta$ sube a $J_\theta^+ \in H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times)$

# Rigid meromorphic cocycles: ejemplos explícitos

- Una idea para construir una función $\Gamma$-invariante
  - Escoger $\theta \in \mathcal{H}_p$ RM y definir $J_\theta(z) := \prod_{w \in \Gamma\theta}(z - w)$
  - Sus ceros son la $\Gamma$-órbita de $\theta$
  - Para $\gamma \in \Gamma \rightsquigarrow (\gamma J_\theta)(z) = \prod_{w \in \Gamma\theta}(\gamma^{-1}z - w)$ tiene los mismos ceros
  - $J_\theta = c \cdot \gamma J_\theta$ para algun $c \in \mathbb{C}_p^\times \rightsquigarrow J_\theta \in H^0(\Gamma, \mathcal{M}^\times/\mathbb{C}_p^\times)$
  - Pero $\Gamma\theta$ es denso en $\mathcal{H}_p$, eso no tiene sentido
- Para $\gamma \in \Gamma$ fijo, definimos una función $J_\theta(\gamma)$ cuyo divisor es un subconjunto discreto de $\Gamma\theta$:

$$\text{para } w \in \Gamma\theta \rightsquigarrow \delta_\gamma(w) := \begin{cases} \pm 1 & \text{if } C(x, \gamma x) \cap C(w, w') \neq \emptyset \\ 0 & \text{else.} \end{cases},$$

  - $J_\theta(\gamma) = \prod_{w \in \Gamma\cdot\theta}(z - w)^{\delta_\gamma(w)}$ es una función en $\mathcal{M}^\times$
  - $J_\theta \in H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times/\mathbb{C}_p^\times)$
- $H^1(\Gamma, \mathbb{C}_p^\times) \to H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times) \to H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times/\mathbb{C}_p^\times) \to H^2(\Gamma, \mathbb{C}_p^\times) \simeq H^1(\Gamma_0(p), \mathbb{C}_p)$
- Si $X_0(p)$ tiene género 0, $J_\theta$ sube a $J_\theta^+ \in H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times)$

# Rigid meromorphic cocycles: ejemplos explícitos

- Una idea para construir una función $\Gamma$-invariante
  - Escoger $\theta \in \mathcal{H}_p$ RM y definir $J_\theta(z) := \prod_{w \in \Gamma\theta}(z - w)$
  - Sus ceros son la $\Gamma$-órbita de $\theta$
  - Para $\gamma \in \Gamma \rightsquigarrow (\gamma J_\theta)(z) = \prod_{w \in \Gamma\theta}(\gamma^{-1}z - w)$ tiene los mismos ceros
  - $J_\theta = c \cdot \gamma J_\theta$ para algun $c \in \mathbb{C}_p^\times \rightsquigarrow J_\theta \in H^0(\Gamma, \mathcal{M}^\times/\mathbb{C}_p^\times)$
  - Pero $\Gamma\theta$ es denso en $\mathcal{H}_p$, eso no tiene sentido
- Para $\gamma \in \Gamma$ fijo, definimos una función $J_\theta(\gamma)$ cuyo divisor es un subconjunto discreto de $\Gamma\theta$:

$$\text{para } w \in \Gamma\theta \rightsquigarrow \delta_\gamma(w) := \begin{cases} \pm 1 & \text{if } C(x, \gamma x) \cap C(w, w') \neq \emptyset \\ 0 & \text{else.} \end{cases},$$

  - $J_\theta(\gamma) = \prod_{w \in \Gamma\cdot\theta}(z - w)^{\delta_\gamma(w)}$ es una función en $\mathcal{M}^\times$
  - $J_\theta \in H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times/\mathbb{C}_p^\times)$
- $H^1(\Gamma, \mathbb{C}_p^\times) \to H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times) \to H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times/\mathbb{C}_p^\times) \to H^2(\Gamma, \mathbb{C}_p^\times) \simeq H^1(\Gamma_0(p), \mathbb{C}_p)$
- Si $X_0(p)$ tiene género 0, $J_\theta$ sube a $J_\theta^+ \in H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times)$

# Rigid meromorphic cocycles: ejemplos explícitos

- Una idea para construir una función $\Gamma$-invariante
  - Escoger $\theta \in \mathcal{H}_p$ RM y definir $J_\theta(z) := \prod_{w \in \Gamma\theta}(z - w)$
  - Sus ceros son la $\Gamma$-órbita de $\theta$
  - Para $\gamma \in \Gamma \rightsquigarrow (\gamma J_\theta)(z) = \prod_{w \in \Gamma\theta}(\gamma^{-1}z - w)$ tiene los mismos ceros
  - $J_\theta = c \cdot \gamma J_\theta$ para algun $c \in \mathbb{C}_p^\times \rightsquigarrow J_\theta \in H^0(\Gamma, \mathcal{M}^\times/\mathbb{C}_p^\times)$
  - Pero $\Gamma\theta$ es denso en $\mathcal{H}_p$, eso no tiene sentido
- Para $\gamma \in \Gamma$ fijo, definimos una función $J_\theta(\gamma)$ cuyo divisor es un subconjunto discreto de $\Gamma\theta$:

$$\text{para } w \in \Gamma\theta \rightsquigarrow \delta_\gamma(w) := \begin{cases} \pm 1 & \text{if } C(x, \gamma x) \cap C(w, w') \neq \emptyset \\ 0 & \text{else.} \end{cases},$$

  - $J_\theta(\gamma) = \prod_{w \in \Gamma \cdot \theta}(z - w)^{\delta_\gamma(w)}$ es una función en $\mathcal{M}^\times$
  - $J_\theta \in H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times/\mathbb{C}_p^\times)$
- $H^1(\Gamma, \mathbb{C}_p^\times) \to H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times) \to H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times/\mathbb{C}_p^\times) \to H^2(\Gamma, \mathbb{C}_p^\times) \simeq H^1(\Gamma_0(p), \mathbb{C}_p)$
- Si $X_0(p)$ tiene género 0, $J_\theta$ sube a $J_\theta^+ \in H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times)$

# Rigid meromorphic cocycles: ejemplos explícitos

- Una idea para construir una función $\Gamma$-invariante
  - Escoger $\theta \in \mathcal{H}_p$ RM y definir $J_\theta(z) := \prod_{w \in \Gamma\theta}(z - w)$
  - Sus ceros son la $\Gamma$-órbita de $\theta$
  - Para $\gamma \in \Gamma \rightsquigarrow (\gamma J_\theta)(z) = \prod_{w \in \Gamma\theta}(\gamma^{-1} z - w)$ tiene los mismos ceros
  - $J_\theta = c \cdot \gamma J_\theta$ para algun $c \in \mathbb{C}_p^\times \rightsquigarrow J_\theta \in H^0(\Gamma, \mathcal{M}^\times/\mathbb{C}_p^\times)$
  - Pero $\Gamma\theta$ es denso en $\mathcal{H}_p$, eso no tiene sentido
- Para $\gamma \in \Gamma$ fijo, definimos una función $J_\theta(\gamma)$ cuyo divisor es un subconjunto discreto de $\Gamma\theta$:

$$\text{para } w \in \Gamma\theta \rightsquigarrow \delta_\gamma(w) := \begin{cases} \pm 1 & \text{if } C(x, \gamma x) \cap C(w, w') \neq \emptyset \\ 0 & \text{else.} \end{cases},$$

  - $J_\theta(\gamma) = \prod_{w \in \Gamma \cdot \theta}(z - w)^{\delta_\gamma(w)}$ es una función en $\mathcal{M}^\times$
  - $J_\theta \in H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times/\mathbb{C}_p^\times)$
- $H^1(\Gamma, \mathbb{C}_p^\times) \to H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times) \to H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times/\mathbb{C}_p^\times) \to H^2(\Gamma, \mathbb{C}_p^\times) \simeq H^1(\Gamma_0(p), \mathbb{C}_p)$
- Si $X_0(p)$ tiene género 0, $J_\theta$ sube a $J_\theta^+ \in H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times)$

# Rigid meromorphic cocycles: ejemplos explícitos

- Una idea para construir una función $\Gamma$-invariante
  - Escoger $\theta \in \mathcal{H}_p$ RM y definir $J_\theta(z) := \prod_{w \in \Gamma\theta}(z - w)$
  - Sus ceros son la $\Gamma$-órbita de $\theta$
  - Para $\gamma \in \Gamma \rightsquigarrow (\gamma J_\theta)(z) = \prod_{w \in \Gamma\theta}(\gamma^{-1}z - w)$ tiene los mismos ceros
  - $J_\theta = c \cdot \gamma J_\theta$ para algun $c \in \mathbb{C}_p^\times \rightsquigarrow J_\theta \in H^0(\Gamma, \mathcal{M}^\times/\mathbb{C}_p^\times)$
  - Pero $\Gamma\theta$ es denso en $\mathcal{H}_p$, eso no tiene sentido
- Para $\gamma \in \Gamma$ fijo, definimos una función $J_\theta(\gamma)$ cuyo divisor es un subconjunto discreto de $\Gamma\theta$:

$$\text{para } w \in \Gamma\theta \rightsquigarrow \delta_\gamma(w) := \begin{cases} \pm 1 & \text{if } C(x, \gamma x) \cap C(w, w') \neq \emptyset \\ 0 & \text{else.} \end{cases},$$

  - $J_\theta(\gamma) = \prod_{w \in \Gamma\cdot\theta}(z - w)^{\delta_\gamma(w)}$ es una función en $\mathcal{M}^\times$
  - $J_\theta \in H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times/\mathbb{C}_p^\times)$
- $H^1(\Gamma, \mathbb{C}_p^\times) \to H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times) \to H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times/\mathbb{C}_p^\times) \to H^2(\Gamma, \mathbb{C}_p^\times) \simeq H^1(\Gamma_0(p), \mathbb{C}_p)$
- Si $X_0(p)$ tiene género 0, $J_\theta$ sube a $J_\theta^+ \in H^1(\Gamma, \mathcal{M}^\times)$

# Rigid meromorphic cocycles: ejemplos explícitos

- Darmmon–Vonk dan un método para el cálculo explícito de $J_\theta^+$, y mucha evidencia numérica que $J_\theta^+[\tau]$ es algebraico para $\theta, \tau$ RM
- Calculando $J_\theta(\gamma) = \prod_{w \in \Gamma \cdot \theta} (z - w)^{\delta_\gamma(w)}$ via la definición es exponencial (en la precisión $p$-adica)
- Método sobreconvergente: iteración de un operador $U_p$
- $J^+_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}[2\sqrt{6}] = (3 + 8\sqrt{2} + 12\sqrt{-1} + 2\sqrt{-2})/17 \pmod{7^{100}}$ in $\mathbb{C}_7$

## Nuestro objetivo

Dar una construcción similar para extensiones $K/\mathbb{Q}$ más generales, así como para grupos $p$-aritméticos $\Gamma$ más generales.

# Rigid meromorphic cocycles: ejemplos explícitos

- Darmmon–Vonk dan un método para el cálculo explícito de $J_\theta^+$, y mucha evidencia numérica que $J_\theta^+[\tau]$ es algebraico para $\theta, \tau$ RM
- Calculando $J_\theta(\gamma) = \prod_{w \in \Gamma \cdot \theta} (z - w)^{\delta_\gamma(w)}$ via la definición es exponencial (en la precisión $p$-adica)
- Método sobreconvergente: iteración de un operador $U_p$
- $J^+_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}[2\sqrt{6}] = (3 + 8\sqrt{2} + 12\sqrt{-1} + 2\sqrt{-2})/17 \pmod{7^{100}}$ in $\mathbb{C}_7$

**Nuestro objetivo**

Dar una construcción similar para extensiones $K/\mathbb{Q}$ más generales, así como para grupos $p$-aritméticos $\Gamma$ más generales.

# Rigid meromorphic cocycles: ejemplos explícitos

- Darmmon–Vonk dan un método para el cálculo explícito de $J_\theta^+$, y mucha evidencia numérica que $J_\theta^+[\tau]$ es algebraico para $\theta, \tau$ RM
- Calculando $J_\theta(\gamma) = \prod_{w \in \Gamma \cdot \theta} (z - w)^{\delta_\gamma(w)}$ via la definición es exponencial (en la precisión $p$-adica)
- Método sobreconvergente: iteración de un operador $U_p$
- $J^+_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}[2\sqrt{6}] = (3 + 8\sqrt{2} + 12\sqrt{-1} + 2\sqrt{-2})/17 \pmod{7^{100}}$ in $\mathbb{C}_7$

**Nuestro objetivo**

Dar una construcción similar para extensiones $K/\mathbb{Q}$ más generales, así como para grupos $p$-aritméticos $\Gamma$ más generales.

# Rigid meromorphic cocycles: ejemplos explícitos

- Darmmon–Vonk dan un método para el cálculo explícito de $J_\theta^+$, y mucha evidencia numérica que $J_\theta^+[\tau]$ es algebraico para $\theta, \tau$ RM
- Calculando $J_\theta(\gamma) = \prod_{w \in \Gamma \cdot \theta} (z - w)^{\delta_\gamma(w)}$ via la definición es exponencial (en la precisión $p$-adica)
- Método sobreconvergente: iteración de un operador $U_p$
- $J^+_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}[2\sqrt{6}] = (3 + 8\sqrt{2} + 12\sqrt{-1} + 2\sqrt{-2})/17 \pmod{7^{100}}$ in $\mathbb{C}_7$

**Nuestro objetivo**

Dar una construcción similar para extensiones $K/\mathbb{Q}$ más generales, así como para grupos $p$-aritméticos $\Gamma$ más generales.

# Rigid meromorphic cocycles: ejemplos explícitos

- Darmmon–Vonk dan un método para el cálculo explícito de $J_\theta^+$, y mucha evidencia numérica que $J_\theta^+[\tau]$ es algebraico para $\theta, \tau$ RM
- Calculando $J_\theta(\gamma) = \prod_{w \in \Gamma\cdot\theta}(z - w)^{\delta_\gamma(w)}$ via la definición es exponencial (en la precisión $p$-adica)
- Método sobreconvergente: iteración de un operador $U_p$
- $J^+_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}[2\sqrt{6}] = (3 + 8\sqrt{2} + 12\sqrt{-1} + 2\sqrt{-2})/17 \pmod{7^{100}}$ in $\mathbb{C}_7$

## Nuestro objetivo

Dar una construcción similar para extensiones $K/\mathbb{Q}$ más generales, así como para grupos $p$-aritméticos $\Gamma$ más generales.

# Outline

# Módulos singulares $p$-ádicos cuaterniónicos: setting

- $F$ cuerpo de números totalmente real y $h^+(F) = 1$.
- $B/F$ álgebra de cuaterniones casi totalmente definida: $B \otimes_{v_\infty} \mathbb{R} \simeq \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ para una única plaza arquimediana $v_\infty$ de $F$.
- $R \subset B$ orden maximal y $\Gamma_0 = R_1^\times$ (juega el papel de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$).
- Fijamos un primo $\mathfrak{p}$ de $F$ donde $B$ es split $\iota_\mathfrak{p} \colon B \hookrightarrow \mathrm{M}_2(\mathbb{Q}_\mathfrak{p})$.
- $B$ actúa en $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}_p$ via los splittings $v_\infty$ y $\iota_\mathfrak{p}$
- $K/F$ extensión cuadrática tal que:
  - Los primos que dividen $\mathfrak{p}D_B$ son inertes en $K$.
  - $v_\infty$ splita en $K$, y todas las otras plazas arquimedianas ramifican.
  - Eso implica que existen embeddings $\psi \colon \mathcal{O}_K \hookrightarrow R$
- Por ejemplo: $F = \mathbb{Q}$ y $K$ cuadrático real.
- Dos diferencias con la construcción de Darmon–Vonk:
  - La clase de cohomología se obtiene iterando $U_\mathfrak{p}$ (sin grupos $\mathfrak{p}$-aritméticos)
  - Nuestra construcción es additiva, por tanto las cantidades que obtenemos se espera que estén relacionadas con logaritmos de números algebraicos.

# Módulos singulares $p$-ádicos cuaterniónicos: setting

- $F$ cuerpo de números totalmente real y $h^+(F) = 1$.
- $B/F$ álgebra de cuaterniones casi totalmente definida: $B \otimes_{v_\infty} \mathbb{R} \simeq \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ para una única plaza arquimediana $v_\infty$ de $F$.
- $R \subset B$ orden maximal y $\Gamma_0 = R_1^\times$ (juega el papel de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$).
- Fijamos un primo $\mathfrak{p}$ de $F$ donde $B$ es split $\iota_\mathfrak{p} \colon B \hookrightarrow \mathrm{M}_2(\mathbb{Q}_\mathfrak{p})$.
- $B$ actúa en $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}_p$ via los splittings $v_\infty$ y $\iota_\mathfrak{p}$
- $K/F$ extensión cuadrática tal que:
  - Los primos que dividen $\mathfrak{p}D_B$ son inertes en $K$.
  - $v_\infty$ splita en $K$, y todas las otras plazas arquimedianas ramifican.
  - Eso implica que existen embeddings $\psi \colon \mathcal{O}_K \hookrightarrow R$
- Por ejemplo: $F = \mathbb{Q}$ y $K$ cuadrático real.
- Dos diferencias con la construcción de Darmon–Vonk:
  - La clase de cohomología se obtiene iterando $U_\mathfrak{p}$ (sin grupos $\mathfrak{p}$-aritméticos)
  - Nuestra construcción es additiva, por tanto las cantidades que obtenemos se espera que estén relacionadas con logaritmos de números algebraicos.

# Módulos singulares $p$-ádicos cuaterniónicos: setting

- $F$ cuerpo de números totalmente real y $h^+(F) = 1$.
- $B/F$ álgebra de cuaterniones casi totalmente definida: $B \otimes_{v_\infty} \mathbb{R} \simeq \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ para una única plaza arquimediana $v_\infty$ de $F$.
- $R \subset B$ orden maximal y $\Gamma_0 = R_1^\times$ (juega el papel de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$).
- Fijamos un primo $\mathfrak{p}$ de $F$ donde $B$ es split $\iota_\mathfrak{p} \colon B \hookrightarrow \mathrm{M}_2(\mathbb{Q}_\mathfrak{p})$.
- $B$ actúa en $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}_p$ via los splittings $v_\infty$ y $\iota_\mathfrak{p}$
- $K/F$ extensión cuadrática tal que:
  - Los primos que dividen $\mathfrak{p}D_B$ son inertes en $K$.
  - $v_\infty$ splita en $K$, y todas las otras plazas arquimedianas ramifican.
  - Eso implica que existen embeddings $\psi \colon \mathcal{O}_K \hookrightarrow R$
- Por ejemplo: $F = \mathbb{Q}$ y $K$ cuadrático real.
- Dos diferencias con la construcción de Darmon–Vonk:
  - La clase de cohomología se obtiene iterando $U_\mathfrak{p}$ (sin grupos $\mathfrak{p}$-aritméticos)
  - Nuestra construcción es additiva, por tanto las cantidades que obtenemos se espera que estén relacionadas con logaritmos de números algebraicos.

# Módulos singulares $p$-ádicos cuaterniónicos: setting

- $F$ cuerpo de números totalmente real y $h^+(F) = 1$.
- $B/F$ álgebra de cuaterniones casi totalmente definida: $B \otimes_{v_\infty} \mathbb{R} \simeq \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ para una única plaza arquimediana $v_\infty$ de $F$.
- $R \subset B$ orden maximal y $\Gamma_0 = R_1^\times$ (juega el papel de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$).
- Fijamos un primo $\mathfrak{p}$ de $F$ donde $B$ es split $\iota_\mathfrak{p} \colon B \hookrightarrow \mathrm{M}_2(\mathbb{Q}_\mathfrak{p})$.
- $B$ actúa en $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}_p$ via los splittings $v_\infty$ y $\iota_\mathfrak{p}$
- $K/F$ extensión cuadrática tal que:
  - Los primos que dividen $\mathfrak{p}D_B$ son inertes en $K$.
  - $v_\infty$ splita en $K$, y todas las otras plazas arquimedianas ramifican.
  - Eso implica que existen embeddings $\psi \colon \mathcal{O}_K \hookrightarrow R$
- Por ejemplo: $F = \mathbb{Q}$ y $K$ cuadrático real.
- Dos diferencias con la construcción de Darmon–Vonk:
  - La clase de cohomología se obtiene iterando $U_\mathfrak{p}$ (sin grupos $\mathfrak{p}$-aritméticos)
  - Nuestra construcción es additiva, por tanto las cantidades que obtenemos se espera que estén relacionadas con logaritmos de números algebraicos.

# Módulos singulares $p$-ádicos cuaterniónicos: setting

- $F$ cuerpo de números totalmente real y $h^+(F) = 1$.
- $B/F$ álgebra de cuaterniones casi totalmente definida: $B \otimes_{v_\infty} \mathbb{R} \simeq \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ para una única plaza arquimediana $v_\infty$ de $F$.
- $R \subset B$ orden maximal y $\Gamma_0 = R_1^\times$ (juega el papel de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$).
- Fijamos un primo $\mathfrak{p}$ de $F$ donde $B$ es split $\iota_\mathfrak{p} \colon B \hookrightarrow \mathrm{M}_2(\mathbb{Q}_\mathfrak{p})$.
- $B$ actúa en $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}_p$ via los splittings $v_\infty$ y $\iota_\mathfrak{p}$
- $K/F$ extensión cuadrática tal que:
  - Los primos que dividen $\mathfrak{p}D_B$ son inertes en $K$.
  - $v_\infty$ splita en $K$, y todas las otras plazas arquimedianas ramifican.
  - Eso implica que existen embeddings $\psi \colon \mathcal{O}_K \hookrightarrow R$
- Por ejemplo: $F = \mathbb{Q}$ y $K$ cuadrático real.
- Dos diferencias con la construcción de Darmon–Vonk:
  - La clase de cohomología se obtiene iterando $U_\mathfrak{p}$ (sin grupos $\mathfrak{p}$-aritméticos)
  - Nuestra construcción es additiva, por tanto las cantidades que obtenemos se espera que estén relacionadas con logaritmos de números algebraicos.

# Módulos singulares $p$-ádicos cuaterniónicos: setting

- $F$ cuerpo de números totalmente real y $h^+(F) = 1$.
- $B/F$ álgebra de cuaterniones casi totalmente definida: $B \otimes_{v_\infty} \mathbb{R} \simeq \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ para una única plaza arquimediana $v_\infty$ de $F$.
- $R \subset B$ orden maximal y $\Gamma_0 = R_1^\times$ (juega el papel de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$).
- Fijamos un primo $\mathfrak{p}$ de $F$ donde $B$ es split $\iota_\mathfrak{p} \colon B \hookrightarrow \mathrm{M}_2(\mathbb{Q}_\mathfrak{p})$.
- $B$ actúa en $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}_p$ via los splittings $v_\infty$ y $\iota_\mathfrak{p}$
- $K/F$ extensión cuadrática tal que:
  - Los primos que dividen $\mathfrak{p}D_B$ son inertes en $K$.
  - $v_\infty$ splita en $K$, y todas las otras plazas arquimedianas ramifican.
  - Eso implica que existen embeddings $\psi \colon \mathcal{O}_K \hookrightarrow R$
- Por ejemplo: $F = \mathbb{Q}$ y $K$ cuadrático real.
- Dos diferencias con la construcción de Darmon–Vonk:
  - La clase de cohomología se obtiene iterando $U_\mathfrak{p}$ (sin grupos $\mathfrak{p}$-aritméticos)
  - Nuestra construcción es additiva, por tanto las cantidades que obtenemos se espera que estén relacionadas con logaritmos de números algebraicos.

# Módulos singulares $p$-ádicos cuaterniónicos: setting

- $F$ cuerpo de números totalmente real y $h^+(F) = 1$.
- $B/F$ álgebra de cuaterniones casi totalmente definida: $B \otimes_{v_\infty} \mathbb{R} \simeq \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ para una única plaza arquimediana $v_\infty$ de $F$.
- $R \subset B$ orden maximal y $\Gamma_0 = R_1^\times$ (juega el papel de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$).
- Fijamos un primo $\mathfrak{p}$ de $F$ donde $B$ es split $\iota_\mathfrak{p} \colon B \hookrightarrow \mathrm{M}_2(\mathbb{Q}_\mathfrak{p})$.
- $B$ actúa en $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}_p$ via los splittings $v_\infty$ y $\iota_\mathfrak{p}$
- $K/F$ extensión cuadrática tal que:
  - Los primos que dividen $\mathfrak{p}D_B$ son inertes en $K$.
  - $v_\infty$ splita en $K$, y todas las otras plazas arquimedianas ramifican.
  - Eso implica que existen embeddings $\psi \colon \mathcal{O}_K \hookrightarrow R$
- Por ejemplo: $F = \mathbb{Q}$ y $K$ cuadrático real.
- Dos diferencias con la construcción de Darmon–Vonk:
  - La clase de cohomología se obtiene iterando $U_\mathfrak{p}$ (sin grupos $\mathfrak{p}$-aritméticos)
  - Nuestra construcción es additiva, por tanto las cantidades que obtenemos se espera que estén relacionadas con logaritmos de números algebraicos.

# Módulos singulares $p$-ádicos cuaterniónicos: setting

- $F$ cuerpo de números totalmente real y $h^+(F) = 1$.
- $B/F$ álgebra de cuaterniones casi totalmente definida: $B \otimes_{v_\infty} \mathbb{R} \simeq \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ para una única plaza arquimediana $v_\infty$ de $F$.
- $R \subset B$ orden maximal y $\Gamma_0 = R_1^\times$ (juega el papel de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$).
- Fijamos un primo $\mathfrak{p}$ de $F$ donde $B$ es split $\iota_\mathfrak{p} \colon B \hookrightarrow \mathrm{M}_2(\mathbb{Q}_\mathfrak{p})$.
- $B$ actúa en $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}_p$ via los splittings $v_\infty$ y $\iota_\mathfrak{p}$
- $K/F$ extensión cuadrática tal que:
  - Los primos que dividen $\mathfrak{p}D_B$ son inertes en $K$.
  - $v_\infty$ splita en $K$, y todas las otras plazas arquimedianas ramifican.
  - Eso implica que existen embeddings $\psi \colon \mathcal{O}_K \hookrightarrow R$
- Por ejemplo: $F = \mathbb{Q}$ y $K$ cuadrático real.
- Dos diferencias con la construcción de Darmon–Vonk:
  - La clase de cohomología se obtiene iterando $U_\mathfrak{p}$ (sin grupos $\mathfrak{p}$-aritméticos)
  - Nuestra construcción es additiva, por tanto las cantidades que obtenemos se espera que estén relacionadas con logaritmos de números algebraicos.

# Módulos singulares $p$-ádicos cuaterniónicos

- Sea $\mathfrak{p} = (\varpi)$ y $\Lambda = \overline{\mathbb{Z}}_{\mathfrak{p}}[[\varpi z]]$
- Pairing de integración

$$\begin{array}{ccc} \Lambda \times \mathrm{Div}^0 \mathcal{H}_p & \longrightarrow & \mathbb{C}_p \\ (f, Q - P) & \longmapsto & \int_P^Q f(x)dx, \end{array}$$

  (converge si el valor absoluto de $P$, $Q$ no es demasiado grande)
- $\langle \cdot, \cdot \rangle : H^1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \Lambda) \times H_1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \mathrm{Div}^0 \mathcal{H}_p) \longrightarrow \mathbb{C}_p$.
- Construimos:
  - $\tau \in K \setminus F \rightsquigarrow c_\tau \in H_1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \mathrm{Div}^0 \mathcal{H}_p)$
  - $\theta \in K \setminus F \rightsquigarrow J_\theta^+ \in H^1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \Lambda)$

**Conjecture**

$J_\theta(\tau) := \langle J_\theta, c_\tau \rangle$ is el logaritmo $p$-adico de un número algebraico que vive en una composición de ring class fields $H_\theta \cdot H_\tau$.

# Módulos singulares $p$-ádicos cuaterniónicos

- Sea $\mathfrak{p} = (\varpi)$ y $\Lambda = \overline{\mathbb{Z}}_{\mathfrak{p}}[[\varpi z]]$
- Pairing de integración

$$\begin{array}{ccc} \Lambda \times \mathrm{Div}^0\mathcal{H}_p & \longrightarrow & \mathbb{C}_p \\ (f, Q-P) & \longmapsto & \int_P^Q f(x)dx, \end{array}$$

(converge si el valor absoluto de $P$, $Q$ no es demasiado grande)

- $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon H^1(\Gamma_0(\mathfrak{p}),\Lambda) \times H_1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \mathrm{Div}^0\mathcal{H}_p) \longrightarrow \mathbb{C}_p$.
- Construimos:
  - $\tau \in K \setminus F \rightsquigarrow c_\tau \in H_1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \mathrm{Div}^0\mathcal{H}_p)$
  - $\theta \in K \setminus F \rightsquigarrow J_\theta^+ \in H^1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \Lambda)$

**Conjecture**

$J_\theta(\tau) := \langle J_\theta, c_\tau\rangle$ is el logaritmo $p$-adico de un número algebraico que vive en una composición de ring class fields $H_\theta \cdot H_\tau$.

# Módulos singulares $p$-ádicos cuaterniónicos

- Sea $\mathfrak{p} = (\varpi)$ y $\Lambda = \overline{\mathbb{Z}}_{\mathfrak{p}}[[\varpi z]]$
- Pairing de integración

$$\begin{array}{ccc} \Lambda \times \mathrm{Div}^0\mathcal{H}_p & \longrightarrow & \mathbb{C}_p \\ (f, Q-P) & \longmapsto & \int_P^Q f(x)dx, \end{array}$$

  (converge si el valor absoluto de $P, Q$ no es demasiado grande)
- $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon H^1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \Lambda) \times H_1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \mathrm{Div}^0\mathcal{H}_p) \longrightarrow \mathbb{C}_p$.
- Construimos:
  - $\tau \in K \setminus F \rightsquigarrow c_\tau \in H_1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \mathrm{Div}^0\mathcal{H}_p)$
  - $\theta \in K \setminus F \rightsquigarrow J_\theta^+ \in H^1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \Lambda)$

**Conjecture**

$J_\theta(\tau) := \langle J_\theta, c_\tau \rangle$ is el logaritmo $p$-adico de un número algebraico que vive en una composición de ring class fields $H_\theta \cdot H_\tau$.

# Módulos singulares $p$-ádicos cuaterniónicos

- Sea $\mathfrak{p} = (\varpi)$ y $\Lambda = \overline{\mathbb{Z}}_{\mathfrak{p}}[[\varpi z]]$
- Pairing de integración
$$\begin{array}{ccc} \Lambda \times \mathrm{Div}^0\mathcal{H}_p & \longrightarrow & \mathbb{C}_p \\ (f, Q-P) & \longmapsto & \int_P^Q f(x)dx, \end{array}$$
  (converge si el valor absoluto de $P$, $Q$ no es demasiado grande)
- $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon H^1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \Lambda) \times H_1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \mathrm{Div}^0\mathcal{H}_p) \longrightarrow \mathbb{C}_p$.
- Construimos:
  - $\tau \in K \setminus F \rightsquigarrow c_\tau \in H_1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \mathrm{Div}^0\mathcal{H}_p)$
  - $\theta \in K \setminus F \rightsquigarrow J_\theta^+ \in H^1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \Lambda)$

**Conjecture**

$J_\theta(\tau) := \langle J_\theta, c_\tau \rangle$ is el logaritmo $p$-adico de un número algebraico que vive en una composición de ring class fields $H_\theta \cdot H_\tau$.

# Módulos singulares $p$-ádicos cuaterniónicos

- Sea $\mathfrak{p} = (\varpi)$ y $\Lambda = \overline{\mathbb{Z}}_{\mathfrak{p}}[[\varpi z]]$
- Pairing de integración

$$\begin{array}{ccc} \Lambda \times \mathrm{Div}^0 \mathcal{H}_p & \longrightarrow & \mathbb{C}_p \\ (f, Q - P) & \longmapsto & \int_P^Q f(x) dx, \end{array}$$

  (converge si el valor absoluto de $P, Q$ no es demasiado grande)
- $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon H^1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \Lambda) \times H_1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \mathrm{Div}^0 \mathcal{H}_p) \longrightarrow \mathbb{C}_p$.
- Construimos:
  - $\tau \in K \setminus F \rightsquigarrow c_\tau \in H_1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \mathrm{Div}^0 \mathcal{H}_p)$
  - $\theta \in K \setminus F \rightsquigarrow J_\theta^+ \in H^1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \Lambda)$

## Conjecture

$J_\theta(\tau) := \langle J_\theta, c_\tau \rangle$ is el logaritmo $p$-adico de un número algebraico que vive en una composición de ring class fields $H_\theta \cdot H_\tau$.

# Construcción

- $\tau \in K \setminus F \rightsquigarrow c_\tau \in H_1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \mathrm{Div}^0\mathcal{H}_p)$
  - Esencialmente $c_\tau$ proviene de $\gamma_\tau \otimes \tau$, $\mathrm{Stab}_R(\tau) = \langle \pm\gamma_\tau \rangle$
- $\theta \in K \setminus F \rightsquigarrow J_\theta^+ \in H^1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \Lambda)$
  - $\theta \rightsquigarrow \theta_\infty \in \mathbb{R} = \partial\mathcal{H}$ y $\theta \rightsquigarrow \theta_p \in \mathcal{H}_p$
  - $w \in \Gamma_0\theta \rightsquigarrow w_\infty \in \mathbb{R} = \partial\mathcal{H}$ y $w_p \in \mathcal{H}_\mathfrak{p}$
  - $\varphi_\theta(\gamma) := \sum_{w \in \Gamma_0\theta} \delta_\gamma(w_\infty) w_p$
  - $\varphi \in H^1(\Gamma_0, \mathrm{Div}^0\mathcal{H}_p)$
  - Restricción y aplicar $W_p \rightsquigarrow$ clase en $H^1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \mathrm{Div}^0\mathcal{H}_\mathfrak{p})$
  - $\mathrm{Div}^0\mathcal{H}_\mathfrak{p} \to \Lambda$: $P - Q \mapsto \mathrm{dlog}\left(\frac{z-P}{z-Q}\right) \in \Lambda \rightsquigarrow \phi_\theta \in H^1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \Lambda)$
  - $$J_\theta^+ = \phi_\theta + U_\mathfrak{p}\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^2\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^3\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^4\phi_\theta + \cdots,$$
    $$J_\theta^- = -\phi_\theta + U_\mathfrak{p}\phi_\theta - U_\mathfrak{p}^2\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^3\phi_\theta - U_\mathfrak{p}^4\phi_\theta + \cdots$$
  - $$J_\theta^{\mathrm{even}} = \frac{1}{2}\left(J_\theta^+ - J_\theta^-\right) = \phi_\theta + U_\mathfrak{p}^2\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^4\phi_\theta + \cdots$$
    $$J_\theta^{\mathrm{odd}} = \frac{1}{2}\left(J_\theta^+ + J_\theta^-\right) = U_\mathfrak{p}\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^3\phi_\theta + \cdots.$$

# Construcción

- $\tau \in K \setminus F \rightsquigarrow c_\tau \in H_1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \mathrm{Div}^0 \mathcal{H}_p)$
  - Esencialmente $c_\tau$ proviene de $\gamma_\tau \otimes \tau$, $\mathrm{Stab}_R(\tau) = \langle \pm \gamma_\tau \rangle$
- $\theta \in K \setminus F \rightsquigarrow J_\theta^+ \in H^1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \Lambda)$
  - $\theta \rightsquigarrow \theta_\infty \in \mathbb{R} = \partial\mathcal{H}$ y $\theta \rightsquigarrow \theta_p \in \mathcal{H}_p$
  - $w \in \Gamma_0\theta \rightsquigarrow w_\infty \in \mathbb{R} = \partial\mathcal{H}$ y $w_p \in \mathcal{H}_\mathfrak{p}$
  - $\varphi_\theta(\gamma) := \sum_{w \in \Gamma_0\theta} \delta_\gamma(w_\infty) w_p$
  - $\varphi \in H^1(\Gamma_0, \mathrm{Div}^0 \mathcal{H}_p)$
  - Restricción y aplicar $W_p \rightsquigarrow$ clase en $H^1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \mathrm{Div}^0 \mathcal{H}_\mathfrak{p})$
  - $\mathrm{Div}^0 \mathcal{H}_\mathfrak{p} \to \Lambda\colon\ P - Q \mapsto \mathrm{dlog}\left(\frac{z-P}{z-Q}\right) \in \Lambda \rightsquigarrow \phi_\theta \in H^1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \Lambda)$
  - $$J_\theta^+ = \phi_\theta + U_\mathfrak{p}\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^2\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^3\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^4\phi_\theta + \cdots,$$
    $$J_\theta^- = -\phi_\theta + U_\mathfrak{p}\phi_\theta - U_\mathfrak{p}^2\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^3\phi_\theta - U_\mathfrak{p}^4\phi_\theta + \cdots$$
  - $$J_\theta^{\mathrm{even}} = \frac{1}{2}\left(J_\theta^+ - J_\theta^-\right) = \phi_\theta + U_\mathfrak{p}^2\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^4\phi_\theta + \cdots$$
    $$J_\theta^{\mathrm{odd}} = \frac{1}{2}\left(J_\theta^+ + J_\theta^-\right) = U_\mathfrak{p}\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^3\phi_\theta + \cdots.$$

# Construcción

- $\tau \in K \setminus F \rightsquigarrow c_\tau \in H_1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \mathrm{Div}^0\mathcal{H}_p)$
  - Esencialmente $c_\tau$ proviene de $\gamma_\tau \otimes \tau$, $\mathrm{Stab}_R(\tau) = \langle \pm\gamma_\tau \rangle$
- $\theta \in K \setminus F \rightsquigarrow J_\theta^+ \in H^1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \Lambda)$
  - $\theta \rightsquigarrow \theta_\infty \in \mathbb{R} = \partial\mathcal{H}$ y $\theta \rightsquigarrow \theta_p \in \mathcal{H}_p$
  - $w \in \Gamma_0\theta \rightsquigarrow w_\infty \in \mathbb{R} = \partial\mathcal{H}$ y $w_p \in \mathcal{H}_\mathfrak{p}$
  - $\varphi_\theta(\gamma) := \sum_{w\in\Gamma_0\theta} \delta_\gamma(w_\infty) w_p$
  - $\varphi \in H^1(\Gamma_0, \mathrm{Div}^0\mathcal{H}_p)$
  - Restricción y aplicar $W_p \rightsquigarrow$ clase en $H^1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \mathrm{Div}^0\mathcal{H}_\mathfrak{p})$
  - $\mathrm{Div}^0\mathcal{H}_\mathfrak{p} \to \Lambda: \;\; P - Q \mapsto \mathrm{dlog}\left(\frac{z-P}{z-Q}\right) \in \Lambda \rightsquigarrow \phi_\theta \in H^1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \Lambda)$
  - $$J_\theta^+ = \phi_\theta + U_\mathfrak{p}\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^2\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^3\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^4\phi_\theta + \cdots,$$
    $$J_\theta^- = -\phi_\theta + U_\mathfrak{p}\phi_\theta - U_\mathfrak{p}^2\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^3\phi_\theta - U_\mathfrak{p}^4\phi_\theta + \cdots$$
  - $$J_\theta^{\mathrm{even}} = \frac{1}{2}\left(J_\theta^+ - J_\theta^-\right) = \phi_\theta + U_\mathfrak{p}^2\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^4\phi_\theta + \cdots$$
    $$J_\theta^{\mathrm{odd}} = \frac{1}{2}\left(J_\theta^+ + J_\theta^-\right) = U_\mathfrak{p}\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^3\phi_\theta + \cdots.$$

# Construcción

- $\tau \in K \setminus F \rightsquigarrow c_\tau \in H_1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \mathrm{Div}^0\mathcal{H}_p)$
  - Esencialmente $c_\tau$ proviene de $\gamma_\tau \otimes \tau$, $\mathrm{Stab}_R(\tau) = \langle \pm\gamma_\tau \rangle$
- $\theta \in K \setminus F \rightsquigarrow J_\theta^+ \in H^1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \Lambda)$
  - $\theta \rightsquigarrow \theta_\infty \in \mathbb{R} = \partial\mathcal{H}$ y $\theta \rightsquigarrow \theta_p \in \mathcal{H}_p$
  - $w \in \Gamma_0\theta \rightsquigarrow w_\infty \in \mathbb{R} = \partial\mathcal{H}$ y $w_p \in \mathcal{H}_\mathfrak{p}$
  - $\varphi_\theta(\gamma) := \sum_{w \in \Gamma_0\theta} \delta_\gamma(w_\infty) w_p$
  - $\varphi \in H^1(\Gamma_0, \mathrm{Div}^0\mathcal{H}_p)$
  - Restricción y aplicar $W_p \rightsquigarrow$ clase en $H^1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \mathrm{Div}^0\mathcal{H}_\mathfrak{p})$
  - $\mathrm{Div}^0\mathcal{H}_\mathfrak{p} \to \Lambda\colon \; P - Q \mapsto \mathrm{dlog}\left(\frac{z-P}{z-Q}\right) \in \Lambda \rightsquigarrow \phi_\theta \in H^1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \Lambda)$
  - $$J_\theta^+ = \phi_\theta + U_\mathfrak{p}\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^2\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^3\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^4\phi_\theta + \cdots,$$
    $$J_\theta^- = -\phi_\theta + U_\mathfrak{p}\phi_\theta - U_\mathfrak{p}^2\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^3\phi_\theta - U_\mathfrak{p}^4\phi_\theta + \cdots$$
  - $$J_\theta^{\mathrm{even}} = \frac{1}{2}\left(J_\theta^+ - J_\theta^-\right) = \phi_\theta + U_\mathfrak{p}^2\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^4\phi_\theta + \cdots$$
    $$J_\theta^{\mathrm{odd}} = \frac{1}{2}\left(J_\theta^+ + J_\theta^-\right) = U_\mathfrak{p}\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^3\phi_\theta + \cdots.$$

# Construcción

- $\tau \in K \setminus F \rightsquigarrow c_\tau \in H_1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \mathrm{Div}^0 \mathcal{H}_p)$
  - Esencialmente $c_\tau$ proviene de $\gamma_\tau \otimes \tau$, $\mathrm{Stab}_R(\tau) = \langle \pm\gamma_\tau \rangle$
- $\theta \in K \setminus F \rightsquigarrow J_\theta^+ \in H^1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \Lambda)$
  - $\theta \rightsquigarrow \theta_\infty \in \mathbb{R} = \partial\mathcal{H}$ y $\theta \rightsquigarrow \theta_p \in \mathcal{H}_p$
  - $w \in \Gamma_0\theta \rightsquigarrow w_\infty \in \mathbb{R} = \partial\mathcal{H}$ y $w_p \in \mathcal{H}_\mathfrak{p}$
  - $\varphi_\theta(\gamma) := \sum_{w \in \Gamma_0\theta} \delta_\gamma(w_\infty) w_p$
  - $\varphi \in H^1(\Gamma_0, \mathrm{Div}^0 \mathcal{H}_p)$
  - Restricción y aplicar $W_p \rightsquigarrow$ clase en $H^1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \mathrm{Div}^0 \mathcal{H}_\mathfrak{p})$
  - $\mathrm{Div}^0 \mathcal{H}_\mathfrak{p} \to \Lambda\colon\ P - Q \mapsto \mathrm{dlog}\left(\frac{z-P}{z-Q}\right) \in \Lambda \rightsquigarrow \phi_\theta \in H^1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \Lambda)$
  - $$J_\theta^+ = \phi_\theta + U_\mathfrak{p}\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^2\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^3\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^4\phi_\theta + \cdots,$$ $$J_\theta^- = -\phi_\theta + U_\mathfrak{p}\phi_\theta - U_\mathfrak{p}^2\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^3\phi_\theta - U_\mathfrak{p}^4\phi_\theta + \cdots$$
  - $$J_\theta^{\mathrm{even}} = \frac{1}{2}\left(J_\theta^+ - J_\theta^-\right) = \phi_\theta + U_\mathfrak{p}^2\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^4\phi_\theta + \cdots$$ $$J_\theta^{\mathrm{odd}} = \frac{1}{2}\left(J_\theta^+ + J_\theta^-\right) = U_\mathfrak{p}\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^3\phi_\theta + \cdots.$$

# Construcción

- $\tau \in K \setminus F \rightsquigarrow c_\tau \in H_1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \mathrm{Div}^0 \mathcal{H}_p)$
  - Esencialmente $c_\tau$ proviene de $\gamma_\tau \otimes \tau$, $\mathrm{Stab}_R(\tau) = \langle \pm\gamma_\tau \rangle$
- $\theta \in K \setminus F \rightsquigarrow J_\theta^+ \in H^1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \Lambda)$
  - $\theta \rightsquigarrow \theta_\infty \in \mathbb{R} = \partial\mathcal{H}$ y $\theta \rightsquigarrow \theta_p \in \mathcal{H}_p$
  - $w \in \Gamma_0\theta \rightsquigarrow w_\infty \in \mathbb{R} = \partial\mathcal{H}$ y $w_p \in \mathcal{H}_\mathfrak{p}$
  - $\varphi_\theta(\gamma) := \sum_{w \in \Gamma_0\theta} \delta_\gamma(w_\infty) w_p$
  - $\varphi \in H^1(\Gamma_0, \mathrm{Div}^0 \mathcal{H}_p)$
  - Restricción y aplicar $W_p \rightsquigarrow$ clase en $H^1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \mathrm{Div}^0 \mathcal{H}_\mathfrak{p})$
  - $\mathrm{Div}^0 \mathcal{H}_\mathfrak{p} \to \Lambda: \;\; P - Q \mapsto \mathrm{dlog}\left(\frac{z-P}{z-Q}\right) \in \Lambda \rightsquigarrow \phi_\theta \in H^1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \Lambda)$
  - $$J_\theta^+ = \phi_\theta + U_\mathfrak{p}\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^2\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^3\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^4\phi_\theta + \cdots,$$ $$J_\theta^- = -\phi_\theta + U_\mathfrak{p}\phi_\theta - U_\mathfrak{p}^2\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^3\phi_\theta - U_\mathfrak{p}^4\phi_\theta + \cdots$$
  - $$J_\theta^{\mathrm{even}} = \frac{1}{2}\left(J_\theta^+ - J_\theta^-\right) = \phi_\theta + U_\mathfrak{p}^2\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^4\phi_\theta + \cdots$$ $$J_\theta^{\mathrm{odd}} = \frac{1}{2}\left(J_\theta^+ + J_\theta^-\right) = U_\mathfrak{p}\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^3\phi_\theta + \cdots.$$

# Construcción

- $\tau \in K \setminus F \rightsquigarrow c_\tau \in H_1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \mathrm{Div}^0\mathcal{H}_p)$
  - Esencialmente $c_\tau$ proviene de $\gamma_\tau \otimes \tau$, $\mathrm{Stab}_R(\tau) = \langle \pm\gamma_\tau \rangle$
- $\theta \in K \setminus F \rightsquigarrow J_\theta^+ \in H^1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \Lambda)$
  - $\theta \rightsquigarrow \theta_\infty \in \mathbb{R} = \partial\mathcal{H}$ y $\theta \rightsquigarrow \theta_p \in \mathcal{H}_p$
  - $w \in \Gamma_0\theta \rightsquigarrow w_\infty \in \mathbb{R} = \partial\mathcal{H}$ y $w_p \in \mathcal{H}_\mathfrak{p}$
  - $\varphi_\theta(\gamma) := \sum_{w\in\Gamma_0\theta} \delta_\gamma(w_\infty) w_p$
  - $\varphi \in H^1(\Gamma_0, \mathrm{Div}^0\mathcal{H}_p)$
  - Restricción y aplicar $W_p \rightsquigarrow$ clase en $H^1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \mathrm{Div}^0\mathcal{H}_\mathfrak{p})$
  - $\mathrm{Div}^0\mathcal{H}_\mathfrak{p} \to \Lambda$: $P - Q \mapsto \mathrm{dlog}\left(\frac{z-P}{z-Q}\right) \in \Lambda \rightsquigarrow \phi_\theta \in H^1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \Lambda)$
  - $$J_\theta^+ = \phi_\theta + U_\mathfrak{p}\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^2\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^3\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^4\phi_\theta + \cdots,$$ $$J_\theta^- = -\phi_\theta + U_\mathfrak{p}\phi_\theta - U_\mathfrak{p}^2\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^3\phi_\theta - U_\mathfrak{p}^4\phi_\theta + \cdots$$
  - $$J_\theta^{\mathrm{even}} = \frac{1}{2}\left(J_\theta^+ - J_\theta^-\right) = \phi_\theta + U_\mathfrak{p}^2\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^4\phi_\theta + \cdots$$ $$J_\theta^{\mathrm{odd}} = \frac{1}{2}\left(J_\theta^+ + J_\theta^-\right) = U_\mathfrak{p}\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^3\phi_\theta + \cdots.$$

# Construcción

- $\tau \in K \setminus F \rightsquigarrow c_\tau \in H_1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \mathrm{Div}^0\mathcal{H}_p)$
  - Esencialmente $c_\tau$ proviene de $\gamma_\tau \otimes \tau$, $\mathrm{Stab}_R(\tau) = \langle \pm\gamma_\tau \rangle$
- $\theta \in K \setminus F \rightsquigarrow J_\theta^+ \in H^1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \Lambda)$
  - $\theta \rightsquigarrow \theta_\infty \in \mathbb{R} = \partial\mathcal{H}$ y $\theta \rightsquigarrow \theta_p \in \mathcal{H}_p$
  - $w \in \Gamma_0\theta \rightsquigarrow w_\infty \in \mathbb{R} = \partial\mathcal{H}$ y $w_p \in \mathcal{H}_\mathfrak{p}$
  - $\varphi_\theta(\gamma) := \sum_{w \in \Gamma_0\theta} \delta_\gamma(w_\infty) w_p$
  - $\varphi \in H^1(\Gamma_0, \mathrm{Div}^0\mathcal{H}_p)$
  - Restricción y aplicar $W_p \rightsquigarrow$ clase en $H^1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \mathrm{Div}^0\mathcal{H}_\mathfrak{p})$
  - $\mathrm{Div}^0\mathcal{H}_\mathfrak{p} \to \Lambda\colon\ P - Q \mapsto \mathrm{dlog}\left(\frac{z-P}{z-Q}\right) \in \Lambda \rightsquigarrow \phi_\theta \in H^1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \Lambda)$
  - $$J_\theta^+ = \phi_\theta + U_\mathfrak{p}\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^2\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^3\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^4\phi_\theta + \cdots,$$ $$J_\theta^- = -\phi_\theta + U_\mathfrak{p}\phi_\theta - U_\mathfrak{p}^2\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^3\phi_\theta - U_\mathfrak{p}^4\phi_\theta + \cdots$$
  - $$J_\theta^{\mathrm{even}} = \frac{1}{2}\left(J_\theta^+ - J_\theta^-\right) = \phi_\theta + U_\mathfrak{p}^2\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^4\phi_\theta + \cdots$$ $$J_\theta^{\mathrm{odd}} = \frac{1}{2}\left(J_\theta^+ + J_\theta^-\right) = U_\mathfrak{p}\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^3\phi_\theta + \cdots.$$

# Construcción

- $\tau \in K \setminus F \rightsquigarrow c_\tau \in H_1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \mathrm{Div}^0\mathcal{H}_p)$
  - Esencialmente $c_\tau$ proviene de $\gamma_\tau \otimes \tau$, $\mathrm{Stab}_R(\tau) = \langle \pm\gamma_\tau \rangle$
- $\theta \in K \setminus F \rightsquigarrow J_\theta^+ \in H^1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \Lambda)$
  - $\theta \rightsquigarrow \theta_\infty \in \mathbb{R} = \partial\mathcal{H}$ y $\theta \rightsquigarrow \theta_p \in \mathcal{H}_p$
  - $w \in \Gamma_0\theta \rightsquigarrow w_\infty \in \mathbb{R} = \partial\mathcal{H}$ y $w_p \in \mathcal{H}_\mathfrak{p}$
  - $\varphi_\theta(\gamma) := \sum_{w \in \Gamma_0\theta} \delta_\gamma(w_\infty) w_p$
  - $\varphi \in H^1(\Gamma_0, \mathrm{Div}^0\mathcal{H}_p)$
  - Restricción y aplicar $W_p \rightsquigarrow$ clase en $H^1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \mathrm{Div}^0\mathcal{H}_\mathfrak{p})$
  - $\mathrm{Div}^0\mathcal{H}_\mathfrak{p} \to \Lambda\colon\ P - Q \mapsto \mathrm{dlog}\left(\frac{z-P}{z-Q}\right) \in \Lambda \rightsquigarrow \phi_\theta \in H^1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \Lambda)$
  - $$J_\theta^+ = \phi_\theta + U_\mathfrak{p}\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^2\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^3\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^4\phi_\theta + \cdots,$$
    $$J_\theta^- = -\phi_\theta + U_\mathfrak{p}\phi_\theta - U_\mathfrak{p}^2\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^3\phi_\theta - U_\mathfrak{p}^4\phi_\theta + \cdots$$
  - $$J_\theta^{\mathrm{even}} = \frac{1}{2}\left(J_\theta^+ - J_\theta^-\right) = \phi_\theta + U_\mathfrak{p}^2\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^4\phi_\theta + \cdots$$
    $$J_\theta^{\mathrm{odd}} = \frac{1}{2}\left(J_\theta^+ + J_\theta^-\right) = U_\mathfrak{p}\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^3\phi_\theta + \cdots.$$

# Construcción

- $\tau \in K \setminus F \rightsquigarrow c_\tau \in H_1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \mathrm{Div}^0\mathcal{H}_p)$
  - Esencialmente $c_\tau$ proviene de $\gamma_\tau \otimes \tau$, $\mathrm{Stab}_R(\tau) = \langle \pm\gamma_\tau \rangle$
- $\theta \in K \setminus F \rightsquigarrow J_\theta^+ \in H^1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \Lambda)$
  - $\theta \rightsquigarrow \theta_\infty \in \mathbb{R} = \partial\mathcal{H}$ y $\theta \rightsquigarrow \theta_p \in \mathcal{H}_p$
  - $w \in \Gamma_0\theta \rightsquigarrow w_\infty \in \mathbb{R} = \partial\mathcal{H}$ y $w_p \in \mathcal{H}_\mathfrak{p}$
  - $\varphi_\theta(\gamma) := \sum_{w \in \Gamma_0\theta} \delta_\gamma(w_\infty) w_p$
  - $\varphi \in H^1(\Gamma_0, \mathrm{Div}^0\mathcal{H}_p)$
  - Restricción y aplicar $W_p \rightsquigarrow$ clase en $H^1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \mathrm{Div}^0\mathcal{H}_\mathfrak{p})$
  - $\mathrm{Div}^0\mathcal{H}_\mathfrak{p} \to \Lambda: \; P - Q \mapsto \mathrm{dlog}\left(\frac{z-P}{z-Q}\right) \in \Lambda \rightsquigarrow \phi_\theta \in H^1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \Lambda)$
  - $$J_\theta^+ = \phi_\theta + U_\mathfrak{p}\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^2\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^3\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^4\phi_\theta + \cdots,$$
    $$J_\theta^- = -\phi_\theta + U_\mathfrak{p}\phi_\theta - U_\mathfrak{p}^2\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^3\phi_\theta - U_\mathfrak{p}^4\phi_\theta + \cdots$$
  - $$J_\theta^{\mathrm{even}} = \frac{1}{2}\left(J_\theta^+ - J_\theta^-\right) = \phi_\theta + U_\mathfrak{p}^2\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^4\phi_\theta + \cdots$$
    $$J_\theta^{\mathrm{odd}} = \frac{1}{2}\left(J_\theta^+ + J_\theta^-\right) = U_\mathfrak{p}\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^3\phi_\theta + \cdots.$$

# Construcción

- $\tau \in K \setminus F \rightsquigarrow c_\tau \in H_1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \mathrm{Div}^0\mathcal{H}_p)$
  - Esencialmente $c_\tau$ proviene de $\gamma_\tau \otimes \tau$, $\mathrm{Stab}_R(\tau) = \langle \pm\gamma_\tau \rangle$
- $\theta \in K \setminus F \rightsquigarrow J_\theta^+ \in H^1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \Lambda)$
  - $\theta \rightsquigarrow \theta_\infty \in \mathbb{R} = \partial\mathcal{H}$ y $\theta \rightsquigarrow \theta_p \in \mathcal{H}_p$
  - $w \in \Gamma_0\theta \rightsquigarrow w_\infty \in \mathbb{R} = \partial\mathcal{H}$ y $w_p \in \mathcal{H}_\mathfrak{p}$
  - $\varphi_\theta(\gamma) := \sum_{w\in\Gamma_0\theta} \delta_\gamma(w_\infty) w_p$
  - $\varphi \in H^1(\Gamma_0, \mathrm{Div}^0\mathcal{H}_p)$
  - Restricción y aplicar $W_p \rightsquigarrow$ clase en $H^1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \mathrm{Div}^0\mathcal{H}_\mathfrak{p})$
  - $\mathrm{Div}^0\mathcal{H}_\mathfrak{p} \to \Lambda\colon\ P - Q \mapsto \mathrm{dlog}\left(\frac{z-P}{z-Q}\right) \in \Lambda \rightsquigarrow \phi_\theta \in H^1(\Gamma_0(\mathfrak{p}), \Lambda)$
  - $$J_\theta^+ = \phi_\theta + U_\mathfrak{p}\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^2\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^3\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^4\phi_\theta + \cdots,$$
    $$J_\theta^- = -\phi_\theta + U_\mathfrak{p}\phi_\theta - U_\mathfrak{p}^2\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^3\phi_\theta - U_\mathfrak{p}^4\phi_\theta + \cdots$$
  - $$J_\theta^{\mathrm{even}} = \frac{1}{2}\left(J_\theta^+ - J_\theta^-\right) = \phi_\theta + U_\mathfrak{p}^2\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^4\phi_\theta + \cdots$$
    $$J_\theta^{\mathrm{odd}} = \frac{1}{2}\left(J_\theta^+ + J_\theta^-\right) = U_\mathfrak{p}\phi_\theta + U_\mathfrak{p}^3\phi_\theta + \cdots.$$

# Quaternionic singular moduli: examples

- Hemos calculado $J_\theta^\bullet(\tau)$ en muchos ejemplos con mucha precisión y en muchos casos reconocemos estas cantidades como logaritmos de números algebraicos en los ring class fields esperados.

**Ejemplo:** $F = \mathbb{Q}(\omega)$, $\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $p = 11$, $B = (-\omega, -2)_F$, $D_B = (2)$

- $K_1 = F(\theta)$, $\theta = \sqrt{1 - 2\omega}$ and $K_2 = F(\tau)$, $\tau = \sqrt{9 - 14\omega}$
- $J_\theta^+(\tau) = 26508338610850115698462088474499702296246646087556907919548 38 + O(11^{59})$
- Satisface: $25420x^4 - 227820x^3 + 2200011x^2 - 27566220x + 372174220$ que genera una extensión abeliana de $K_1 \cdot K_2$.

# Quaternionic singular moduli: ejemplos

$J_\theta^+(\tau)$

| | 8 | 12 | 53 | 77 | 92 | 93 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | | - | - | 3, 5 | 2, 3 | 5 |
| 12 | - | | 5 | ?? | 2 | - |
| 53 | - | 5 | | ? | 3, 23, 31 | 2, 5, 41 |
| 77 | 3, 5 | ?? | ? | | ?? | ?? |
| 92 | 2, 3 | 2 | 3, 23, 31 | ?? | | ?? |
| 93 | 5 | - | 2, 5, 41 | ?? | ?? | |

$J_\theta^-(\tau)$

| | 8 | 12 | 53 | 77 | 92 | 93 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | | 1 | - | 3, 5 | 2, 3 | 2, 5 |
| 12 | 1 | | 2, 5 | ?? | 1 | 1 |
| 53 | - | 2, 5 | | 3, 5 | 2, 3, 23, 31 | 2, 5, 41 |
| 77 | 3, 5 | ?? | 3, 5 | | ?? | ?? |
| 92 | 2, 3 | 1 | 2, 3, 23, 31 | ?? | | ?? |
| 93 | 2, 5 | 1 | 2, 5, 41 | ?? | ?? | |

Table: Tables for $D = 6$, $p = 5$, plus-minus classes.

# Moviendo $p$ y $B$

- $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{53})$ y $K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{23})$ tienen embeddings en $B_6$ y $B_{10}$.
  - Calculamos con $B_{10}$ y $p = 3$:

$$J^{\text{even}}_{\theta,3}(\tau) = 671432593119615754\ldots + 854036156664899807\ldots\frac{1+\sqrt{53}}{2} + O(3^{195}).$$

  - Calculamos con $B_6$ y $p = 5$:

$$J^{\text{even}}_{\theta,5}(\tau) = 223515896705660593\ldots + 188812945396004677\ldots\frac{1+\sqrt{53}}{2} + O(5^{197}).$$

- $M$ cuerpo generado por una raíz de $x^8 - 4x^7 + 84x^6 - 238x^5 + 1869x^4 - 3346x^3 + 7260x^2 - 5626x + 3497$
  - $\iota_3 : M \hookrightarrow \mathbb{C}_3$ and $\iota_5 : M \hookrightarrow \mathbb{C}_5$
  - Existe $\alpha \in M$ y unidades $u_1, u_2$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{23}, \sqrt{53})$ tales que

$$\iota_3(\alpha u_1) = J^{\text{even}}_{\theta,3}(\tau), \text{ and } \iota_5(\alpha u_2) = J^{\text{even}}_{\theta,5}(\tau)$$

**Pregunta**

Son las cantidades $J^{\text{even}}_{\theta,p}$ la manifestación local de algun objeto global?

# Moviendo $p$ y $B$

- $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{53})$ y $K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{23})$ tienen embeddings en $B_6$ y $B_{10}$.
  - Calculamos con $B_{10}$ y $p = 3$:

$$J_{\theta,3}^{\text{even}}(\tau) = 671432593119615754... + 854036156664899807...\frac{1+\sqrt{53}}{2} + O(3^{195}).$$

  - Calculamos con $B_6$ y $p = 5$:

$$J_{\theta,5}^{\text{even}}(\tau) = 223515896705660593... + 188812945396004677...\frac{1+\sqrt{53}}{2} + O(5^{197}).$$

- $M$ cuerpo generado por una raíz de $x^8 - 4x^7 + 84x^6 - 238x^5 + 1869x^4 - 3346x^3 + 7260x^2 - 5626x + 3497$
  - $\iota_3 : M \hookrightarrow \mathbb{C}_3$ and $\iota_5 : M \hookrightarrow \mathbb{C}_5$
  - Existe $\alpha \in M$ y unidades $u_1, u_2$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{23}, \sqrt{53})$ tales que

$$\iota_3(\alpha u_1) = J_{\theta,3}^{\text{even}}(\tau), \text{ and } \iota_5(\alpha u_2) = J_{\theta,5}^{\text{even}}(\tau)$$

**Pregunta**

Son las cantidades $J_{\theta,p}^{\text{even}}$ la manifestación local de algun objeto global?

# Moviendo $p$ y $B$

- $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{53})$ y $K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{23})$ tienen embeddings en $B_6$ y $B_{10}$.
  - Calculamos con $B_{10}$ y $p = 3$:

$$J^{\text{even}}_{\theta,3}(\tau) = 671432593119615754... + 854036156664899807... \frac{1+\sqrt{53}}{2} + O(3^{195}).$$

  - Calculamos con $B_6$ y $p = 5$:

$$J^{\text{even}}_{\theta,5}(\tau) = 223515896705660593... + 188812945396004677... \frac{1+\sqrt{53}}{2} + O(5^{197}).$$

- $M$ cuerpo generado por una raíz de $x^8 - 4x^7 + 84x^6 - 238x^5 + 1869x^4 - 3346x^3 + 7260x^2 - 5626x + 3497$
  - $\iota_3 : M \hookrightarrow \mathbb{C}_3$ and $\iota_5 : M \hookrightarrow \mathbb{C}_5$
  - Existe $\alpha \in M$ y unidades $u_1, u_2$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{23}, \sqrt{53})$ tales que

$$\iota_3(\alpha u_1) = J^{\text{even}}_{\theta,3}(\tau), \text{ and } \iota_5(\alpha u_2) = J^{\text{even}}_{\theta,5}(\tau)$$

**Pregunta**

Son las cantidades $J^{\text{even}}_{\theta,p}$ la manifestación local de algun objeto global?

# Moviendo $p$ y $B$

- $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{53})$ y $K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{23})$ tienen embeddings en $B_6$ y $B_{10}$.
  - Calculamos con $B_{10}$ y $p = 3$:

$$J^{\text{even}}_{\theta,3}(\tau) = 671432593119615754... + 854036156664899807...\frac{1+\sqrt{53}}{2} + O(3^{195}).$$

  - Calculamos con $B_6$ y $p = 5$:

$$J^{\text{even}}_{\theta,5}(\tau) = 223515896705660593... + 188812945396004677...\frac{1+\sqrt{53}}{2} + O(5^{197}).$$

- $M$ cuerpo generado por una raíz de $x^8 - 4x^7 + 84x^6 - 238x^5 + 1869x^4 - 3346x^3 + 7260x^2 - 5626x + 3497$
  - $\iota_3 : M \hookrightarrow \mathbb{C}_3$ and $\iota_5 : M \hookrightarrow \mathbb{C}_5$
  - Existe $\alpha \in M$ y unidades $u_1, u_2$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{23}, \sqrt{53})$ tales que

$$\iota_3(\alpha u_1) = J^{\text{even}}_{\theta,3}(\tau), \text{ and } \iota_5(\alpha u_2) = J^{\text{even}}_{\theta,5}(\tau)$$

**Pregunta**

Son las cantidades $J^{\text{even}}_{\theta,p}$ la manifestación local de algun objeto global?

# Moviendo $p$ y $B$

- $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{53})$ y $K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{23})$ tienen embeddings en $B_6$ y $B_{10}$.
  - Calculamos con $B_{10}$ y $p = 3$:

$$J_{\theta,3}^{\text{even}}(\tau) = 671432593119615754\ldots + 854036156664899807\ldots\frac{1+\sqrt{53}}{2} + O(3^{195}).$$

  - Calculamos con $B_6$ y $p = 5$:

$$J_{\theta,5}^{\text{even}}(\tau) = 223515896705660593\ldots + 188812945396004677\ldots\frac{1+\sqrt{53}}{2} + O(5^{197}).$$

- $M$ cuerpo generado por una raíz de $x^8-4x^7+84x^6-238x^5+1869x^4-3346x^3+7260x^2-5626x+3497$
  - $\iota_3 : M \hookrightarrow \mathbb{C}_3$ and $\iota_5 : M \hookrightarrow \mathbb{C}_5$
  - Existe $\alpha \in M$ y unidades $u_1, u_2$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{23}, \sqrt{53})$ tales que

$$\iota_3(\alpha u_1) = J_{\theta,3}^{\text{even}}(\tau), \text{ and } \iota_5(\alpha u_2) = J_{\theta,5}^{\text{even}}(\tau)$$

**Pregunta**

Son las cantidades $J_{\theta,p}^{\text{even}}$ la manifestación local de algun objeto global?

# Moviendo $p$ y $B$

- $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{53})$ y $K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{23})$ tienen embeddings en $B_6$ y $B_{10}$.
  - Calculamos con $B_{10}$ y $p = 3$:

$$J_{\theta,3}^{\text{even}}(\tau) = 6714325931196157 54 \ldots + 854036156664899807\ldots \frac{1+\sqrt{53}}{2} + O(3^{195}).$$

  - Calculamos con $B_6$ y $p = 5$:

$$J_{\theta,5}^{\text{even}}(\tau) = 223515896705660593\ldots + 188812945396004677\ldots \frac{1+\sqrt{53}}{2} + O(5^{197}).$$

- $M$ cuerpo generado por una raíz de $x^8 - 4x^7 + 84x^6 - 238x^5 + 1869x^4 - 3346x^3 + 7260x^2 - 5626x + 3497$
  - $\iota_3 : M \hookrightarrow \mathbb{C}_3$ and $\iota_5 : M \hookrightarrow \mathbb{C}_5$
  - Existe $\alpha \in M$ y unidades $u_1, u_2$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{23}, \sqrt{53})$ tales que

$$\iota_3(\alpha u_1) = J_{\theta,3}^{\text{even}}(\tau), \text{ and } \iota_5(\alpha u_2) = J_{\theta,5}^{\text{even}}(\tau)$$

**Pregunta**

Son las cantidades $J_{\theta,p}^{\text{even}}$ la manifestación local de algun objeto global?

# Moviendo $p$ y $B$

- $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{53})$ y $K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{23})$ tienen embeddings en $B_6$ y $B_{10}$.
  - Calculamos con $B_{10}$ y $p = 3$:

$$J_{\theta,3}^{\text{even}}(\tau) = 6714325931196157 54\ldots + 854036156664899807\ldots \frac{1+\sqrt{53}}{2} + O(3^{195}).$$

  - Calculamos con $B_6$ y $p = 5$:

$$J_{\theta,5}^{\text{even}}(\tau) = 223515896705660593\ldots + 188812945396004677\ldots \frac{1+\sqrt{53}}{2} + O(5^{197}).$$

- $M$ cuerpo generado por una raíz de $x^8 - 4x^7 + 84x^6 - 238x^5 + 1869x^4 - 3346x^3 + 7260x^2 - 5626x + 3497$
  - $\iota_3 : M \hookrightarrow \mathbb{C}_3$ and $\iota_5 : M \hookrightarrow \mathbb{C}_5$
  - Existe $\alpha \in M$ y unidades $u_1, u_2$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{23}, \sqrt{53})$ tales que

$$\iota_3(\alpha u_1) = J_{\theta,3}^{\text{even}}(\tau), \text{ and } \iota_5(\alpha u_2) = J_{\theta,5}^{\text{even}}(\tau)$$

**Pregunta**

Son las cantidades $J_{\theta,p}^{\text{even}}$ la manifestación local de algun objeto global?

# Una construcción cuaterniónica de módulos singulares $p$-ádicos

Xevi Guitart (UB) Marc Masdeu (UAB) Xavier Xarles (UAB)

Seminario de teoría de números ICMAT-UAM