Variedades abelianas modulares sobre cuerpos de números

Xevi Guitart, Jordi Quer

Departament de Matemàtica Aplicada 2, UPC

Terceras Jornadas de Teoría de Números

Índex

Modularidad de curvas elípticas sobre $\mathbb{Q}$

Teorema de modularidad (Wiles et al. 2001)

Toda curva elíptica $C/\mathbb{Q}$ es modular.

Modularidad de curvas elípticas sobre $\mathbb{Q}$

Teorema de modularidad (Wiles et al. 2001)

Toda curva elíptica $C/\mathbb{Q}$ es modular.

Aquí modular significa cualquiera de estas dos propiedades equivalentes:

- Es $\mathbb{Q}$-isógena a un factor simple de $J_1(N)/\mathbb{Q}$ para algún N.
- $L(C/\mathbb{Q}; s) \sim L(f; s)$ para alguna newform $f \in S_2(\Gamma_1(N))$.

Modularidad de variedades abelianas sobre $\mathbb{Q}$

Construcción de Shimura: variedades modulares sobre $\mathbb{Q}$

Asocia a cada newform $f \in S_2(\Gamma_1(N))$ una variedad abeliana $A_f/\mathbb{Q}$:

- $A_f/\mathbb{Q}$ es $\mathbb{Q}$-isógena a un factor simple de $J_1(N)/\mathbb{Q}$
- $L(A_f/\mathbb{Q}; s) \sim \prod_{\sigma : E_f \hookrightarrow \mathbb{C}} L({}^\sigma f; s)$

Modularidad de variedades abelianas sobre $\mathbb{Q}$

Construcción de Shimura: variedades modulares sobre $\mathbb{Q}$

Asocia a cada newform $f \in S_2(\Gamma_1(N))$ una variedad abeliana $A_f/\mathbb{Q}$:

- $A_f/\mathbb{Q}$ es $\mathbb{Q}$-isógena a un factor simple de $J_1(N)/\mathbb{Q}$
- $L(A_f/\mathbb{Q}; s) \sim \prod_{\sigma : E_f \hookrightarrow \mathbb{C}} L({}^\sigma f; s)$

Teorema (Ribet + Conjetura de Serre)

$A/\mathbb{Q}$ simple es modular si y sólo si es de tipo GL_2
($\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A) \otimes \mathbb{Q}$ es un cuerpo de números E con $[E : \mathbb{Q}] = \dim A$).

Modularidad de variedades abelianas sobre $\mathbb{Q}$

Construcción de Shimura: variedades modulares sobre $\mathbb{Q}$

Asocia a cada newform $f \in S_2(\Gamma_1(N))$ una variedad abeliana $A_f/\mathbb{Q}$:

- $A_f/\mathbb{Q}$ es $\mathbb{Q}$-isógena a un factor simple de $J_1(N)/\mathbb{Q}$
- $L(A_f/\mathbb{Q}; s) \sim \prod_{\sigma : E_f \hookrightarrow \mathbb{C}} L({}^{\sigma}f; s)$

Teorema (Ribet + Conjetura de Serre)

$A/\mathbb{Q}$ simple es modular si y sólo si es de tipo GL_2
($\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A) \otimes \mathbb{Q}$ es un cuerpo de números E con $[E : \mathbb{Q}] = \dim A$).

Modular significa cualquiera de estas dos propiedades equivalentes:

- $A/\mathbb{Q}$ es $\mathbb{Q}$-isógena a un factor simple de $J_1(N)$ para algún N.
- $L(A/\mathbb{Q}; s) \sim$ producto de L-series de newforms $f \in S_2(\Gamma_1(N))$.

Modularidad de variedades abelianas sobre $\mathbb{Q}$

Construcción de Shimura: variedades modulares sobre $\mathbb{Q}$

Asocia a cada newform $f \in S_2(\Gamma_1(N))$ una variedad abeliana $A_f/\mathbb{Q}$:

- $A_f/\mathbb{Q}$ es $\mathbb{Q}$-isógena a un factor simple de $J_1(N)/\mathbb{Q}$
- $L(A_f/\mathbb{Q}; s) \sim \prod_{\sigma: E_f \hookrightarrow \mathbb{C}} L({}^{\sigma}f; s)$

Teorema (Ribet + Conjetura de Serre)

$A/\mathbb{Q}$ simple es modular si y sólo si es de tipo GL_2
($\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A) \otimes \mathbb{Q}$ es un cuerpo de números E con $[E : \mathbb{Q}] = \dim A$).

Modular significa cualquiera de estas dos propiedades equivalentes:

- $A/\mathbb{Q}$ es $\mathbb{Q}$-isógena a un factor simple de $J_1(N)$ para algún N.
- $L(A/\mathbb{Q}; s) \sim$ producto de L-series de newforms $f \in S_2(\Gamma_1(N))$.

Si cambiamos $\mathbb{Q}$ por K estas dos propiedades ya no son equivalentes.

Modularidad de variedades abelianas sobre K

B/K v. abeliana sin CM ($\bar{\mathbb{Q}}$-simple, $\mathrm{End}_{\bar{\mathbb{Q}}}(B) = \mathrm{End}_K(B)$ y $K/\mathbb{Q}$ Galois).

Definición

- B/K modular si es K-isógena a un factor simple de alguna $J_1(N)_K$.
- B/K fuertemente modular si $L(B/K; s) \sim \prod_f L(f; s)$, para ciertas newforms $f \in S_2(\Gamma_1(N_f))$.

Modularidad de variedades abelianas sobre K

B/K v. abeliana sin CM ($\bar{\mathbb{Q}}$-simple, $\mathrm{End}_{\bar{\mathbb{Q}}}(B) = \mathrm{End}_K(B)$ y $K/\mathbb{Q}$ Galois).

Definición

- B/K modular si es K-isógena a un factor simple de alguna $J_1(N)_K$.
- B/K fuertemente modular si $L(B/K;s) \sim \prod_f L(f;s)$, para ciertas newforms $f \in S_2(\Gamma_1(N_f))$.

Teorema (Ribet-Pyle)

B/K es modular si y sólo si

- B/K es $\mathbb{Q}$-variedad: para todo $s \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ existe una isogenia $\mu_s : {}^sB \to B$ compatible con los endomorfismos de B.
- $\mathrm{End}^0_{\mathbb{Q}}(B)$ es:
  - F cuerpo de números totalmente real tal que $[F:\mathbb{Q}] = \dim B$
  - F-álgebra de cuaterniones tal que $2[F:\mathbb{Q}] = \dim B$

A las variedades modulares también se les llama building blocks.

Variedades fuertemente modulares

Objetivo

Dar una caracterización de las variedades B/K fuertemente modulares.

Variedades fuertemente modulares

Objetivo

Dar una caracterización de las variedades B/K fuertemente modulares.

Primera observación: fuertemente modular $\Rightarrow$ modular

Variedades fuertemente modulares

Objetivo

Dar una caracterización de las variedades B/K fuertemente modulares.

Primera observación: fuertemente modular $\Rightarrow$ modular

$$L(B/K;s) = L((\mathrm{Res}_{K/\mathbb{Q}}B)/\mathbb{Q};s)$$

Variedades fuertemente modulares

Objetivo

Dar una caracterización de las variedades B/K fuertemente modulares.

Primera observación: fuertemente modular $\Rightarrow$ modular

$$L(B/K;s) = L((\mathrm{Res}_{K/\mathbb{Q}}B)/\mathbb{Q};s)$$

$$\begin{aligned} B/K \text{ fuertemente modular} \quad &\Leftrightarrow \quad (\mathrm{Res}_{K/\mathbb{Q}}B)/\mathbb{Q} \text{ fuertemente modular} \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Res}_{K/\mathbb{Q}}B \sim \prod A_f \end{aligned}$$

$$(\mathrm{Res}_{K/\mathbb{Q}}B)_K \sim \prod_{s\in\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})} {}^sB$$

Índex

$\mathbb{Q}$-variedades y cohomología de Galois

B/K un building block, $K/\mathbb{Q}$ de Galois.

- B es $\bar{\mathbb{Q}}$-simple y $\mathrm{End}^0_{\bar{\mathbb{Q}}}(B) = \mathrm{End}^0_K(B)$.
- $\mathrm{End}^0_K(B) = F$, $\mathrm{End}^0_K(B) = D$ (F-álgebra de cuaterniones)
- Para todo $s \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ tenemos $\mu_s : {}^sB \to B$.

$\mathbb{Q}$-variedades y cohomología de Galois

B/K un building block, $K/\mathbb{Q}$ de Galois.

- B es $\bar{\mathbb{Q}}$-simple y $\mathrm{End}^0_{\bar{\mathbb{Q}}}(B) = \mathrm{End}^0_K(B)$.
- $\mathrm{End}^0_K(B) = F$, $\mathrm{End}^0_K(B) = D$ (F-álgebra de cuaterniones)
- Para todo $s \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ tenemos $\mu_s : {}^sB \to B$.

Definición: $[c_{B/K}] \in H^2(\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}), F^*)$

- $s, t \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \rightsquigarrow c_{B/K}(s,t) = \mu_s \circ {}^s\mu_t \circ \mu_{st}^{-1} \in Z(\mathrm{End}^0(B)) = F$
- $[c_{B/K}] \in H^2(\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}), F^*)[2]$
- $[c_{B/K}]$ sólo depende de la clase de K-isogenia de B

$\mathbb{Q}$-variedades y cohomología de Galois

B/K un building block, $K/\mathbb{Q}$ de Galois.

- B es $\bar{\mathbb{Q}}$-simple y $\mathrm{End}^0_{\bar{\mathbb{Q}}}(B) = \mathrm{End}^0_K(B)$.
- $\mathrm{End}^0_K(B) = F$, $\mathrm{End}^0_K(B) = D$ (F-álgebra de cuaterniones)
- Para todo $s \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ tenemos $\mu_s : {}^sB \to B$.

Definición: $[c_{B/K}] \in H^2(\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}), F^*)$

- $s, t \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \rightsquigarrow c_{B/K}(s,t) = \mu_s \circ {}^s\mu_t \circ \mu_{st}^{-1} \in Z(\mathrm{End}^0(B)) = F$
- $[c_{B/K}] \in H^2(\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}), F^*)[2]$
- $[c_{B/K}]$ sólo depende de la clase de K-isogenia de B

Definición: $[c_B] \in H^2(G_{\mathbb{Q}}, F^*)$

- $[c_B] = \mathrm{Inf}[c_{B/K}]$, $\mathrm{Inf} : H^2(\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}), F^*) \to H^2(G_{\mathbb{Q}}, F^*)$.
- $[c_B]$ sólo depende de la clase de $\bar{\mathbb{Q}}$-isogenia de B

Variedades fuertemente modulares

Proposición

$$\mathrm{End}^0_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Res}_{K/\mathbb{Q}} B) \simeq \mathrm{End}^0(B) \otimes_F F^{c_{B/K}}[\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})]$$

Variedades fuertemente modulares

Proposición

$\mathrm{End}^0_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Res}_{K/\mathbb{Q}} B) \simeq \mathrm{End}^0(B) \otimes_F F^{c_{B/K}}[\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})]$

Teorema (Caracterización de variedades fuertemente modulares)

B/K (sin CM) es fuertemente modular si y sólo si

- $K/\mathbb{Q}$ es abeliana
- $[c_{B/K}]$ se puede representar por un cociclo simétrico.

Variedades fuertemente modulares

Proposición

$\mathrm{End}^0_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Res}_{K/\mathbb{Q}} B) \simeq \mathrm{End}^0(B) \otimes_F F^{c_{B/K}}[\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})]$

Teorema (Caracterización de variedades fuertemente modulares)

B/K (sin CM) es fuertemente modular si y sólo si

- $K/\mathbb{Q}$ es abeliana
- $[c_{B/K}]$ se puede representar por un cociclo simétrico.

Pregunta

B/K no fuertemente modular.
Existe B_0/K en la clase de $\bar{\mathbb{Q}}$-isogenia de B que sea fuertemente modular?

- Tenemos $[c_B] \in H^2(G_{\mathbb{Q}}, F^*)$
- Podemos ver $[c_B] \in H^2(G_{\mathbb{Q}}, \bar{F}^*) = \{1\}$
- Existen aplicaciones $\alpha : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \bar{F}^*$ tales que:

$$c_B(\sigma, \tau) = \alpha(\sigma)\alpha(\tau)\alpha(\sigma\tau)^{-1}$$

- $\overline{\alpha} : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \bar{F}^*/F^*$ es un morfismo
- $K_\alpha = \bar{\mathbb{Q}}^{\ker \overline{\alpha}}$ es un splitting field asociado a $[c_B]$.

- Tenemos $[c_B] \in H^2(G_{\mathbb{Q}}, F^*)$
- Podemos ver $[c_B] \in H^2(G_{\mathbb{Q}}, \bar{F}^*) = \{1\}$
- Existen aplicaciones $\alpha : G_{\mathbb{Q}} \to \bar{F}^*$ tales que:

$$c_B(\sigma, \tau) = \alpha(\sigma)\alpha(\tau)\alpha(\sigma\tau)^{-1}$$

- $\overline{\alpha} : G_{\mathbb{Q}} \to \bar{F}^*/F^*$ es un morfismo
- $K_\alpha = \bar{\mathbb{Q}}^{\ker \overline{\alpha}}$ es un splitting field asociado a $[c_B]$.

Proposición

B/K un building block. Existe B_0/K fuertemente modular en la clase de $\bar{\mathbb{Q}}$-isogenia de B si y sólo si K contiene algún splitting field para $[c_B]$.

Índex

Familia de curvas de género 2

Familia de Baba-Granath:

$$C_j: \quad Y^2 = \left(-4+3\sqrt{-6j}\right)X^6 - 12(27j+16)X^5 - 6(27j+16)\left(28+9\sqrt{-6j}\right)X^4$$
$$+16(27j+16)^2X^3 + 12(27j+16)2\left(28-9\sqrt{-6j}\right)X^2$$
$$-48(27j+16)^3X + 8(27j+16)3\left(4+3\sqrt{-6j}\right)$$

- $B_j = \mathrm{Jac}(C_j)$ es un building block: existen newforms f tales que

$$A_f \sim_{\bar{\mathbb{Q}}} B_j^n.$$

- $\mathrm{End}^0(B_j) \simeq (2,3)_{\mathbb{Q}}$
- $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-6j}, \sqrt{j}, \sqrt{-(27j+16)}, \sqrt{-2(27j+16)})$

Cálculo de la clase de cohomología

- Hemos calculado $[c_{B_j}] \in H^2(G_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}^*)[2]$

- $$\begin{array}{ccccc} H^2(G_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}^*)[2] & \simeq & \mathrm{Hom}(G_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}^*/\{\pm 1\}\mathbb{Q}^{*2}) & \times & H^2(G_{\mathbb{Q}}, \{\pm 1\}) \\ c_{B_j} & \leftrightarrow & (\ \overline{[c_{B_j}]} & , & [c_{B_j}]_{\pm}\ ) \end{array}$$
  - $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{-(27j+16)}, \sqrt{-j(27j+16)})/\mathbb{Q}) = \langle \sigma, \tau \rangle$
  - $\overline{[c_{B_j}]} : \sigma \mapsto 3 \ \ \tau \mapsto 2$
  - $[c_{B_j}]_{\pm} = (-(27j+16), 3)_{\mathbb{Q}} \cdot (-j(27j+16), 2)_{\mathbb{Q}} \cdot (2, 3)_{\mathbb{Q}}$

Cálculo de la clase de cohomología

- Hemos calculado $[c_{B_j}] \in H^2(G_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}^*)[2]$
- $$\begin{array}{cccccc} H^2(G_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}^*)[2] & \simeq & \mathrm{Hom}(G_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}^*/\{\pm 1\}\mathbb{Q}^{*2}) & \times & H^2(G_{\mathbb{Q}}, \{\pm 1\}) \\ c_{B_j} & \leftrightarrow & (\ \overline{[c_{B_j}]} & , & [c_{B_j}]_{\pm}\ ) \end{array}$$
  - $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{-(27j+16)}, \sqrt{-j(27j+16)})/\mathbb{Q}) = \langle \sigma, \tau \rangle$
  - $\overline{[c_{B_j}]} : \sigma \mapsto 3 \quad \tau \mapsto 2$
  - $[c_{B_j}]_{\pm} = (-(27j+16), 3)_{\mathbb{Q}} \cdot (-j(27j+16), 2)_{\mathbb{Q}} \cdot (2,3)_{\mathbb{Q}}$
- $A_f \sim_{\bar{\mathbb{Q}}} B_j^n, \quad \varepsilon =$ Nebentypus de f
  $[c_{B_j}]_{\pm}$ ramifica en $p \iff \varepsilon_p(-1) = -1$

Cálculo de la clase de cohomología

- Hemos calculado $[c_{B_j}] \in H^2(G_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}^*)[2]$
- $$\begin{array}{ccccc} H^2(G_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}^*)[2] & \simeq & \mathrm{Hom}(G_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}^*/\{\pm 1\}\mathbb{Q}^{*2}) & \times & H^2(G_{\mathbb{Q}}, \{\pm 1\}) \\ c_{B_j} & \leftrightarrow & (\,\overline{[c_{B_j}]} & , & [c_{B_j}]_{\pm}\,) \end{array}$$
  - $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{-(27j+16)}, \sqrt{-j(27j+16)})/\mathbb{Q}) = \langle \sigma, \tau \rangle$
  - $\overline{[c_{B_j}]} : \sigma \mapsto 3 \quad \tau \mapsto 2$
  - $[c_{B_j}]_{\pm} = (-(27j+16), 3)_{\mathbb{Q}} \cdot (-j(27j+16), 2)_{\mathbb{Q}} \cdot (2,3)_{\mathbb{Q}}$
- $A_f \sim_{\bar{\mathbb{Q}}} B_j^n, \quad \varepsilon =$ Nebentypus de f
  $[c_{B_j}]_{\pm}$ ramifica en $p \iff \varepsilon_p(-1) = -1$

Proposición

Existen superficies B_j tales que la mínima dimensión de una A_f con $A_f \sim_{\bar{\mathbb{Q}}} B_j^n$ es arbitrariamente grande.

Ejemplo concreto: $j = -4/27$

- $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-6}, \sqrt{-3})$. Pero B_j/K no es fuertemente modular.
- $L = K(\sqrt{-1})$ sí contiene un splitting field para $[c_B]$
- $[c_{B_j/L}]$ no es simétrico $\to$ B_j/L no es fuertemente modular
- Consideramos el twist de C_j por $\gamma = \sqrt{6} + \sqrt{18}$:

$$\begin{aligned}\gamma\, Y^2 = {} & \left(-4 + 3\sqrt{-6j}\right) X^6 - 12(27j+16)X^5 - 6(27j+16)\left(28 + 9\sqrt{-6j}\right) X^4 \\ & + 16(27j+16)^2 X^3 + 12(27j+16)2\left(28 - 9\sqrt{-6j}\right) X^2 \\ & - 48(27j+16)^3 X + 8(27j+16)3\left(4 + 3\sqrt{-6j}\right)\end{aligned}$$

- $[c_{B_\gamma/L}]$ sí es simétrico $\to$ B_γ/L es fuertemente modular
- $\gamma \to$ solución de un problema de inmersión en teoría de Galois (el asociado a la parte no simétrica de $[c_{B_j/L}]_\pm$)

Ejemplo concreto: $j = -4/27$

Encontramos $f \in S_2(\Gamma_1(2^4 \cdot 3^4), \chi)$:

$$\begin{aligned} f &= q - \sqrt{3}\, q^5 + 3i\, q^7 - 3\sqrt{3}\, q^{11} + q^{13} - 2i\sqrt{3}\, q^{17} - 6i\, q^{19} \\ &+ 3\sqrt{3}\, q^{23} + 2\, q^{25} - 5\sqrt{3}i\, q^{29} - 3i\, q^{31} + \cdots \end{aligned}$$

y $g \in S_2(\Gamma_1(2^6 \cdot 3^4), \varepsilon)$:

$$\begin{aligned} g &= q - \sqrt{3}\, q^5 + 3i\, q^7 - 3\sqrt{3}\, q^{11} - q^{13} + 2i\sqrt{3}\, q^{17} + 6i\, q^{19} \\ &- 3\sqrt{3}\, q^{23} + 2\, q^{25} - 5\sqrt{3}i\, q^{29} - 3i\, q^{31} + \cdots \end{aligned}$$

tales que

$$L(B_\gamma/L; T) = L(A_f; T)^2 \cdot L(A_g; T)^2$$

$$\mathrm{Res}_{L/\mathbb{Q}} B_\gamma \sim A_f^2 \times A_g^2$$

Variedades abelianas modulares sobre cuerpos de números

Xevi Guitart, Jordi Quer

Departament de Matemàtica Aplicada 2, UPC

Terceras Jornadas de Teoría de Números