
HAUTEUR NORMALISÉE DES VARIÉTÉS TORIQUES PROJECTIVES

par

Patrice PHILIPPON & Martín SOMBRA

Résumé. — Nous présentons une expression explicite pour la hauteur normalisée d'une variété torique projective définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Cette expression se décompose comme somme de contributions locales, chaque terme étant l'intégrale d'une certaine fonction concave et affine par morceaux, définie sur le polytope $Q_{\mathcal{A}}$ classiquement associé à l'action du tore. Plus généralement, nous obtenons une expression explicite pour la multihauteur normalisée d'un tore relative à plusieurs plongements monomiaux.

L'ensemble de fonctions introduit se comporte comme un analogue arithmétique du polytope $Q_{\mathcal{A}}$. En plus des formules pour les hauteur et multihauteurs, nous montrons que cet objet se comporte de manière naturelle par rapport à plusieurs constructions standard: décomposition en orbites, formation de joints, produits de Segre et plongements de Veronese.

La démonstration suit une démarche indirecte: à la place de la définition de la hauteur normalisée, on s'appuie sur le calcul d'une fonction de Hilbert arithmétique appropriée.

Abstract. — **Normalized height of projective toric varieties.** We present an explicit expression for the normalized height of a projective toric variety defined over $\overline{\mathbb{Q}}$. This expression decomposes as a sum of local contributions, each term being the integral of a certain function, concave and piecewise linear-affine, defined on the polytope $Q_{\mathcal{A}}$ classically associated with the torus action. More generally, we obtain an explicit expression for the normalized multiheight of a torus with respect to several monomial embeddings.

The set of functions introduced behaves as an arithmetic analog of the polytope $Q_{\mathcal{A}}$ classically associated with the torus action. Besides the formulæ for the height and multiheight, we show that this object behaves in a natural way with respect to several standard constructions: decomposition into orbits, joins, Segre products and Veronese embeddings.

The proof follows an indirect way: instead of the definition of the normalized height, we rely on the computation of an appropriate arithmetic Hilbert function.

Introduction et résultats

La hauteur d'une sous-variété $X \subset \mathbb{P}^N(\overline{\mathbb{Q}})$ est une mesure de la longueur binaire des coefficients d'une représentation de X , par exemple *via* sa forme de Chow. Cet invariant numérique est donc pertinent en géométrie algébrique et en algèbre commutative effectives, où il joue un rôle important, notamment dans le cadre du Nullstellensatz effectif et de la résolution de systèmes d'équations polynomiales, *voir* par exemple [KPS01], [GHP97].

Classification mathématique par sujets (2000). — Primaire: 11G50; Secondaire: 14G40, 14M25.

Mots clefs. — Variété torique, hauteur normalisée, multihauteurs, fonction de Hilbert arithmétique, poids de Chow, volume mixte.

P. Philippon a été partiellement financé par une allocation de recherche de la *Fondation Alexander von Humboldt* pendant la réalisation de ce travail.

M. Sombra a été partiellement financé par une bourse post-doctorale Marie Curie du programme européen *Improving Human Research Potential and the Socio-economic Knowledge Base*, contrat n° HPMFCT-2000-00709, et par le programme Ramón y Cajal du Ministerio de Educación y Ciencia, Espagne.

La notion de hauteur de sous-variétés généralise celle appliquée aux points par Siegel, Northcott et Weil entre autres, pour étudier des questions d'approximation diophantienne. En dimension supérieure, cette notion est un analogue arithmétique du degré, ou plus précisément d'un bi-degré d'une sous-variété de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^N$. Par exemple, elle vérifie des analogues du théorème de Bézout [BGS94], [Phi95] et de la formule de Hilbert-Samuel [GS88], [Zha95b], [AB95].

Il existe en fait diverses notions de hauteur, certaines présentant des propriétés d'invariance par rapport à des opérations géométriques significatives. En particulier, l'espace projectif peut être vu comme une compactification équivariante du tore $(\mathbb{P}^N)^\circ := \mathbb{P}^N \setminus \{(x_0 : \cdots : x_N) : x_0 \cdots x_N = 0\}$, la structure de groupe de $(\mathbb{P}^N)^\circ$ permettant de définir une notion de hauteur pour les sous-variétés de \mathbb{P}^N plus canonique que les autres, appelée *hauteur normalisée*. Cette notion joue un rôle central dans l'approximation diophantienne sur les tores, et tout particulièrement dans les problèmes de Bogomolov et de Lehmer généralisés, voir [DP99], [AD03] et leurs références, voir également [Dav03] pour un aperçu historique.

Suivant [DP99], la hauteur normalisée peut se définir par un procédé «à la Tate». De façon précise, pour $k \in \mathbb{N}$ on pose $[k] : \mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{P}^N$, $(x_0 : \cdots : x_N) \mapsto (x_0^k : \cdots : x_N^k)$ l'application puissance k -ième; restreinte au tore $(\mathbb{P}^N)^\circ$ c'est l'application de multiplication par k . La hauteur normalisée d'une sous-variété (réduite et irréductible) $X \subset \mathbb{P}^N$ est par définition

$$\widehat{h}(X) := \deg(X) \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h([k]X)}{k \deg([k]X)} \in \mathbb{R}_+,$$

où \deg et h désignent le degré et la hauteur projective, voir [DP99, § 2] ou le paragraphe I.2 ci-dessous. Cette hauteur peut aussi se définir *via* la théorie d'Arakelov, comme la hauteur de la clôture de Zariski de X dans $\mathbb{P}_{\mathcal{O}_K}^N$ (l'espace projectif de dimension N sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_K)$) relative au fibré en droites universel $\mathcal{O}(1)$ muni d'une métrique hermitienne canonique [Zha95b], [Mai00].

Contrairement au degré, il y a peu de cas où l'on sait calculer explicitement la hauteur d'une variété, qui se révèle alors être toujours un nombre remarquable. Pour les hypersurfaces, la hauteur normalisée s'écrit comme somme de contributions locales aux places archimédiennes, dont chacune est la mesure de Mahler locale d'une équation de définition de X . Les valeurs des mesures de Mahler sont très étudiées, en particulier à cause de leurs connexions avec les valeurs spéciales des fonctions L , voir [Boy98] et ses références. Une autre situation où la hauteur normalisée est connue est celle des *variétés de torsion*, c'est-à-dire les sous-variétés telles que $X^\circ := X \cap (\mathbb{P}^N)^\circ$ soit le translaté d'un sous-groupe par un point de torsion; dans ce cas la hauteur normalisée est nulle, et c'est le seul cas où cela se produit.

Pour la hauteur dite *projective*, le calcul d'exemples a été surtout développé pour les espaces homogènes sous un groupe de Chevalley [KK02], et de façon plus explicite pour les SL_N -grasmanniennes et d'autres variétés du même type [Tam00]. En dehors de ces cas, il y a quelques résultats pour certaines hypersurfaces, voir par exemple [BY98].

Les variétés toriques sont l'une des principales sources d'exemples en géométrie algébrique. Dans le présent texte, nous étudierons la hauteur normalisée des *variétés toriques projectives*, définies comme les sous-variétés de \mathbb{P}^N stables par rapport à une action diagonale d'un tore dont une orbite est dense. À une telle variété $X_{\mathcal{A},\alpha}$ (où plutôt à l'action du tore et au choix d'un point dans l'orbite principale) nous associons un ensemble de fonctions concaves et affines par morceaux

$$\Theta_{\mathcal{A},\alpha} := (\vartheta_{\mathcal{A},\tau_{\alpha v}} : Q_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbb{R})_{v \in M_K}$$

indexé par les places d'un corps de nombres approprié, chaque fonction $\vartheta_{\mathcal{A},\tau_{\alpha v}}$ étant définie sur le polytope $Q_{\mathcal{A}} \subset \mathbb{R}^n$ classiquement associé à l'action du tore, au moyen du vecteur poids $\tau_{\alpha v} \in \mathbb{R}^{N+1}$, voir ci-dessous pour les détails.

Notre résultat principal (théorème 0.1 ci-dessous) affirme que la hauteur $\widehat{h}(X_{\mathcal{A},\alpha})$ s'exprime comme somme de contributions locales, dont chaque terme est l'intégrale de la fonction correspondante. De plus, cette expression s'étend en une expression explicite pour la multihauteur normalisée d'un tore relative à plusieurs plongements monomiaux.

L'ensemble de fonctions $\Theta_{\mathcal{A},\alpha}$ se comporte comme un analogue arithmétique du polytope $Q_{\mathcal{A}}$. En plus des formules pour la hauteur et multihauteur, nous montrons que cet objet se comporte de manière naturelle par rapport à d'autres constructions standard: décomposition en orbites, formation de joints, produits de Segre et plongements de Veronese.

Soit $\mathbb{T}^n := (\overline{\mathbb{Q}}^\times)^n$ le tore algébrique (déployé) et \mathbb{P}^N l'espace projectif sur $\overline{\mathbb{Q}}$, de dimensions n et N respectivement. Soit $\mathcal{A} = (a_0, \dots, a_N) \in (\mathbb{Z}^n)^{N+1}$ une suite de $N + 1$ vecteurs de \mathbb{Z}^n , on considère alors l'action diagonale de \mathbb{T}^n sur \mathbb{P}^N

$$*_\mathcal{A} : \mathbb{T}^n \times \mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{P}^N \quad , \quad (s, x) \mapsto (s^{a_0} x_0 : \dots : s^{a_N} x_N) .$$

On s'intéresse à l'adhérence de Zariski des orbites de cette action; pour un point $\alpha = (\alpha_0 : \dots : \alpha_N) \in \mathbb{P}^N$ on pose

$$X_{\mathcal{A},\alpha} := \overline{\mathbb{T}^n *_\mathcal{A} \alpha} \subset \mathbb{P}^N$$

la *variété torique projective* associée au couple (\mathcal{A}, α) . Autrement dit, $X_{\mathcal{A},\alpha}$ est l'adhérence de Zariski de l'image de l'*application monomiale*

$$\varphi_{\mathcal{A},\alpha} := *_\mathcal{A}|_\alpha : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{P}^N \quad , \quad s \mapsto (\alpha_0 s^{a_0} : \dots : \alpha_N s^{a_N}) .$$

C'est donc une variété torique projective au sens de [GKZ94], c.-à-d. une sous-variété de \mathbb{P}^N stable par rapport à l'action d'un tore \mathbb{T}^n , avec une orbite dense $X_{\mathcal{A},\alpha}^\circ := \mathbb{T}^n *_\mathcal{A} \alpha$.

Pour simplifier l'exposition, on suppose $\alpha \in (\mathbb{P}^N)^\circ$ dans le reste de cette introduction, et on fixe désormais un système de coordonnées projectives de α dans $(K^\times)^{N+1}$ où K est un corps de nombres approprié. Soit $L_{\mathcal{A}} \subset \mathbb{Z}^n$ le sous-module engendré par les différences des vecteurs a_0, \dots, a_N . On supposera aussi $L_{\mathcal{A}} = \mathbb{Z}^n$, ce qu'en particulier implique $\dim(X_{\mathcal{A}}) = n$. Le cas général se ramène à ce cas particulier, comme on le montre au paragraphe I.1.

On notera $X_{\mathcal{A}}$ la variété torique associée à $\mathcal{A} \in (\mathbb{Z}^n)^{N+1}$ et $(1, \dots, 1) \in (\mathbb{Q}^\times)^{N+1}$. Dans ce cas, l'orbite principale $X_{\mathcal{A}}^\circ$ est un sous-groupe du tore $(\mathbb{P}^N)^\circ$; d'ailleurs tous les sous-groupes algébriques connexes de $(\mathbb{P}^N)^\circ$ sont de cette forme. Dans le cas général

$$X_{\mathcal{A},\alpha}^\circ = \alpha \cdot X_{\mathcal{A}}^\circ$$

où \cdot désigne la multiplication dans $(\mathbb{P}^N)^\circ$. Autrement dit, l'orbite principale de $X_{\mathcal{A},\alpha}$ est le translaté d'un sous-groupe.

Suivant la philosophie générale de la théorie des variétés toriques, la plupart des propriétés géométriques de ces variétés peuvent se traduire en des énoncés combinatoires sur les vecteurs $a_0, \dots, a_N \in \mathbb{Z}^n$ définissant l'action. En ce qui concerne la théorie de l'intersection géométrique de ces variétés, le résultat le plus fondamental est que le degré s'identifie au volume n -dimensionnel de l'enveloppe convexe $Q_{\mathcal{A}} := \text{Conv}(a_0, \dots, a_N) \subset \mathbb{R}^n$, voir [Ful93, p. 111] ou [GKZ94, § I.6, Thm. 2.3]:

$$\deg(X_{\mathcal{A}}) = n! \text{Vol}_n(Q_{\mathcal{A}}) .$$

Le but principal du présent texte est d'établir un analogue arithmétique de ce résultat. Soit M_K l'ensemble des places du corps K , pour chaque $v \in M_K$ on considère le vecteur

$$\tau_{\alpha v} := (\log |\alpha_0|_v, \dots, \log |\alpha_N|_v) \in \mathbb{R}^{N+1}$$

et le polytope

$$Q_{\mathcal{A},\tau_{\alpha v}} := \text{Conv}((a_0, \log |\alpha_0|_v), \dots, (a_N, \log |\alpha_N|_v)) \subset \mathbb{R}^{n+1} ,$$

dont la *toiture* au-dessus de $Q_{\mathcal{A}}$ (c.-à-d. l'enveloppe supérieure) s'envoie bijectivement sur $Q_{\mathcal{A}}$ par la projection standard $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$. On pose alors

$$\vartheta_{\mathcal{A},\tau_{\alpha v}} : Q_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto \max \{ y \in \mathbb{R} : (x, y) \in Q_{\mathcal{A},\tau_{\alpha v}} \}$$

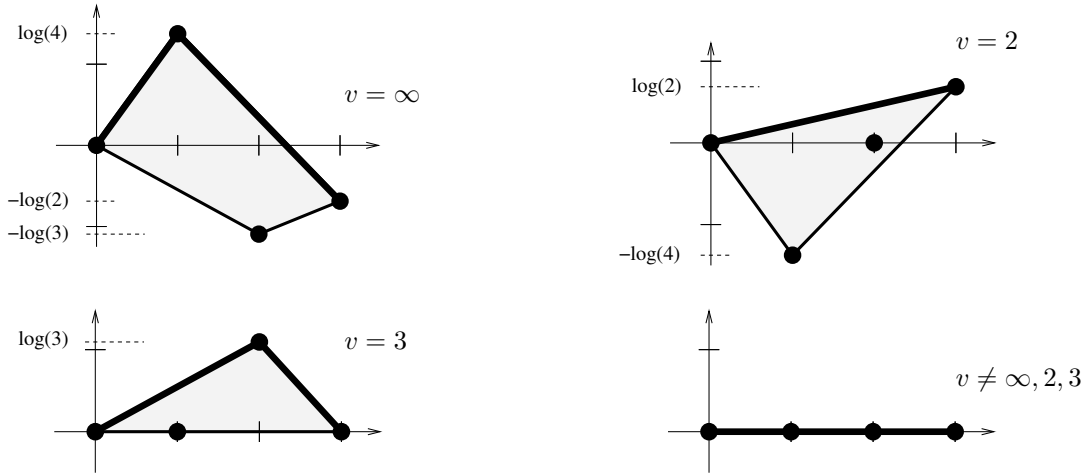
la paramétrisation de cette toiture; c'est une fonction *concave* et *affine par morceaux*.

Théorème 0.1. — Soit $\mathcal{A} \in (\mathbb{Z}^n)^{N+1}$ tel que $L_{\mathcal{A}} = \mathbb{Z}^n$ et $\alpha \in (K^\times)^{N+1}$, alors

$$\widehat{h}(X_{\mathcal{A},\alpha}) = (n+1)! \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \int_{Q_{\mathcal{A}}} \vartheta_{\mathcal{A},\tau_{\alpha v}} dx_1 \cdots dx_n .$$

Notons que $\tau_{\alpha v} = 0$ pour presque tout v , donc cette somme ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls. Dans les cas des points ($n = 0$) la formule se réduit à la définition usuelle de la hauteur normalisée (hauteur de Weil) d'un point de \mathbb{P}^N .

Illustrons cette formule sur un exemple: considérons la courbe cubique $C \subset \mathbb{P}^3$, adhérence de l'image de l'application $\mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$, $s \mapsto (1 : 4s : \frac{1}{3}s^2 : \frac{1}{2}s^3)$. Les figures suivantes montrent les polytopes associés et leurs toitures, pour chaque place $v \in M_{\mathbb{Q}}$:



Ainsi $\vartheta_v \equiv 0$ pour $v \neq \infty, 2, 3$, d'où

$$\widehat{h}(C) = 2! \left(\int_0^3 \vartheta_\infty dx + \int_0^3 \vartheta_2 dx + \int_0^3 \vartheta_3 dx \right) = 7 \log(2) + 3 \log(3) .$$

Nous remarquons qu'en dehors des cas évidents des points, des hypersurfaces binomiales et des variétés de torsion, aucun calcul de ce type n'était précédemment connu. Également, ce résultat est bien plus qu'une simple formule calculant $\widehat{h}(X_{\mathcal{A},\alpha})$. L'ensemble des fonctions ainsi construit

$$\Theta_{\mathcal{A},\alpha} := (\vartheta_{\mathcal{A},\tau_{\alpha v}} : Q_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbb{R})_{v \in M_K}$$

se comporte comme un analogue arithmétique du polytope $Q_{\mathcal{A}}$. En plus de satisfaire à la formule pour la hauteur, cet objet est compatible avec la décomposition en orbites, voir § IV.1. Nous montrons aussi qu'il fournit une traduction combinatoire naturelle des opérations simples telles que la formation de joints, produits de Segre et plongements de Veronese, voir § IV.4.

Comme conséquence immédiate de ce résultat, on vérifie $\widehat{h}(X_{\mathcal{A},\alpha}) \in \log(\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}_+^\times)$; on en déduit que le nombre $\widehat{h}(X_{\mathcal{A},\alpha})$ est *transcendant* dès qu'il est non nul, grâce au théorème de Baker (voir par exemple [Wal00, Thm. 1.6]). D'après le théorème de Zhang [Zha95a] (c.-à-d. l'analogue du problème de Bogomolov sur \mathbb{T}^N) ceci équivaut à ce que $X_{\mathcal{A},\alpha}$ ne soit pas une sous-variété de torsion (voir la remarque III.7 du présent texte); ainsi on a

Corollaire 0.2. — Soit $\mathcal{A} \in (\mathbb{Z}^n)^{N+1}$ et $\alpha \in (K^\times)^{N+1}$ tel que que $X_{\mathcal{A},\alpha}$ n'est pas une variété de torsion, alors $\widehat{h}(X_{\mathcal{A},\alpha}) \notin \overline{\mathbb{Q}}$.

Un couple (\mathcal{A}, α) est dit *symétrique* si la variété $X_{\mathcal{A},\alpha}$ est symétrique par rapport à l'inversion $[-1] : (\mathbb{P}^N)^\circ \rightarrow (\mathbb{P}^N)^\circ$, $(x_0 : \cdots : x_N) \rightarrow (x_0^{-1} : \cdots : x_N^{-1})$, c.-à-d. si $X_{\mathcal{A},\alpha^{-1}} = X_{\mathcal{A},\alpha}$. Dans ce cas,

le résultat peut se reformuler en une expression dont les termes locaux sont des volumes de polytopes (Corollaire III.9)

$$\widehat{h}(X_{\mathcal{A},\alpha}) = \frac{(n+1)!}{2} \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \text{Vol}_{n+1}(Q_{\mathcal{A},\tau_{\alpha v}}) .$$

Plus généralement, il est possible d'attacher à une variété une *multihauteur normalisée* relative à plusieurs plongements projectifs. Soient

$$\mathcal{A}_i \in (\mathbb{Z}^n)^{N_i+1} , \quad \alpha_i \in (K^\times)^{N_i+1} ,$$

tels que $L_{\mathcal{A}_i} = \mathbb{Z}^n$ pour $i = 0, \dots, n$. Chaque couple $(\mathcal{A}_i, \alpha_i)$ définit une application monomiale $\varphi_i : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{P}^{N_i}$ et on note

$$\widehat{h}((\mathcal{A}_0, \alpha_0), \dots, (\mathcal{A}_n, \alpha_n); \mathbb{T}^n) \in \mathbb{R}_+$$

la multihauteur normalisée du tore \mathbb{T}^n relative à ces plongements; la hauteur $\widehat{h}(X_{\mathcal{A},\alpha})$ correspond au cas $(\mathcal{A}_i, \alpha_i) = (\mathcal{A}, \alpha)$ pour tout i . Nous donnons aussi une expression explicite pour cette multihauteur. Pour cela, nous introduisons la notion d'*intégrale mixte* (ou *multi-intégrale*) $\text{MI}(f_0, \dots, f_n)$ d'une famille de fonctions concaves $f_i : Q_i \rightarrow \mathbb{R}$ définies sur des ensembles convexes compacts $Q_i \subset \mathbb{R}^n$. Ceci généralise l'intégrale d'une fonction concave, on renvoie au paragraphe IV.3 pour sa définition et propriétés de base.

Pour $i = 0, \dots, n$ et $v \in M_K$ on désigne par $\vartheta_{i,v} : Q_{\mathcal{A}_i} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction paramétrant la toiture du polytope $Q_{i,v} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ au-dessus de $Q_{\mathcal{A}_i}$ associé au poids $\tau_{\alpha_i v} := (\log |\alpha_{i0}|_v, \dots, \log |\alpha_{i N_i}|_v)$.

Théorème 0.3. — Soit $\mathcal{A}_0 \in (\mathbb{Z}^n)^{N_0+1}, \dots, \mathcal{A}_n \in (\mathbb{Z}^n)^{N_n+1}$ tels que $L_{\mathcal{A}_i} = \mathbb{Z}^n$ pour $i = 0, \dots, n$ et $\alpha_0 \in (K^\times)^{N_0+1}, \dots, \alpha_n \in (K^\times)^{N_n+1}$, alors

$$\widehat{h}((\mathcal{A}_0, \alpha_0), \dots, (\mathcal{A}_n, \alpha_n); \mathbb{T}^n) = \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \text{MI}(\vartheta_{0,v}, \dots, \vartheta_{n,v}) .$$

Ceci est un analogue arithmétique de l'expression pour le multidegré du tore comme un *volume mixte* (ou *multi-volume*) $\text{deg}_{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n}(\mathbb{T}^n) = \text{MV}(Q_{\mathcal{A}_1}, \dots, Q_{\mathcal{A}_n})$ [Ful93, p. 116].

La démonstration du théorème 0.1 suit une démarche indirecte: au lieu d'utiliser la définition de la hauteur normalisée, on s'appuie sur le calcul d'une fonction de Hilbert arithmétique appropriée. L'un des principaux obstacles à surmonter dans une telle approche est de trouver une fonction de type Hilbert dont l'expression asymptotique soit liée à la hauteur normalisée; les différentes variantes étudiées jusqu'à présent sont liées à la hauteur projective [GS88], [Zha95a], [AB95], [Ran01].

Soit $X \subset \mathbb{P}^N(K)$ une K -sous-variété de dimension n et $I(X) \subset K[x_0, \dots, x_N]$ son idéal homogène de définition. Nous proposons ici une fonction de Hilbert arithmétique $\mathcal{H}_{\text{norm}}(X; \cdot)$ associant à un entier D donné, la hauteur de Schmidt du K -espace linéaire $I(X)_D \subset K[x_0, \dots, x_N]_D$. Se pose alors la question du comportement asymptotique de cette fonction, à laquelle nous apportons une réponse pour le cas des variétés toriques:

Proposition 0.4. — Soit $\mathcal{A} \in (\mathbb{Z}^n)^{N+1}$ tel que $L_{\mathcal{A}} = \mathbb{Z}^n$ et $\alpha \in (\overline{\mathbb{Q}}^\times)^{N+1}$, alors

$$\mathcal{H}_{\text{norm}}(X_{\mathcal{A},\alpha}; D) = \frac{\widehat{h}(X_{\mathcal{A},\alpha})}{(n+1)!} D^{n+1} + O(D^n)$$

lorsque D tend vers ∞ .

On remarquera le terme d'erreur en $O(D^n)$, contrastant avec les résultats habituels en $o(D^{n+1})$ (ou $O(D^n \log(D))$) pour les fonctions de Hilbert-Samuel arithmétiques, ce qui reflète un certain comportement géométrique de la hauteur normalisée dans le cas torique.

Par analogie avec les fonctions de Hilbert arithmétiques connues, on pourrait conjecturer qu'un tel résultat reste valable pour une sous-variété quelconque. Il serait intéressant d'étendre dans ce sens la proposition 0.4, malheureusement notre approche reste confinée au cas des variétés toriques.

Pour établir cette proposition, notre démarche consiste à étudier l'asymptotique de la fonction $\mathcal{H}_{\text{norm}}(X_{\mathcal{A},\alpha}; D)$, d'où nous déduisons une expression explicite du coefficient dominant; puis nous identifions ce coefficient avec la hauteur normalisée de $X_{\mathcal{A},\alpha}$. Tout d'abord on montre que cette fonction s'écrit comme somme de contributions locales, dont chaque terme s'identifie à un certain *poids de Hilbert*: on a (Proposition III.5)

$$\mathcal{H}_{\text{norm}}(X_{\mathcal{A},\alpha}; D) = \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} s_{\tau_{\alpha v}}(X_{\mathcal{A}}; D) .$$

Grâce à un résultat de D. Mumford [Mum77] on sait que chaque poids de Hilbert satisfait à une formule asymptotique dont le terme dominant est $\frac{D^{n+1}}{(n+1)!}$ fois le *poids de Chow* $e_{\tau_{\alpha v}}(X_{\mathcal{A}})$ associé. On en déduit $\mathcal{H}_{\text{norm}}(X_{\mathcal{A},\alpha}; D) = \frac{c(X_{\mathcal{A},\alpha})}{(n+1)!} D^{n+1} + O(D^n)$ avec

$$c(X_{\mathcal{A},\alpha}) := \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} e_{\tau_{\alpha v}}(X_{\mathcal{A}}) .$$

Nous démontrons en même temps une expression intégrale explicite pour les poids de Chow d'une variété torique projective (Proposition III.1).

L'expression obtenue pour $c(X_{\mathcal{A},\alpha})$ montre que le quotient $\frac{c(X_{\mathcal{A},\alpha})}{\deg(X_{\mathcal{A},\alpha})}$ est *linéaire* par rapport aux applications puissances $[k] : \mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{P}^N$. En outre, on montre que la constante $c(X_{\mathcal{A},\alpha})$ se compare à la hauteur projective $h(X_{\mathcal{A},\alpha})$, en s'appuyant fortement sur un résultat de H. Randriambololona [Ran01, Thm. A.2.2]. Ces deux conditions suffisent à montrer l'identité $c(X_{\mathcal{A},\alpha}) = \widehat{h}(X_{\mathcal{A},\alpha})$, ce qui achève d'établir à la fois le théorème 0.1 et la proposition 0.4 ci-dessus.

Comme sous-produit de notre démonstration nous obtenons l'identité attrayante

$$\widehat{h}(X_{\mathcal{A},\alpha}) = \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} e_{\tau_{\alpha v}}(X_{\mathcal{A}}) .$$

La notion de poids de Chow a été introduite dans le contexte de la théorie géométrique des invariants [Mum77]. Les travaux récents de R.G. Ferretti et de J-H. Evertse et Ferretti la font également intervenir de manière cruciale dans l'approximation diophantienne sur les variétés projectives [Fer03], [EF02]. L'identité ci-dessus fait à nouveau apparaître le poids de Chow en géométrie arithmétique, mais dans un contexte différent.

La hauteur normalisée est un invariant des sous-variétés du tore particulièrement intéressant. Dans [PS04] nous explorons les conséquences diophantiques des résultats obtenus; en particulier on y démontre l'optimalité du théorème des minimums successifs algébriques de S.-W. Zhang et on obtient un théorème de type Bézout exact pour le poids de Chow. Une autre application envisagée est l'obtention d'un théorème de type Bernstein-Koushniренко arithmétique pour la hauteur des variétés définies par équations à support restreint. Les résultats du présent article et de [PS04] sont annoncés dans une Note parue dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris [PS05].

Voyons maintenant l'organisation du présent texte. Dans la section I on passe en revue quelques généralités sur les variétés toriques projectives et sur les hauteurs et multihauteurs des sous-variétés. Dans la section II nous introduisons les fonctions de Hilbert arithmétiques et établissons leurs propriétés principales. Dans la section III on explicite les poids de Hilbert et de Chow d'une variété torique, puis on démontre l'expression asymptotique pour la fonction de Hilbert arithmétique d'une variété torique, dont le terme principal s'exprime comme somme des poids de Chow. Dans la section IV nous étendons nos résultats au calcul des multihauteurs et des multipoids de Chow; nous étudions aussi le comportement de la famille de fonctions $\Theta_{\mathcal{A},\alpha}$ introduite, par rapport à la décomposition en orbites sous l'action $*_{\mathcal{A}}$, formation de joints, produits de Segre et plongements de Veronese.

Remerciements. — Nous remercions vivement l’arbitre pour le J. Inst. Math. Jussieu, de ses commentaires et remarques qui nous ont permis d’améliorer la présentation de ce texte. Nous remercions également Hugues Randriambololona pour nous avoir expliqué ses résultats sur les fonctions de Hilbert arithmétiques.

Plan de l’article

Introduction et résultats	1
I. Généralités	7
I.1. Variétés toriques projectives	7
I.2. Hauteur et multihauteur des variétés projectives	8
II. Fonctions de Hilbert arithmétiques	13
III. Hauteur et fonction de Hilbert arithmétique des variétés toriques	19
III.1. Poids de Hilbert et de Chow	19
III.2. Démonstration du théorème 0.1	23
IV. Sur quelques constructions standard	26
IV.1. Décomposition en orbites	26
IV.2. Multipoids de Chow	26
IV.3. Multihauteurs des plongements monomiaux	28
IV.4. Joints, plongements de Segre et de Veronese	32
Références	34

I. Généralités

On désigne par \mathbb{Q} le corps des nombres rationnels, \mathbb{Z} l’anneau des entiers rationnels, K un corps de nombres et \mathcal{O}_K son anneau d’entiers. On note \mathbb{R} le corps des nombres réels et \mathbb{C} le corps des nombres complexes; on pose \mathbb{R}_+ et \mathbb{R}_+^\times les ensembles des nombres réels positifs ou nuls, et positifs, respectivement. On note \mathbb{N} et \mathbb{N}^\times les entiers naturels avec et sans 0, respectivement. Pour $N, D \in \mathbb{N}$ on pose $\mathbb{N}_D^{N+1} := \{a \in \mathbb{N}^{N+1} : a_0 + \dots + a_N = D\}$. On note encore \mathbb{K} pour un corps arbitraire, algébriquement clos.

Pour chaque premier rationnel p on note $|\cdot|_p$ la valeur absolue p -adique sur \mathbb{Q} telle que $|p|_p = p^{-1}$; on note aussi $|\cdot|_\infty$ ou simplement $|\cdot|$ la valeur absolue standard. Celles-ci forment un ensemble complet de valeurs absolues sur \mathbb{Q} : on identifie l’ensemble $M_{\mathbb{Q}}$ de ces valeurs absolues à l’ensemble $\{\infty, p : p \text{ premier}\}$. Plus généralement, on désigne par M_K l’ensemble des valeurs absolues de K étendant les valeurs absolues de $M_{\mathbb{Q}}$, et on note M_K^∞ le sous-ensemble de M_K des valeurs absolues archimédiennes.

On note \mathbb{T}^n le tore algébrique et \mathbb{P}^N l’espace projectif sur $\overline{\mathbb{Q}}$ ou sur \mathbb{K} , suivant le contexte. Une variété est toujours supposée réduite et irréductible.

I.1. Variétés toriques projectives. — Dans ce paragraphe on donne quelques compléments d’information concernant les variétés toriques, nos références sont [GKZ94], [Ful93].

On se place sur un corps de base \mathbb{K} algébriquement clos.

Soit $n, N \in \mathbb{N}$ des entiers, $\mathcal{A} = (a_0, \dots, a_N) \in (\mathbb{Z}^n)^{N+1}$, $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{P}^N$; et désignons par $X_{\mathcal{A}, \alpha} \subset \mathbb{P}^N := \mathbb{P}^N(\mathbb{K})$ la variété torique projective et $Q_{\mathcal{A}} \subset \mathbb{R}^n$ le polytope associés, voir l’introduction.

Lorsque le point α est contenu dans un sous-espace standard $E \cong \mathbb{P}^M$ de \mathbb{P}^N , la sous-variété $X_{\mathcal{A}, \alpha}$ toute entière reste dans cet espace, puisque l’action $*_{\mathcal{A}}$ est diagonale. Quitte à se restreindre à un sous-espace standard, on peut donc supposer sans perte de généralité $\alpha \in (\mathbb{P}^N)^\circ$ et on fixe désormais un système de coordonnées projectives de α dans $(\mathbb{K}^\times)^{N+1}$.

Le couple (\mathcal{A}, α) peut s'interpréter comme une suite finie de monômes $\alpha_0 s^{a_0}, \dots, \alpha_N s^{a_N}$ de l'anneau des polynômes de Laurent $\mathbb{K}[s_1^{\pm 1}, \dots, s_n^{\pm 1}]$, on dit alors que les a_i sont ses *exposants* et les α_i ses *coefficients*.

Posons $\text{Expo}(\mathcal{A}) := \{a_{i_0}, \dots, a_{i_M}\} \subset \mathbb{Z}^n$ l'ensemble des exposants *distincts* dans \mathcal{A} , alors $X_{\mathcal{A}, \alpha}$ et $X_{\text{Expo}(\mathcal{A})}$ sont linéairement isomorphes par l'application rationnelle

$$\mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{P}^M, \quad (x_0 : \dots : x_N) \mapsto (\alpha_{i_0}^{-1} x_{i_0} : \dots : \alpha_{i_M}^{-1} x_{i_M}),$$

et donc pour leurs propriétés *géométriques* on peut toujours se ramener au cas classique où les a_i sont tous distincts et $\alpha_i = 1$ pour tout i . Soit $L_{\mathcal{A}} \subset \mathbb{Z}^n$ le sous-module engendré par les différences des vecteurs a_0, \dots, a_N ; en particulier on trouve $\dim(X_{\mathcal{A}, \alpha}) = \dim(L_{\mathcal{A}})$ car $L_{\mathcal{A}} = L_{\text{Expo}(\mathcal{A})}$.

Le sous-module $L_{\mathcal{A}}$ est un réseau de l'espace linéaire engendré $L_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$; on considère la forme volume $\mu_{\mathcal{A}}$ sur cet espace linéaire, invariante par translations et normalisée de sorte que

$$\mu_{\mathcal{A}}(L_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} / L_{\mathcal{A}}) = 1,$$

autrement dit, de sorte que le volume d'un domaine fondamental soit 1. Posons $r := \dim(L_{\mathcal{A}})$, le degré de $X_{\mathcal{A}, \alpha}$ s'écrit alors comme $r!$ fois le volume du polytope associé [Ful93, p. 111], [GKZ94, § I.6, Thm. 2.3]

$$\deg(X_{\mathcal{A}, \alpha}) = r! \mu_{\mathcal{A}}(Q_{\mathcal{A}}).$$

Soit maintenant $\eta : \mathbb{Z}^r \hookrightarrow \mathbb{Z}^n$ une application linéaire injective telle que $\eta(\mathbb{Z}^r) = L_{\mathcal{A}}$ et posons $b_i := \eta^{-1}(a_i) \in \mathbb{Z}^r$ puis $\mathcal{B} := (b_0, \dots, b_N) \in (\mathbb{Z}^r)^{N+1}$. Alors $X_{\mathcal{B}, \alpha} = X_{\mathcal{A}, \alpha}$ [GKZ94, Ch. 5, Prop. 1.2], et ainsi on pourra supposer sans perte de généralité $L_{\mathcal{A}} = \mathbb{Z}^n$. Dans cette situation, la forme volume $\mu_{\mathcal{A}}$ coïncide avec la forme volume euclidienne Vol_n de \mathbb{R}^n et en particulier

$$\dim(X_{\mathcal{A}, \alpha}) = n, \quad \deg(X_{\mathcal{A}, \alpha}) = n! \text{Vol}_n(Q_{\mathcal{A}}).$$

De plus, notons que sous l'hypothèse $L_{\mathcal{A}} = \mathbb{Z}^n$ l'application $\varphi_{\mathcal{A}, \alpha} : \mathbb{T}^n \rightarrow X_{\mathcal{A}, \alpha}^{\circ}$ est un isomorphisme géométrique, et en particulier $X_{\mathcal{A}, \alpha}$ est une variété rationnelle: notons e_1, \dots, e_n la base standard de \mathbb{R}^n et posons

$$e_i = \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} (a_j - a_0)$$

avec $\lambda_{ij} \in \mathbb{Z}$, l'inverse $\varphi_{\mathcal{A}, \alpha}^{-1} : X_{\mathcal{A}, \alpha}^{\circ} \rightarrow \mathbb{T}^n$ est alors $x \mapsto \left(\prod_{j=1}^N \left(\frac{\alpha_0 x_j}{\alpha_j x_0} \right)^{\lambda_{ij}} : 1 \leq i \leq n \right)$.

Pour $c \in \mathbb{Z}^n$ et $\gamma \in \mathbb{K}^{\times}$ on considère les translations $c + \mathcal{A} := (c + a_0, \dots, c + a_N)$ et $\gamma \cdot \alpha := (\gamma \alpha_0, \dots, \gamma \alpha_N)$. On vérifie immédiatement que les sous-variétés torique $X_{\mathcal{A}, \alpha}$ et $X_{c + \mathcal{A}, \gamma \cdot \alpha}$ coïncident; on pourra donc supposer, à nouveau sans perte de généralité, $a_0 = 0$ et $\alpha_0 = 1$.

La sous-variété $X_{\mathcal{A}, \alpha}$ est définie par des équations *binomiales*. De fait, la correspondance $X \mapsto I(X)$ est une bijection entre l'ensemble des sous-variétés toriques de $\mathbb{P}^N(\mathbb{K})$ et celui des idéaux binomiaux premiers et homogènes de $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_N]$, voir [ES96].

I.2. Hauteur et multahauteur des variétés projectives. — Dans ce paragraphe nous rappelons les définitions et propriétés de base des hauteurs et multahauteurs projectives et normalisées, on renvoie à [DP99, § 2] pour la plupart des détails.

On prend maintenant $\overline{\mathbb{Q}}$ comme corps de base. Soit $X \subset \mathbb{P}^N = \mathbb{P}^N(\overline{\mathbb{Q}})$ une sous-variété définie sur le corps de nombres K et de dimension n ; on rappelle d'abord la notion de hauteur projective de X .

Soit $f = \sum_a f_a U^a \in K[U_0, \dots, U_n]$ un polynôme en $n+1$ groupes U_i de N_i+1 variables chacun. Soit $S_{N_i+1} := \{(z_0, \dots, z_{N_i}) \in \mathbb{C}^{N_i+1} : |z_0|^2 + \dots + |z_{N_i}|^2 = 1\}$ la sphère unité de \mathbb{C}^{N_i+1} , équipée

de la mesure μ_{N_i+1} de masse totale 1 invariante par rapport au groupe unitaire $U(N_i + 1)$. Pour une place archimédienne $v \in M_K^\infty$, la $S_{N_0+1} \times \cdots \times S_{N_n+1}$ -mesure de f par rapport à v est

$$m_v(f) := \int_{S_{N_0+1} \times \cdots \times S_{N_n+1}} \log |f|_v \mu_{N_0+1} \times \cdots \times \mu_{N_n+1} .$$

Pour une place ultramétrique $v \in M_K \setminus M_K^\infty$ on note $|f|_v := \max \{|f_a|_v : a \in \mathbb{N}^{N_0+1} \times \cdots \times \mathbb{N}^{N_n+1}\}$, la norme sup de f par rapport à v . On pose alors

$$h(f) := \sum_{v \in M_K^\infty} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} m_v(f) + \sum_{v \in M_K \setminus M_K^\infty} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log |f|_v + \sum_{i=0}^n \deg_{U_i}(f) \cdot \left(\sum_{j=1}^{N_i} \frac{1}{2^j} \right) \in \mathbb{R}_+ .$$

Soit $\mathcal{C}h_X \in K[U_0, \dots, U_n]$ la forme de Chow de X : pour $i = 0, \dots, n$ on considère une forme linéaire générale $L_i := U_{i0} x_0 + \cdots + U_{iN} x_N \in K[U_i][x]$ et on pose

$$\nabla_X := \{(u_0, \dots, u_n) : X \cap Z(L_0(u_0), \dots, L_n(u_n)) \neq \emptyset\} \subset (\mathbb{P}^N)^{n+1}$$

pour l'ensemble des $(n+1)$ -uplets de formes linéaires dont l'intersection des zéros avec X est non vide. C'est une hypersurface et la forme $\mathcal{C}h_X$ est définie comme une équation (unique à un facteur scalaire près) de ∇_X . C'est un polynôme en $n+1$ groupes de $N+1$ variables chacun, homogène de degré $\deg(X)$ en chaque groupe U_i .

Suivant [Phi95], la hauteur projective de X est par définition $h(X) := h(\mathcal{C}h_X)$. Alternativement, cette hauteur peut se définir via la théorie d'Arakelov comme la hauteur $h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(\Sigma)$, où Σ est la clôture de Zariski de X dans $\mathbb{P}_{\mathcal{O}_K}^N$ relative au fibré en droites universel $\overline{\mathcal{O}(1)}$ muni de la métrique de Fubini-Study [BGS94, § 3.1.3].

La structure de groupe de l'ouvert $(\mathbb{P}^N)^\circ \cong \mathbb{T}^N$ permet d'introduire une hauteur normalisée (ou canonique) pour les sous-variétés de l'espace projectif \mathbb{P}^N , vu comme une compactification équivariante du tore $(\mathbb{P}^N)^\circ$. Soit $[k] : \mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{P}^N, (x_0 : \cdots : x_N) \mapsto (x_0^k : \cdots : x_N^k)$ l'application puissance k -ième, la hauteur normalisée de X est alors définie par

$$(I.1) \quad \widehat{h}(X) = \widehat{h}_{\mathbb{P}^N}(X) := \deg(X) \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h([k]X)}{k \deg([k]X)} .$$

Une propriété tautologique est la linéarité du quotient $\frac{\widehat{h}}{\deg}$ relativement aux applications puissances [DP99, Prop. 2.1(i)]:

$$\frac{\widehat{h}([k]X)}{\deg([k]X)} = k \cdot \frac{\widehat{h}(X)}{\deg(X)} .$$

Cette hauteur se compare à la hauteur projective [DP99, Prop. 2.1(v)]:

$$|\widehat{h}(X) - h(X)| \leq \frac{7}{2} \log(N+1) \deg(X) .$$

Dans le cas des points, la hauteur normalisée coïncide avec la hauteur de Weil [DP99, Prop. 2.1(vi)]. Pour les hypersurfaces, elle s'écrit comme somme de contributions locales aux places archimédiennes, chaque terme étant la mesure de Mahler locale d'une équation de définition de X [DP99, Prop. 2.1(vii)].

Lorsque X est contenue dans un sous-espace standard $E \cong \mathbb{P}^M$ de \mathbb{P}^N , ses hauteurs normalisées comme sous-variété de E et de \mathbb{P}^N coïncident. C'est une conséquence simple de la définition de \widehat{h} et de la propriété analogue pour la hauteur projective.

Considérons donc le cas où X n'est contenue dans aucun des sous-espaces standard, autrement dit $X^\circ = X \cap (\mathbb{P}^N)^\circ \neq \emptyset$. Le tore \mathbb{T}^N agit sur \mathbb{P}^N de manière naturelle via l'inclusion $\mathbb{T}^N \cong (\mathbb{P}^N)^\circ \hookrightarrow \mathbb{P}^N$; on pose alors $\text{Stab}_{\mathbb{T}^N}(X) := \{u \in \mathbb{T}^N : u \cdot X = X\}$ pour le stabilisateur de X par rapport à cette action, qui est un sous-groupe de \mathbb{T}^N , et on note

$$\sigma_X(k) := \text{Card}(\text{Stab}_{\mathbb{T}^N}(X) \cap \text{Ker}[k]) .$$

Ainsi $\deg([k] X) = \frac{k^n}{\sigma_X(k)} \deg(X)$ [DP99, Prop. 2.1(i)] et donc $\widehat{h}(X) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sigma_X(k)}{k^{n+1}} h([k] X)$.

En général, on peut munir le tore \mathbb{T}^n d'une notion de degré et de hauteur des sous-variétés relative à un plongement donné $\varphi : \mathbb{T}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^N$, en posant

$$\deg_\varphi(Y) := \deg(\varphi(Y)) \quad , \quad h_\varphi(Y) := h(\varphi(Y))$$

pour une sous-variété $Y \subset \mathbb{T}^n$. On peut normaliser cette hauteur par rapport au morphisme $[k] : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$, $s \mapsto s^k = (s_1^k, \dots, s_n^k)$ par la formule

$$\widehat{h}_\varphi(Y) := \deg_\varphi(Y) \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h_\varphi([k] Y)}{k \deg_\varphi([k] Y)}$$

lorsque cette limite existe; dans ce cas, on a automatiquement $\frac{\widehat{h}_\varphi([k] Y)}{\deg_\varphi([k] Y)} = k \cdot \frac{\widehat{h}_\varphi(Y)}{\deg_\varphi(Y)}$. La hauteur normalisée $\widehat{h}_{\mathbb{P}^N}$ correspond à l'inclusion standard $\mathbb{T}^N \hookrightarrow \mathbb{P}^N$, $(s_1, \dots, s_N) \mapsto (1 : s_1 : \dots : s_N)$. Un autre exemple de cette situation apparaît dans [DP99, § 2], où l'on considère pour des sous-variétés de \mathbb{T}^n , la hauteur normalisée induite par l'inclusion $\mathbb{T}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^{2^n-1}$, composition de l'inclusion $\mathbb{T}^n \hookrightarrow (\mathbb{P}^1)^n$, donnée par $s \mapsto ((1 : s_1), \dots, (1 : s_n))$, et du plongement de Segre $(\mathbb{P}^1)^n \hookrightarrow \mathbb{P}^{2^n-1}$; voir aussi le paragraphe III.2.

Les hauteurs ainsi introduites peuvent aussi se définir par la théorie d'Arakelov en munissant le fibré correspondant aux places archimédiennes de certaines métriques invariantes sous l'action du sous-tore compact de \mathbb{T}^n (voir à la fin du présent paragraphe pour plus de détails).

Considérons maintenant un plongement projectif $\varphi : \mathbb{T}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ équivariant, c.-à-d. tel que l'action naturelle du tore sur l'image $\varphi(\mathbb{T}^n)$ s'étend en une action $\mathbb{T}^n \times \mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{P}^N$. On montre que la hauteur normalisée correspondante est bien définie et se réduit à une hauteur induite de $\widehat{h}_{\mathbb{P}^N}$ par une application monomiale $\varphi_{\mathcal{B}}$ du type que nous étudions dans le présent texte.

Proposition I.1. — Soit $\varphi : \mathbb{T}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ un plongement équivariant et Y une sous-variété de \mathbb{T}^n , alors il existe $\mathcal{B} \in (\mathbb{Z}^n)^{N+1}$ tel que $\widehat{h}_\varphi(Y) = \widehat{h}_{\mathbb{P}^N}(\varphi_{\mathcal{B}}(Y))$.

Démonstration. — D'après [GKZ94, Ch. 5, Prop. 1.5] il existe un vecteur $\mathcal{B} \in (\mathbb{Z}^n)^{N+1}$ et une transformation linéaire projective $U \in \text{PSL}(N+1, \overline{\mathbb{Q}})$ tels que $\varphi(\mathbb{T}^n) = U \circ \varphi_{\mathcal{B}}(\mathbb{T}^n)$. Ainsi $|h(\varphi([k] Y)) - h(\varphi_{\mathcal{B}}([k] Y))| \leq c \deg(\varphi_{\mathcal{B}}([k] Y))$ où $c > 0$ ne dépend ni de k ni de Y , voir par exemple [KPS01, Lem. 2.7], ce qui entraîne

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h(\varphi([k] Y))}{k \deg(\varphi([k] Y))} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h(\varphi_{\mathcal{B}}([k] Y))}{k \deg(\varphi_{\mathcal{B}}([k] Y))} = \frac{\widehat{h}_{\mathbb{P}^N}(\varphi_{\mathcal{B}}(Y))}{\deg(\varphi_{\mathcal{B}}(Y))} ,$$

car l'application $\varphi_{\mathcal{B}} : \mathbb{T}^n \rightarrow (\mathbb{P}^N)^\circ$ est un morphisme de groupes et donc commute avec le morphisme $[k]$. \square

Pour $\mathcal{A} \in (\mathbb{Z}^n)^{N+1}$, $\alpha \in (K^\times)^{N+1}$ et $\varphi = \varphi_{\mathcal{A}, \alpha}$, on peut prendre $\mathcal{B} := \mathcal{A}$ dans la démonstration précédente, d'où

$$\widehat{h}_{\varphi_{\mathcal{A}, \alpha}}(Y) = \widehat{h}_{\mathbb{P}^N}(\varphi_{\mathcal{A}}(Y)) .$$

Insistons sur le fait qu'il ne faut pas confondre $\widehat{h}_\varphi = \widehat{h} \circ \varphi$ (la normalisation de la hauteur induite par φ) et $\widehat{h} \circ \varphi$ (la hauteur induite par la hauteur normalisée de \mathbb{P}^N via le plongement φ).

Dans la suite on généralise la hauteur normalisée au cas des sous-variétés d'un produit d'espaces projectifs. Pour cela on fait appel aux formes résultantes d'idéaux multihomogènes; on renvoie à [Rem01a] et [Rem01b] pour une exposition complète du sujet. Cette généralisation ne sera utilisé qu'au paragraphe IV; le lecteur intéressé par le théorème 0.1 pourra donc passer directement au paragraphe II.

Pour $i = 0, \dots, m$ on fixe un groupe $x_i = \{x_{i0}, \dots, x_{iN_i}\}$ de $N_i + 1$ variables chacun et on considère l'anneau $K[x_0, \dots, x_m]$, multigradué par $\deg(x_{ij}) := e_i$ où $e_0, \dots, e_m \in \mathbb{Z}^{m+1}$ désignent les vecteurs de la base standard de \mathbb{R}^{m+1} .

Soit $I \subset K[x_0, \dots, x_m]$ un idéal multihomogène de dimension de Krull $m+n+1$ et $d_0, \dots, d_n \in \mathbb{N}^{m+1}$; pour chaque $d_i \in \mathbb{N}^{m+1}$ on introduit un groupe de variables $U_i = \{U_{i0}, \dots, U_{iN_i}\}$ et la forme générale de multidegré d_i

$$F_i := \sum_{\deg(x^a)=d_i} U_{ia} x^a \in K[U_i][x_0, \dots, x_m] .$$

On pose alors

$$\mathcal{M} = M(I; d_0, \dots, d_m) := K[U_0, \dots, U_n][x_0, \dots, x_m] / (I + (F_0, \dots, F_n))$$

qui est un $K[U]$ -module multigradué; on note \mathcal{M}_q sa partie de multidegré q pour $q \in \mathbb{Z}^{m+1}$.

De façon générale, à tout $K[U]$ -module M de type fini et de torsion (c.-à-d. tel que $\text{Ann}_{K[U]}(M) \neq 0$) est associée la forme

$$\chi(M) := \prod_{f \in \text{Irr}(K[U])} f^{\ell(M_{(f)})} \in K[U] \setminus \{0\}$$

où f parcourt l'ensemble des éléments irréductibles de $K[U]$ et $\ell(M_{(f)})$ est la longueur du $K[U]_{(f)}$ -module $M_{(f)}$; si M n'est pas de torsion on pose $\chi(M) := 0$.

D'après [Rem01a, Lem. 3.2] on sait que dans la situation précédente, l'application $q \mapsto \chi(\mathcal{M}_q)$ est constante pour les q dont toutes les coordonnées sont suffisamment grandes. Pour ces q la valeur commune

$$\text{rés}_{d_0, \dots, d_n}(I) := \chi(M(I; d_0, \dots, d_m)_q)$$

est par définition la *forme résultante de I d'indice d_0, \dots, d_n* , selon [Rem01a, §3.2].

Soit $Z \subset \mathbb{P}^{N_0} \times \dots \times \mathbb{P}^{N_m}$ une sous-variété de dimension n , son idéal $I(Z) \subset K[x_0, \dots, x_m]$ est donc de dimension de Krull $m+n+1$. Pour $c = (c_0, \dots, c_m) \in \mathbb{N}_{n+1}^{m+1}$ on pose

$$d(c) := (\overbrace{e_0, \dots, e_0}^{c_0}, \dots, \overbrace{e_m, \dots, e_m}^{c_m}) \in (\mathbb{N}^{m+1})^{n+1} .$$

La *multihauteur projective d'indice c de Z* est par définition $h_c(Z) := h(\text{rés}_{d(c)}(I(Z)))$, voir [Rem01b, § 2.3]. Soient $D_0, \dots, D_m \in \mathbb{N}^*$ des entiers et $D := (D_0, \dots, D_m)$, on considère l'application

$$\begin{aligned} \Psi_D : \mathbb{P}^{N_0} \times \dots \times \mathbb{P}^{N_m} &\rightarrow \mathbb{P}^{\binom{D_0+N_0}{N_0} \dots \binom{D_m+N_m}{N_m} - 1} \\ (x_0, \dots, x_m) &\mapsto (x_0^{b_0} \dots x_m^{b_m} : b_0 \in \mathbb{N}_{D_0}^{N_0+1}, \dots, b_m \in \mathbb{N}_{D_m}^{N_m+1}) , \end{aligned}$$

composition des plongements de Veronese et de Segre. On considère aussi l'application linéaire diagonale

$$\Delta_D : \mathbb{P}^{\binom{D_0+N_0}{N_0} \dots \binom{D_m+N_m}{N_m} - 1} \rightarrow \mathbb{P}^{\binom{D_0+N_0}{N_0} \dots \binom{D_m+N_m}{N_m} - 1}, \quad (x_b)_b \mapsto \left(\binom{D_0}{b_0}^{1/2} \dots \binom{D_m}{b_m}^{1/2} x_b \right)_b ,$$

la composition $\Delta_D \circ \Psi_D$ est le *plongement mixte remodelé*. La hauteur projective de l'image $\Delta_D \circ \Psi_D(Z)$ se décompose alors [Rem01b, p. 103]

$$(I.2) \quad h(\Delta_D \circ \Psi_D(Z)) = \sum_{c \in \mathbb{N}_{n+1}^{m+1}} \binom{n+1}{c} h_c(Z) D^c .$$

C'est la propriété suivante qui permet de définir les multihauteurs normalisés:

Proposition I.2. — Soit $Z \subset \mathbb{P}^{N_0} \times \dots \times \mathbb{P}^{N_m}$ une sous-variété de dimension n et $c \in \mathbb{N}_{n+1}^{m+1}$, notons $s : \mathbb{P}^{N_0} \times \dots \times \mathbb{P}^{N_m} \rightarrow \mathbb{P}^{(N_0+1) \dots (N_m+1) - 1}$ le plongement de Segre. Alors la suite $k \mapsto \frac{h_c([k]Z)}{k \deg([k]s(Z))}$ converge lorsque k tend vers l'infini.

Avec ces notations, on définit la *multihauteur normalisée de Z d'indice c* par

$$(I.3) \quad \widehat{h}_c(Z) := \deg(s(Z)) \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h_c([k]Z)}{k \deg([k]s(Z))} \in \mathbb{R}_+ .$$

Lemme I.3. — Soit $\psi : \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{T}^P$ un morphisme injectif de groupes et Y une sous-variété de \mathbb{T}^N , alors $\text{Stab}_{\mathbb{T}^P}(\psi(Y)) = \psi(\text{Stab}_{\mathbb{T}^N}(Y))$.

Démonstration. — Soit $u \in \text{Stab}_{\mathbb{T}^N}(Y)$, alors $\psi(u) \cdot \psi(Y) = \psi(u \cdot Y) = \psi(Y)$ d'où on obtient $\psi(\text{Stab}_{\mathbb{T}^N}(Y)) \subset \text{Stab}_{\mathbb{T}^P}(\psi(Y))$.

Dans l'autre direction, soit $v \in \mathbb{T}^P$ tel que $v \cdot \psi(Y) = \psi(Y)$. Alors $v \in \psi(Y) \cdot \psi(Y)^{-1} \subset \psi(\mathbb{T}^N)$, c.-à-d. qu'il existe $u \in \mathbb{T}^N$ tel que $v = \psi(u)$. Ainsi $\psi(u \cdot Y) = v \cdot \psi(Y) = \psi(Y)$ qui implique $u \in \text{Stab}_{\mathbb{T}^N}(Y)$, à cause de l'injectivité de ψ . \square

Démonstration de la Proposition I.2. — On suppose $Z \cap \prod_{i=0}^m (\mathbb{P}^{N_i})^\circ \neq \emptyset$, sinon il suffit de se restreindre à un produit $\prod_{i=0}^m E_i$ de sous-espaces standard des \mathbb{P}^{N_i} . Le plongement mixte remodelé $\Delta_D \circ \Psi_D$ restreint au tore $\prod_{i=0}^m (\mathbb{P}^{N_i})^\circ$ est équivariant, donc par la proposition I.1

$$\widehat{h}(\Psi_D(Z)) = \widehat{h}_{\Delta_D \circ \Psi_D}(Z) = \deg(\Psi_D(Z)) \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h(\Delta_D \circ \Psi_D([k]Z))}{k \deg(\Psi_D([k]Z))}.$$

On remarque aussi que Ψ_D restreint à $\prod_{i=0}^m (\mathbb{P}^{N_i})^\circ$ est un morphisme de groupes injectif et donc $\text{Stab}(\Psi_D(Z)) = \Psi_D(\text{Stab}(Z))$ comme conséquence du lemme I.3, puis $\sigma_{\Psi_D(Z)}(k) = \sigma_Z(k)$. Ainsi [DP99, Prop. 2.1(i)]

$$\deg(\Psi_D(Z)) = \frac{\sigma_{\Psi_D(Z)}(k)}{k^n} \deg([k] \Psi_D(Z)) = \frac{\sigma_Z(k)}{k^n} \deg(\Psi_D([k]Z)),$$

qui, joint à l'identité (I.2), entraîne

$$\begin{aligned} \widehat{h}(\Psi_D(Z)) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\deg(\Psi_D(Z))}{k \deg(\Psi_D([k]Z))} \cdot h(\Delta_D \circ \Psi_D([k]Z)) \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{c \in \mathbb{N}_{n+1}^{m+1}} \binom{n+1}{c} \frac{\sigma_Z(k)}{k^{n+1}} h_c([k]Z) D^c \right). \end{aligned}$$

Cette dernière limite convergeant pour toute $D \in (\mathbb{N}^*)^{m+1}$, on en déduit facilement que chaque coefficient $\frac{\sigma_Z(k)}{k^{n+1}} h_c([k]Z)$ converge lorsque k tend vers l'infini. De plus, $\frac{\sigma_Z(k)}{k^n} = \frac{\deg(s(Z))}{\deg([k]s(Z))}$ aussi à cause du lemme I.3, ce qui achève la démonstration. \square

Comme conséquence de cette démonstration on a également la décomposition

$$(I.4) \quad \widehat{h}(\Psi_D(Z)) = \sum_{c \in \mathbb{N}_{n+1}^{m+1}} \binom{n+1}{c} \widehat{h}_c(Z) D^c.$$

En particulier, cela montre que pour le cas $m = 0$ on retrouve la hauteur normalisée $\widehat{h}(Z)$ comme la multihauteur $\widehat{h}_{n+1}(Z)$.

Il résulte directement de la définition (I.3) que pour tout $c \in \mathbb{N}_{n+1}^{m+1}$ on a

$$(I.5) \quad \frac{\widehat{h}_c([k]Z)}{\deg([k]Z)} = k \cdot \frac{\widehat{h}_c(Z)}{\deg(Z)}$$

Par ailleurs, en utilisant une comparaison entre $h(\Delta_D \circ \Psi_D(Z))$ et $h(\Psi_D(Z))$, puis avec $\widehat{h}(\Psi_D(Z))$ grâce à [DP99, Prop. 2.8], on vérifie⁽¹⁾

$$(I.6) \quad \left| h_c(Z) - \widehat{h}_c(Z) \right| \leq c(N_0, \dots, N_m) \deg(s(Z)).$$

Les deux propriétés (I.5) et (I.6) caractérisent la fonction hauteur $Z \mapsto \widehat{h}_c(Z)$, comme il suit directement de la définition (I.3).

⁽¹⁾Comme nous n'utiliserons pas cette propriété dans la suite du texte (en dehors de la remarque finale du présent paragraphe), nous nous permettons de ne pas donner les détails de la démonstration. L'explicitation de la constante $c(N_0, \dots, N_m)$ conduit en fait à une formule plus précise du terme d'erreur.

Dans la suite, on s'intéressera surtout au cas d'une variété X de dimension n munie d'applications rationnelles $\varphi_i : X \dashrightarrow \mathbb{P}^{N_i}$ ($i = 0, \dots, n$). On pose $\Phi : X \dashrightarrow \prod_{i=0}^n \mathbb{P}^{N_i}$, $x \mapsto (\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x))$ et on écrit

$$(I.7) \quad \widehat{h}(\varphi_0, \dots, \varphi_n; X) := \widehat{h}_{(1, \dots, 1)}(\Phi(X))$$

pour la *multihauteur normalisée de X relative à $\varphi_0, \dots, \varphi_n$* . En particulier, si $\varphi_0 = \dots = \varphi_n = \varphi$ la multihauteur $\widehat{h}(\varphi_0, \dots, \varphi_n; X)$ est égale à $\widehat{h}(\varphi(X))$.

Cette multihauteur peut aussi se définir par des méthodes arakeloviennes, en suivant la démarche de [Zha95b], [Mai00] : soit K un corps de nombres de définition de Φ et considérons l'espace multiprojectif $(\mathbb{P}^{N_0} \times \dots \times \mathbb{P}^{N_n})_{\mathcal{O}_K}$ sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_K)$. On munit cet espace des fibrés hermitiens $\overline{L}_i := \varphi_i^*(\overline{\mathcal{O}(1)})$, $i = 0, \dots, n$, tiré en arrière par la projection $(\mathbb{P}^{N_0} \times \dots \times \mathbb{P}^{N_n})_{\mathcal{O}_K} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathcal{O}_K}^{N_i}$ du fibré en droites universel $\overline{\mathcal{O}(1)}$, cette fois-ci muni de la métrique dite *canonique* [Mai00, Prop.-Défn. 3.4.1]. Dans cette situation, V. Maillot introduit [Mai00, Prop.-Défn. 5.5.1] une multihauteur $h_{\overline{L}_0, \dots, \overline{L}_n}(X)$, en étendant la théorie de [BGS94] aux *fibrés en droites intégrables*. Il résulte de la proposition 3.4.2 de [Mai00] que cette multihauteur satisfait

$$\frac{h_{\overline{L}_0, \dots, \overline{L}_n}([k]X)}{\sum_{i=0}^n \deg_{L_0, \dots, \widehat{L}_i, \dots, L_n}([k]X)} = k \cdot \frac{h_{\overline{L}_0, \dots, \overline{L}_n}(X)}{\sum_{i=0}^n \deg_{L_0, \dots, \widehat{L}_i, \dots, L_n}(X)} .$$

Comme la métrique canonique est limite de métriques hermitiennes \mathcal{C}^∞ (*ibidem* Prop. 3.3.12), des résultats standards de théorie d'Arakelov [BGS94, Prop. 3.2.2] montrent que la différence entre $h_{\overline{L}_0, \dots, \overline{L}_n}(X)$ et $h_{(1, \dots, 1)}(\Phi(X))$ est bornée par $c(L_0, \dots, L_n) \sum_{i=0}^n \deg_{L_0, \dots, \widehat{L}_i, \dots, L_n}(X)$, où $c(L_0, \dots, L_n)$ ne dépend pas de X . Mais, on a vu que ces deux propriétés caractérisent la hauteur $\widehat{h}_{(1, \dots, 1)}(\Phi(X))$, ce qui montre $h_{\overline{L}_0, \dots, \overline{L}_n}(X) = \widehat{h}(\varphi_0, \dots, \varphi_n; X)$.

II. Fonctions de Hilbert arithmétiques

Soit $X \subset \mathbb{P}^N$ une sous-variété définie sur un corps de nombres K et $I := I(X) \subset K[x_0, \dots, x_N]$ son idéal de définition, on pose

$$\mathcal{H}_{\text{géom}}(X; D) := \dim_K(K[x_0, \dots, x_N]/I)_D = \binom{D+N}{N} - \dim_K(I_D)$$

pour la classique *fonction de Hilbert géométrique* de X . Ci-après, on introduit un analogue arithmétique de cette fonction. Posons $\ell := \dim_K(I_D)$ et

$$\bigwedge^{\ell} K[x_0, \dots, x_N]_D$$

la ℓ -ième puissance extérieure de $K[x_0, \dots, x_N]_D$. Pour $v \in M_K$ et $f \in \bigwedge^{\ell} K[x_0, \dots, x_N]_D$ on note $|f|_v$ la norme sup des coefficients de f pour la place v , par rapport à la base standard $\{\bigwedge_{a \in L} x^a : L \subset \mathbb{N}_D^{N+1}, \text{Card}(L) = \ell\}$.

Définition II.1. — Soit p_1, \dots, p_ℓ une base de I_D sur K , on pose

$$\mathcal{H}_{\text{norm}}(X; D) := \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log |p_1 \wedge \dots \wedge p_\ell|_v .$$

Cette définition ne dépend pas du choix de la base p_1, \dots, p_ℓ , grâce à la formule du produit; elle est aussi invariante par extensions finies de K .

La *fonction de Hilbert arithmétique* introduite mesure, pour chaque valeur $D \in \mathbb{N}$ du paramètre, la complexité binaire du K -espace linéaire des formes de degré D de l'anneau $K[X_0, \dots, X_N]$ modulo I . Dans le cas des variétés toriques, son comportement asymptotique est lié à la hauteur normalisée de la variété en question (Proposition 0.4). C'est grâce à ce résultat (dont on repousse la démonstration au paragraphe III.2) que la fonction $\mathcal{H}_{\text{norm}}$ joue un rôle crucial dans notre calcul de $\widehat{h}(X_{\mathcal{A}, \alpha})$. Cependant,

il serait très intéressant de montrer que cette asymptotique reste valable pour une variété projective quelconque. On se hasarde à poser :

Question II.2. — *Pour toute sous-variété $X \subset \mathbb{P}^N$ de dimension n , existe-t-il un réel $c(X) > 0$ tel que*

$$(II.1) \quad \mathcal{H}_{\text{norm}}(X; D) = \frac{c(X)}{(n+1)!} D^{n+1} + o(D^{n+1}) ?$$

A-t-on de plus $c(X) = \widehat{h}(X)$?

La fonction $\mathcal{H}_{\text{norm}}$ admet la formulation duale suivante. Explicitons d'abord les contributions locales: écrivons $p_i = \sum_a p_{i a} x^a$ pour $i = 1, \dots, \ell$ et posons p la matrice de taille $\ell \times \binom{D+N}{N}$ formée par les coefficients de p_1, \dots, p_ℓ . Pour chaque sous-ensemble $L \subset \mathbb{N}_D^{N+1}$ tel que $\text{Card}(L) = \ell$ on pose

$$p_L := (p_{i a})_{\substack{1 \leq i \leq \ell \\ a \in L}} \in K^{\ell \times \ell}$$

le mineur de p correspondant aux colonnes indexées par L ; ainsi

$$p_1 \wedge \cdots \wedge p_\ell = \sum_{L; \text{Card}(L)=\ell} \det(p_L) \bigwedge_{a \in L} x^a$$

et donc $|p_1 \wedge \cdots \wedge p_\ell|_v = \max \{ |\det(p_L)|_v : L \subset \mathbb{N}_D^{N+1}, \text{Card}(L) = \ell \}$.

Soit $K[x_0, \dots, x_N]_D^\vee$ l'espace dual (c.-à-d. l'espace des fonctionnelles linéaires $K[x_0, \dots, x_N]_D \rightarrow K$) muni de la base duale de celle des monômes. Soit $m := \mathcal{H}_{\text{géom}}(X; D)$, pour $v \in M_K$ et $g \in \bigwedge^m K[x_0, \dots, x_N]_D^\vee$ on note $|g|_v$ la norme sup des coefficients de g pour la place v , par rapport à la base duale $\{ \bigwedge_{b \in L} (x^b)^\vee : M \subset \mathbb{N}_D^{N+1}, \text{Card}(M) = m \}$.

Proposition II.3. — *Soit $q_1, \dots, q_m \in (K[x_0, \dots, x_N]_D)^\vee$ une base sur K de l'annulateur $\text{Ann}(I_D)$, alors*

$$\mathcal{H}_{\text{norm}}(X; D) = \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log |q_1 \wedge \cdots \wedge q_m|_v .$$

Démonstration. — Posons $E = K[x_0, \dots, x_N]_D$, on a des isomorphismes de K -espaces vectoriels canoniques

$$\begin{aligned} \psi_1 : \quad \bigwedge^m E^\vee &\longrightarrow (\bigwedge^m E)^\vee \\ \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_m &\longmapsto (f_1 \wedge \cdots \wedge f_m \mapsto \det(\theta_i(f_j))_{1 \leq i, j \leq m}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \psi_2 : \quad \bigwedge^\ell E &\longrightarrow \text{Hom}_K \left(\bigwedge^m E, \bigwedge^{\binom{D+N}{N}} E \right) \\ g_1 \wedge \cdots \wedge g_\ell &\longmapsto (f_1 \wedge \cdots \wedge f_m \mapsto f_1 \wedge \cdots \wedge f_m \wedge g_1 \wedge \cdots \wedge g_\ell) \end{aligned}$$

On identifie $\bigwedge^{\binom{D+N}{N}} E$ à K grâce à la base des monômes de E fixée, ce qui permet d'identifier également $\text{Hom}_K \left(\bigwedge^m E, \bigwedge^{\binom{D+N}{N}} E \right)$ à $(\bigwedge^m E)^\vee$. On pose alors $\psi : \bigwedge^\ell E \rightarrow (\bigwedge^m E)^\vee$ la composée $\psi := \psi_1^{-1} \circ \psi_2$.

Munissons la base des monômes de E d'un ordre total \succ , pour tout sous-ensemble $L \subset \mathbb{N}_D^{N+1}$ tel que $\text{Card}(L) = \ell$ et où $L^c := \mathbb{N}_D^{N+1} \setminus L$ on vérifie

$$\psi : \bigwedge_{a \in L} x^a \mapsto (-1)^{\nu(L)} \cdot \bigwedge_{b \in L^c} (x^b)^\vee$$

où $\nu(L) := \text{Card}\{(a, b) \in L \times L^c, a \succ b\}$, car $\psi_2(\bigwedge_{a \in L} x^a) = (-1)^{\nu(L)} \cdot \psi_1(\bigwedge_{b \in L^c} (x^b)^\vee)$. On constate ainsi que l'isomorphisme ψ coïncide avec celui de [Bou70, Ch. 3, § 11, Formule (78)] et c'est donc aussi celui de la proposition 12 de *loc. cit.*

Soit p_1, \dots, p_ℓ une base de I_D sur K . D'après le théorème de Brill-Gordan [Gor1873] (voir aussi [Bou70, Ch. 3, § 11, Prop. 15]) il existe $\lambda \in K^\times$ tel que

$$(II.2) \quad \Psi_\ell(p_1 \wedge \cdots \wedge p_\ell) = \lambda \cdot q_1 \wedge \cdots \wedge q_m .$$

Ceci implique $\det(p_L) = \pm \lambda \det(q_L^c)$ pour tout L , d'où $\log |p_1 \wedge \cdots \wedge p_\ell|_v = \log |q_1 \wedge \cdots \wedge q_m|_v + \log |\lambda|_v$, et on conclut par sommation sur $v \in M_K$ avec la formule du produit. \square

Remarque II.4. — *Le partie graduée I_D est, par définition,*

$$I_D = \left\{ f : f(\xi) = \sum_{a \in \mathbb{N}_D^{N+1}} f_a \xi^a = 0 \quad \forall \xi \in X \right\} .$$

Autrement dit, $I_D = \text{Ann}(v_{N,D}(X))$ où $v_{N,D} : \mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{P}^{\binom{D+N}{N}}$ désigne le plongement de Veronese de degré D en $N+1$ variables homogènes. Ainsi $\text{Ann}(I_D)$ coïncide avec l'espace linéaire engendré par l'ensemble $v_{N,D}(X)$.

Notons encore que $\mathcal{H}_{\text{norm}}$ se comporte bien par rapport aux plongements de Veronese : précisément on a $\mathcal{H}_{\text{norm}}(v_{N,D}(X); D') = \mathcal{H}_{\text{norm}}(X; D D')$ pour $D' \in \mathbb{N}$.

On introduit maintenant une deuxième fonction de Hilbert arithmétique, dont on aura besoin pour la démonstration de la proposition 0.4. Pour $f = \sum_a f_a x^a$, $g = \sum_a g_a x^a \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_N]_D$ on considère le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \langle f, g \rangle_D := \sum_a \binom{D}{a}^{-1} f_a \bar{g}_a .$$

À un facteur près, ce produit coïncide avec la norme \mathcal{L}^2 sur $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ par rapport à la métrique de Fubini-Study: on a

$$(II.3) \quad \langle f, g \rangle = \binom{D+N}{N} \int_{\mathbb{P}^N(\mathbb{C})} \frac{f(z) \overline{g(z)}}{\|z\|^{2D}} \omega_{\text{FS}}^N ,$$

où ω_{FS} dénote la $(1,1)$ -forme de Fubini-Study, normalisée de sorte que l'espace ambiant $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ soit de masse totale 1, voir par exemple [Ran01, § 1.3.1]. La puissance extérieure $\bigwedge^\ell \mathbb{C}[x_0, \dots, x_N]_D$ est alors munie du produit scalaire

$$\langle f_1 \wedge \cdots \wedge f_\ell, g_1 \wedge \cdots \wedge g_\ell \rangle := \det(\langle f_i, g_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq \ell} .$$

Soit $v \in M_K^\infty$ et $\sigma_v : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ un plongement correspondant à v , alors pour $p_1, \dots, p_\ell \in K[x_0, \dots, x_N]_D$ on pose

$$\|p_1 \wedge \cdots \wedge p_\ell\|_v := \|\sigma_v(p_1) \wedge \cdots \wedge \sigma_v(p_\ell)\|$$

où $\|\cdot\|$ est la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Ainsi on définit la fonction

$$(II.4) \quad \mathcal{H}_{\text{arith}}(X; D) := \sum_{v \in M_K^\infty} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \|p_1 \wedge \cdots \wedge p_\ell\|_v \\ + \sum_{v \in M_K \setminus M_K^\infty} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log |p_1 \wedge \cdots \wedge p_\ell|_v + \frac{1}{2} \log(\gamma(N, D)) ,$$

où p_1, \dots, p_ℓ est une base de I_D sur K et $\gamma(N, D) := \prod_{a \in \mathbb{N}_D^{N+1}} \binom{D}{a}$. Comme pour $\mathcal{H}_{\text{norm}}(X; D)$, cette définition est indépendante du choix de la base et invariante par extensions finies du corps K .

Cette fonction est proche d'autres analogues arithmétiques de la fonction de Hilbert, définis eux aussi comme une hauteur du sous-espace linéaire I_D . En particulier elle coïncide, à un décalage explicite près, avec la fonction de Hilbert arithmétique proposée par M. Laurent pour les \mathbb{Q} -sous-variétés dans [Lau92, pp. 224-226], qu'on notera ici $\mathcal{H}_{\text{Lau}}^{(2)}$. La définition de *loc. cit.* est la même que (II.4), mais le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_D$ y est normalisé par un facteur $\gamma(N, D)^{1/\binom{N+D}{D}}$ [Lau92, p. 221], on en déduit

$$\mathcal{H}_{\text{arith}}(X; D) = \mathcal{H}_{\text{Lau}}(X; D) + \frac{1}{2} \binom{D+N}{N}^{-1} \log(\gamma(N, D)) \cdot \mathcal{H}_{\text{géom}}(X; D) .$$

⁽²⁾Dans [Lau92, p. 224-5] cette fonction est définie comme $\log(\text{vol}(I_{ZL}^{\mathbb{R}}/I_{ZL}^{\mathbb{Z}}))$, où I_Z correspond à notre idéal I , I_{ZL} à I_D ($L = D$) et $I_{ZL}^{\mathbb{Z}} = I_Z \cap \mathbb{Z}[x_0, \dots, x_N]_L$, $I_{ZL}^{\mathbb{R}} = I_{ZL}^{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

On remarquera que d'après [Lau92, Prop. 3] on a

$$\binom{D+N}{N}^{-1} \log(\gamma(N, D)) = D \sum_{j=1}^N \frac{1}{j+1} - \frac{N}{2} \log(D) + \frac{N+1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{1}{j+1} - \frac{N}{2} \log(2\pi) + o_D(1) .$$

En outre, $\mathcal{H}_{\text{arith}}$ peut aussi se comparer avec la fonction de Hilbert arithmétique introduite par S. David et P. Philippon dans [DP99, § 4.3], qu'on notera ici \mathcal{H}_{DP} ; on a

$$\mathcal{H}_{\text{DP}}(X; D) \leq \mathcal{H}_{\text{arith}}(X; D) \leq \mathcal{H}_{\text{DP}}(X; D) + c \frac{N+1}{2} \binom{D+N}{N}^{-1} \log(\gamma(N, D)) \cdot \mathcal{H}_{\text{géom}}(X; D)$$

où $c > 0$ est un réel tel que $\pi(x) := \text{Card}(\{p \text{ premier} : p \leq x\}) \leq c \cdot x / \log(x)$. D'après [RS62, Cor. 1] on peut prendre $c = 1,26$. La première estimation est directe, tandis que pour la deuxième il faut utiliser des formulations duales pour $\mathcal{H}_{\text{arith}}$ (Proposition II.5 ci-dessous) et \mathcal{H}_{DP} .

Comme pour $\mathcal{H}_{\text{norm}}$, la fonction $\mathcal{H}_{\text{arith}}$ admet une formulation duale. Le produit scalaire induit un isomorphisme linéaire

$$\eta : \mathbb{C}[x_0, \dots, x_N]_D \rightarrow \mathbb{C}[x_0, \dots, x_N]_D^\vee, \quad f \mapsto \langle \cdot, f \rangle,$$

et cette identification munit $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_N]_D^\vee$ du produit scalaire *dual*, défini par

$$\langle \eta(f), \eta(g) \rangle^\vee := \langle f, g \rangle$$

pour $f, g \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_N]_D$. Pour $\theta = \sum_b \theta_b (x^b)^\vee$, $\zeta = \sum_b \zeta_b (x^b)^\vee \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_N]_D^\vee$ on vérifie aisément que ce produit s'écrit

$$\langle \theta, \zeta \rangle^\vee := \sum_b \binom{D}{b} \theta_b \bar{\zeta}_b .$$

Ceci s'étend de manière naturelle aux puissances extérieures $\bigwedge^m (\mathbb{C}[x_0, \dots, x_N]_D)^\vee$ par

$$\langle \theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_m, \zeta_1 \wedge \dots \wedge \zeta_m \rangle := \det(\langle \theta_i, \zeta_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq m} .$$

Proposition II.5. — Soit $q_1, \dots, q_m \in K[x_0, \dots, x_N]_D^\vee$ une base de $\text{Ann}(I_D)$ sur K , alors

$$\mathcal{H}_{\text{arith}}(X; D) = \sum_{v \in M_K^\infty} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \|q_1 \wedge \dots \wedge q_m\|_v^\vee + \sum_{v \in M_K \setminus M_K^\infty} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log |q_1 \wedge \dots \wedge q_m|_v .$$

Ce résultat étend [Lau92, Thm. 3] au cas des sous-variétés de dimension positive; cependant la démonstration reste (pour l'essentiel) inchangée:

Démonstration. — Soit p_1, \dots, p_ℓ une base de I_D , grâce au théorème de Brill-Gordan (Identité (II.2) ci-dessus) on a $\det(p_L) = \pm \lambda \det(q_L^c)$ pour tout sous-ensemble $L \subset \mathbb{N}_D^{N+1}$ tel que $\text{Card}(L) = \ell$ et où $L^c := \mathbb{N}_D^{N+1} \setminus L$. Donc pour $v \in M_K^\infty$

$$\begin{aligned} \log \|p_1 \wedge \dots \wedge p_\ell\|_v &= \frac{1}{2} \log \left(\sum_{L; \text{Card}(L)=\ell} \left(\prod_{a \in L} \binom{D}{a}^{-1} \right) |\det(p_L)|_v^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \log \left(\sum_{L; \text{Card}(L)=\ell} \left(\prod_{a \in L} \binom{D}{a}^{-1} \right) |\det(q_L^c)|_v^2 \right) + \log |\lambda|_v \\ &= \frac{1}{2} \log \left(\sum_{M; \text{Card}(M)=m} \left(\prod_{b \in M} \binom{D}{b} \right) |\det(q_M)|_v^2 \right) - \frac{1}{2} \log(\gamma(N, D)) + \log |\lambda|_v \\ &= \log \|q_1 \wedge \dots \wedge q_m\|_v^\vee - \frac{1}{2} \log(\gamma(N, D)) + \log |\lambda|_v \end{aligned}$$

tandis que pour $v \in M_K \setminus M_K^\infty$ on a $\log |p_1 \wedge \dots \wedge p_\ell|_v = \log |q_1 \wedge \dots \wedge q_m|_v + \log |\lambda|_v$. On conclut par sommation sur $v \in M_K$ avec la formule du produit. \square

On explicite maintenant quelques uns des résultats de la thèse de H. Randriambololona [Ran01] qui nous permettront d'expliciter le comportement asymptotique de $\mathcal{H}_{\text{arith}}$. Pour le reste de cette section, on utilisera librement le langage de la géométrie d'Arakelov, on renvoie à [BGS94] et [Ran01, Partie I] pour les définitions et propriétés de base des objets.

Soit X_K le sous-schéma fermé intègre de \mathbb{P}_K^N défini par l'idéal $I \subset K[x_0, \dots, x_N]$ et soit Σ la clôture de Zariski de X_K dans $\mathbb{P}_{\mathcal{O}_K}^N$. Autrement dit, Σ est le schéma projectif défini par l'idéal premier homogène

$$I_{\mathcal{O}_K} := I \cap \mathcal{O}_K[x_0, \dots, x_N] \subset \mathcal{O}_K[x_0, \dots, x_N] .$$

Par construction, Σ est un sous-schéma de $\mathbb{P}_{\mathcal{O}_K}^N$ fermé, intègre, de dimension $n+1$ et plat sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_K)$ car $I_{\mathcal{O}_K} \cap \mathcal{O}_K = \{0\}$.

Soit $\mathcal{O}(D) := \mathcal{O}(1)^{\otimes D}$ la D -ième puissance tensorielle du fibré en droites universel $\mathcal{O}(1)$ sur $\mathbb{P}_{\mathcal{O}_K}^N$, on pose $M := \Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(D)|_{\Sigma})$ le \mathcal{O}_K -module des sections globales de $\mathcal{O}(D)|_{\Sigma}$. Pour chaque plongement $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ on pose $\Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(D)|_{\Sigma})_{\sigma} := \Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(D)|_{\Sigma}) \otimes_{\sigma} \mathbb{C}$ et on considère l'application de restriction

$$\Gamma(\mathbb{P}_{\mathcal{O}_K}^N, \mathcal{O}(D))_{\sigma} \rightarrow \Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(D)|_{\Sigma})_{\sigma} .$$

L'espace $\Gamma(\mathbb{P}_{\mathcal{O}_K}^N, \mathcal{O}(D))_{\sigma}$ s'identifie canoniquement à la partie graduée $K_{\sigma}[x_0, \dots, x_N]_D$, on le munit du produit \mathcal{L}^2 par rapport à la métrique de Fubini-Study. Ce produit est un multiple du produit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ introduit précédemment; on a (Formule (II.3))

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{L}^2, \sigma} = \binom{D+N}{N}^{-1} \langle \sigma(f), \sigma(g) \rangle$$

pour tout $f, g \in \Gamma(\mathbb{P}_{\mathcal{O}_K}^N, \mathcal{O}(D))_{\sigma}$. L'application de restriction est surjective pour $d \gg 0$; dans cette situation on munit M_{σ} du produit scalaire *quotient*, c'est à dire qu'on identifie cet espace avec l'orthogonal du noyau de l'application de restriction et on l'équipe du produit induit.

Cette construction munit M d'une structure de \mathcal{O}_K -module *hermitien* dont le degré arithmétique est par définition

$$(II.5) \quad \widehat{\deg}(\overline{M}) := \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \left(\log \text{Card} \left(\bigwedge^s M / (f_1 \wedge \dots \wedge f_s) \right) - \sum_{\sigma: K \hookrightarrow \mathbb{C}} \log \|f_1 \wedge \dots \wedge f_s\|_{\mathcal{L}^2, \sigma} \right)$$

où $f_1, \dots, f_s \in M$ est une base de $\Gamma(X_K; \mathcal{O}(D)|_{X_K})$ sur K et $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^2, \sigma}$ est la norme associée au produit $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{L}^2, \sigma}$. Dans le langage de [Ran01] ce degré arithmétique est la D -ième hauteur schématique de Σ ; on montre qu'il coïncide (à un décalage près) avec $\mathcal{H}_{\text{arith}}(X; D)$ pour D assez grand:

Lemme II.6. — *Avec les notations ci-dessus, il existe $D_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $D \geq D_0$ on ait*

$$\mathcal{H}_{\text{arith}}(X; D) = \widehat{\deg}(\overline{\Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(D)|_{\Sigma})}) - \frac{1}{2} \mathcal{H}_{\text{géom}}(X; D) \log \binom{D+N}{N} .$$

Démonstration. — Soit \mathcal{I} le faisceau d'idéaux de définition de Σ et $\Gamma(\mathbb{P}_{\mathcal{O}_K}^N, \mathcal{I}\mathcal{O}(D))$ le \mathcal{O}_K -module des sections globales de $\mathcal{I}\mathcal{O}(D)$, muni des produits scalaires obtenus par restriction du produit \mathcal{L}^2 . Soit $M = \Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(D)|_{\Sigma})$, alors pour D_0 assez grand et $D \geq D_0$ on a [Ran01, Lem. 2.3.6]

$$(II.6) \quad \widehat{\deg}(\overline{M}) = \widehat{\deg}(\overline{\Gamma(\mathbb{P}_{\mathcal{O}_K}^N, \mathcal{O}(D))}) - \widehat{\deg}(\overline{\Gamma(\mathbb{P}_{\mathcal{O}_K}^N, \mathcal{I}\mathcal{O}(D))})$$

à cause de l'exactitude de la suite de \mathcal{O}_K -modules hermitiens

$$0 \rightarrow \overline{\Gamma(\mathbb{P}_{\mathcal{O}_K}^N, \mathcal{I}\mathcal{O}(D))} \rightarrow \overline{\Gamma(\mathbb{P}_{\mathcal{O}_K}^N, \mathcal{O}(D))} \rightarrow M \rightarrow 0 ,$$

qui résulte de l'exactitude de la suite des faisceaux métrisés correspondants et de la nullité du module $H^1(\mathbb{P}_{\mathcal{O}_K}^N, \mathcal{O}(D))$ pour $D \geq D_0$. En prenant la base des sections associée à la base des monômes, on vérifie aisément

$$\widehat{\deg}(\overline{\Gamma(\mathbb{P}_{\mathcal{O}_K}^N, \mathcal{O}(D))}) = \frac{1}{2} \log(\gamma(N, D)) + \frac{1}{2} \binom{D+N}{N} \log \binom{D+N}{N} .$$

En outre, $\Gamma(\mathbb{P}_{\mathcal{O}_K}^N, \mathcal{I}\mathcal{O}(D))$ s'identifie de manière naturelle à la partie graduée $(I_{\mathcal{O}_K})_D$ des éléments de I dans $\mathcal{O}_K[x_0, \dots, x_N]_D$. Soit $p_1, \dots, p_\ell \in (I_{\mathcal{O}_K})_D$ une base de I_D sur K ; de l'identité (II.6), de la définition (II.5) appliquée à $(I_{\mathcal{O}_K})_D$ et du rapport entre les différents produits scalaires on déduit pour $D \geq D_0$

$$\begin{aligned} \widehat{\deg}(\overline{M}) &= \frac{1}{2} \log(\gamma(N, D)) + \frac{1}{2} \binom{D+N}{N} \log \binom{D+N}{N} \\ &\quad + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \left(\sum_{\sigma: K \hookrightarrow \mathbb{C}} \log \|p_1 \wedge \dots \wedge p_\ell\|_{\mathcal{L}^2, \sigma} - \log \text{Card} \left(\bigwedge_{\ell} (I_{\mathcal{O}_K})_D / (p_1 \wedge \dots \wedge p_\ell) \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \log(\gamma(N, D)) + \frac{1}{2} \mathcal{H}_{\text{géom}}(X; D) \log \binom{D+N}{N} \\ &\quad + \sum_{v \in M_K^\infty} \frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]} \log \|p_1 \wedge \dots \wedge p_\ell\|_v - \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \log \text{Card} \left(\bigwedge_{\ell} (I_{\mathcal{O}_K})_D / (p_1 \wedge \dots \wedge p_\ell) \right) . \end{aligned}$$

On pose maintenant $J := \bigwedge_{\ell} (I_{\mathcal{O}_K})_D$ et $j := p_1 \wedge \dots \wedge p_\ell \in J$; vu la définition de $\mathcal{H}_{\text{arith}}$ on est réduit à démontrer l'identité

$$\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \text{Card}(J/j\mathcal{O}_K) = - \sum_{v \in M_K \setminus M_K^\infty} \frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]} \log |j|_v .$$

On considère l'application $J/j\mathcal{O}_K \rightarrow \prod_{\mathfrak{p}} (J/j\mathcal{O}_K)_{\mathfrak{p}}$ pour \mathfrak{p} parcourant l'ensemble des idéaux premiers de \mathcal{O}_K , c'est un isomorphisme car J est un \mathcal{O}_K -module projectif de rang 1. Soit \mathfrak{p} un idéal premier de \mathcal{O}_K , le module localisé $J_{\mathfrak{p}}$ est donc *libre* de rang 1. Fixons un générateur $f_{\mathfrak{p}}$ et soit $j_{\mathfrak{p}} \in (\mathcal{O}_K)_{\mathfrak{p}}$ tel que $j = j_{\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{p}}$, alors on a un isomorphisme

$$(J/j\mathcal{O}_K)_{\mathfrak{p}} \cong (\mathcal{O}_K)_{\mathfrak{p}} / j_{\mathfrak{p}}(\mathcal{O}_K)_{\mathfrak{p}} .$$

Soit $\text{ord}_{\mathfrak{p}}$ la valuation et $|\cdot|_v := \text{Norme}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{\text{ord}_{\mathfrak{p}}(\cdot)}$ la valeur absolue ultramétrique associées à l'idéal \mathfrak{p} , on remarque que $|f_{\mathfrak{p}}|_v = 1$ car $(I_{\mathcal{O}_K})_D$ est un sous-module saturé de $\mathcal{O}_K[x_0, \dots, x_N]_D$, donc $|j_{\mathfrak{p}}|_v = |j|_v$. En passant au cardinaux on trouve

$$\text{Card}((J/j\mathcal{O}_K)_{\mathfrak{p}}) = \text{Card}((\mathcal{O}_K)_{\mathfrak{p}} / \mathfrak{p}^{\text{ord}_{\mathfrak{p}}(j_{\mathfrak{p}})} (\mathcal{O}_K)_{\mathfrak{p}}) = \text{Norme}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{\text{ord}_{\mathfrak{p}}(j_{\mathfrak{p}})} = |j|_v^{-[K_v:\mathbb{Q}_v]} ,$$

ce qui entraîne l'identité cherchée. \square

Maintenant, [Ran01, Thm. A.2.2] (voir aussi [Ran04]) s'énonce

$$\widehat{\deg}(\overline{\Gamma(\Sigma, \mathcal{O}(D)|_{\Sigma}))} = \frac{h(X)}{(n+1)!} D^{n+1} + o(D^{n+1})$$

où $h(X)$ est la hauteur projective de X . Avec le lemme précédent, ceci implique

$$(II.7) \quad \mathcal{H}_{\text{arith}}(X; D) = \frac{h(X)}{(n+1)!} D^{n+1} + o(D^{n+1})$$

lorsque D tend vers l'infini, car $\frac{1}{2} \mathcal{H}_{\text{géom}}(X; D) \log \binom{D+N}{N} = o(D^{n+1})$.

Corollaire II.7. — Soit $X \subset \mathbb{P}^N$ une sous-variété de dimension n , alors

$$\begin{aligned} (n+1)! \varliminf_{D \rightarrow \infty} \frac{1}{D^{n+1}} \mathcal{H}_{\text{norm}}(X; D) &\geq h(X) - \frac{1}{2} (n+1) \log(N+1) \deg(X) , \\ (n+1)! \varlimsup_{D \rightarrow \infty} \frac{1}{D^{n+1}} \mathcal{H}_{\text{norm}}(X; D) &\leq h(X) . \end{aligned}$$

Démonstration. — Soit $q_1, \dots, q_m \in K[x_0, \dots, x_N]_D^\vee$ une base de $\text{Ann}(I_D)$ sur K . Pour $v \in M_K^\infty$ on a

$$\begin{aligned} |q_1 \wedge \dots \wedge q_m|_v &= \max \{ |\det(q_M)|_v : M \subset \mathbb{N}_D^{N+1}, \text{Card}(M) = m \} \\ &\leq \left(\sum_{M; \text{Card}(M)=m} \left(\prod_{b \in M} \binom{D}{b} \right) |\det(q_M)|_v^2 \right)^{1/2} = \|q_1 \wedge \dots \wedge q_m\|_v^\vee \end{aligned}$$

où $q_M = (q_{jb})_{\substack{1 \leq j \leq m \\ b \in M}} \in K^{m \times m}$, en écrivant $q_j = \sum_{b \in \mathbb{N}_D^{N+1}} q_{jb}(x^b)^\vee$. Et dans l'autre direction

$$\|q_1 \wedge \dots \wedge q_m\|_v^\vee \leq \left(\sum_{M; \text{Card}(M)=m} \prod_{b \in M} \binom{D}{b} \right)^{1/2} |q_1 \wedge \dots \wedge q_m|_v \leq (N+1)^{\frac{mD}{2}} |q_1 \wedge \dots \wedge q_m|_v .$$

Par sommation sur $v \in M_K$ et grâce aux propositions II.3 et II.5 on obtient l'encadrement

$$\mathcal{H}_{\text{arith}}(X; D) - \frac{1}{2} \log(N+1) D \mathcal{H}_{\text{géom}}(X; D) \leq \mathcal{H}_{\text{norm}}(X; D) \leq \mathcal{H}_{\text{arith}}(X; D) .$$

L'énoncé découle de ces estimations et de l'asymptotique (II.7) pour $\mathcal{H}_{\text{arith}}$. \square

Dans le cas où $\mathcal{H}_{\text{norm}}(X; D)$ admet un comportement asymptotique du type (II.1), il suit de ce corollaire l'encadrement

$$(II.8) \quad c(X) \leq h(X) \leq c(X) + \frac{n+1}{2} \log(N+1) \deg(X) .$$

En particulier, lorsque la question II.2 a une réponse positive, cela améliore [DP99, Prop. 2.1 (v)] d'un facteur $2/7$.

III. Hauteur et fonction de Hilbert arithmétique des variétés toriques

III.1. Poids de Hilbert et de Chow. — Dans ce paragraphe on se place, comme au § I.1, sur un corps de base \mathbb{K} . Soit $X \subset \mathbb{P}^N = \mathbb{P}^N(\mathbb{K})$ une sous-variété de dimension n et $\tau = (\tau_0, \dots, \tau_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ un *vecteur poids*. Considérons une forme de Chow $Ch_X \in \mathbb{K}[U_0, \dots, U_n]$ associée à la variété X et prenons t une variable additionnelle; si l'on écrit formellement

$$Ch_X(t^{\tau_j} U_{i,j} : 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq N) = t^{e_0} F_0 + \dots + t^{e_M} F_M$$

avec $F_0, \dots, F_M \in \mathbb{K}[U_0, \dots, U_n] \setminus \{0\}$ et $e_0 > \dots > e_M$, le τ -*poids de Chow de X* est défini par $e_\tau(X) := e_0$. Cette notion est introduite dans [Mum77, p. 61] dans le contexte de la théorie géométrique des invariants, en relation avec l'étude de la stabilité des variétés projectives.

Posons

$$\ell_\tau(x) := \tau_0 x_0 + \dots + \tau_N x_N \in \mathbb{R}[x_0, \dots, x_N]$$

la forme linéaire associée à τ . Pour $D \in \mathbb{N}$ et $I = I(X) \subset \mathbb{K}[x_0, \dots, x_N]$ l'idéal de définition de X , le τ -*poids de Hilbert de X en degré D* (ou τ -*poids de $(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_N]/I)_D$* selon la terminologie de [Mum77]) est

$$s_\tau(X; D) := \max_J \sum_{\lambda \in J} \ell_\tau(\lambda)$$

où le maximum est pris sur tous les $J \subset \mathbb{N}_D^{N+1}$ tels que l'ensemble des monômes associés $\{x^\lambda : \lambda \in J\}$ induise une base de la partie graduée $(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_N]/I)_D$. Cette quantité est aussi appelée D -*ième poids de Hilbert de I par rapport à τ* dans [EF02, § 4.1]. Un résultat de Mumford [Mum77, Prop. 2.11], appliqué à l'idéal initial de I pour τ , entraîne que l'asymptotique de cette fonction pour D tendant vers l'infini est

$$(III.1) \quad s_\tau(X; D) = \frac{e_\tau(X)}{(n+1)!} D^{n+1} + O(D^n) .$$

En principe, on sait calculer les poids de Chow d'une variété donnée puisqu'on peut calculer sa forme de Chow, pourtant cela reste difficile en pratique. Dans la suite on donne une expression simple des poids de Hilbert et de Chow dans le cas des variétés toriques.

Pour un vecteur $\mathcal{A} = (a_0, \dots, a_N) \in (\mathbb{Z}^n)^{N+1}$ et un poids $\tau \in \mathbb{R}^{N+1}$ on considère le polytope

$$Q_{\mathcal{A}, \tau} := \text{Conv}((a_0, \tau_0), \dots, (a_N, \tau_N)) \subset \mathbb{R}^{n+1} ,$$

dont l'enveloppe supérieure s'envoie bijectivement sur $Q_{\mathcal{A}}$ par la projection standard $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Soit alors

$$\vartheta_{\mathcal{A}, \tau} : Q_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbb{R} , \quad x \mapsto \max \{ y \in \mathbb{R} : (x, y) \in Q_{\mathcal{A}, \tau} \} ,$$

la paramétrisation de cette enveloppe supérieure au dessus de $Q_{\mathcal{A}}$. C'est une fonction *concave* et *affine par morceaux*, donc en particulier Riemann intégrable sur tout polytope.

Considérons l'application linéaire

$$M_{\mathcal{A}} := \mathbb{Z}^{N+1} \rightarrow \mathbb{Z}^n , \quad \lambda \mapsto \lambda_0 a_0 + \dots + \lambda_N a_N .$$

On pose $\mathcal{A}(D) := M_{\mathcal{A}}(\mathbb{N}_D^{N+1}) \subset \mathbb{Z}^n$ l'image de \mathbb{N}_D^{N+1} par $M_{\mathcal{A}}$; ainsi $\mathcal{A}(1) = \text{Expo}(\mathcal{A})$.

Proposition III.1. — Soit $\mathcal{A} \in (\mathbb{Z}^n)^{N+1}$ tel que $L_{\mathcal{A}} = \mathbb{Z}^n$, $\tau \in \mathbb{R}^{N+1}$ et $D \in \mathbb{N}$, alors

$$s_{\tau}(X_{\mathcal{A}}; D) = \sum_{c \in \mathcal{A}(D)} \max \{ \ell_{\tau}(\lambda) : \lambda \in \mathbb{N}_D^{N+1}, M_{\mathcal{A}}(\lambda) = c \} ,$$

$$e_{\tau}(X_{\mathcal{A}}) = (n+1)! \int_{Q_{\mathcal{A}}} \vartheta_{\mathcal{A}, \tau} dx_1 \cdots dx_n .$$

Démonstration. — L'application $\varphi_{\mathcal{A}} : \mathbb{T}^n = (\mathbb{K}^{\times})^n \rightarrow X_{\mathcal{A}}^{\circ}$ est un isomorphisme à cause de l'hypothèse $L_{\mathcal{A}} = \mathbb{Z}^n$. Au niveau des algèbres cela se traduit par un isomorphisme

$$(\varphi_{\mathcal{A}})^* : \mathbb{K}[X_{\mathcal{A}}^{\circ}] = (\mathbb{K}[x_0, \dots, x_N]/I(X_{\mathcal{A}}))_{x_0 \cdots x_N} \rightarrow \mathbb{K}[s_1^{\pm 1}, \dots, s_n^{\pm 1}] , \quad x_i \mapsto s^{a_i}$$

mettant en correspondance les monômes de $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_N]$ avec ceux de $\mathbb{K}[s_1^{\pm 1}, \dots, s_n^{\pm 1}]$. En identifiant ces ensembles avec \mathbb{N}^{N+1} et \mathbb{Z}^n respectivement, on vérifie que cette correspondance se traduit en l'application linéaire $M_{\mathcal{A}} : \mathbb{N}^{N+1} \rightarrow \mathbb{Z}^n$. Donc, un ensemble $J \subset \mathbb{N}_D^{N+1}$ correspond à une base monomiale de $(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_N]/I(X_{\mathcal{A}}))_D$ si et seulement si $M_{\mathcal{A}} : J \rightarrow \mathcal{A}(D)$ est une *bijection*, ce qui démontre la première formule de la proposition.

Considérons maintenant la fonction auxiliaire

$$\rho(D) := \sum_{\gamma \in Q \cap \frac{1}{D} \mathbb{Z}^n} \vartheta_{\mathcal{A}, \tau}(\gamma) ,$$

c'est-à-dire D^n fois la somme de Riemann de la fonction $\vartheta_{\mathcal{A}, \tau}$ sur le polytope $Q := Q_{\mathcal{A}}$. On va comparer le poids de Hilbert $s_{\tau}(X_{\mathcal{A}}; D)$ à cette fonction, ce qui donnera l'asymptotique, puis l'expression intégrale cherchée pour le poids de Chow.

Par translation on se ramène au cas $\tau \in \mathbb{R}_+^{N+1}$. Alors, pour $c \in \mathcal{A}(D)$ on a $\gamma := \frac{c}{D} \in Q \cap \frac{1}{D} \mathbb{Z}^n$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{N}_D^{N+1}$ tel que $M_{\mathcal{A}}(\lambda) = c$ on a $\ell_{\tau}(\lambda) \leq D \vartheta_{\mathcal{A}, \tau}(\gamma)$ car

$$\vartheta_{\mathcal{A}, \tau}(\gamma) = \max \{ \ell_{\tau}(t) : t \in \mathbb{R}_+^{N+1}, t_0 + \dots + t_N = 1, M_{\mathcal{A}}(t) = \gamma \} .$$

De plus, $\vartheta_{\mathcal{A}, \tau}(\gamma) \geq 0$ pour tout $\gamma \in Q \cap \frac{1}{D} \mathbb{Z}^n$ à cause de l'hypothèse $\tau \in \mathbb{R}_+^{N+1}$, donc $s_{\tau}(X_{\mathcal{A}}; D) \leq D \rho(D)$. On en déduit, en appliquant l'asymptotique (III.1),

$$\frac{e_{\tau}(X_{\mathcal{A}})}{(n+1)!} = \lim_{D \rightarrow \infty} \frac{s_{\tau}(X_{\mathcal{A}}; D)}{D^{n+1}} \leq \lim_{D \rightarrow \infty} \frac{\rho(D)}{D^n} = \int_Q \vartheta_{\mathcal{A}, \tau} dx_1 \cdots dx_n .$$

Pour l'autre direction, quitte à permuter les variables et à translater les a_i et les τ_i , on suppose $\tau_0 \leq \tau_i$ pour tout i et $a_0 = \tau_0 = 0$. D'abord on va montrer qu'il existe $D_0 \in \mathbb{N}$ et $v_0 \in \mathbb{Z}^n$ tels que pour tout D on ait

$$D Q \cap \mathbb{Z}^n \subset \mathcal{A}(D + D_0) - v_0 .$$

Soit $\Lambda_{\mathcal{A}}$ un domaine fondamental quelconque du réseau $\text{Ker}(M_{\mathcal{A}}) \cap \mathbb{Z}^{N+1}$ de l'espace linéaire $\text{Ker}(M_{\mathcal{A}})$; on prend aussi $w_0 \in \mathbb{Z}^{N+1}$ tel que $\Lambda_{\mathcal{A}} + w_0 \subset \mathbb{R}_+^{N+1}$. Soit $c \in DQ \cap \mathbb{Z}^n$, qu'on écrira

$$c = \mu_0 a_0 + \cdots + \mu_N a_N = D(t_0 a_0 + \cdots + t_N a_N)$$

avec $\mu := (\mu_0, \dots, \mu_N) \in \mathbb{Z}^{N+1}$ et $t := (t_0, \dots, t_N) \in \mathbb{R}_+^{N+1}$ tel que $t_0 + \cdots + t_N = 1$; ainsi $\mu - Dt \in \text{Ker}(M_{\mathcal{A}})$. Soit $\nu \in \text{Ker}(M_{\mathcal{A}}) \cap \mathbb{Z}^{N+1}$ tel que $\mu - Dt - \nu \in \Lambda_{\mathcal{A}}$, on pose alors $\lambda := \mu - \nu + w_0 \in \mathbb{Z}^{N+1}$. On a $\lambda \in \Lambda_{\mathcal{A}} + w_0 + Dt \subset \mathbb{R}_+^{N+1}$, d'où on déduit facilement $\lambda \in \mathbb{N}_{D+D_1}^{N+1}$ avec $D_1 \leq D_0 := \max\{\xi_0 + \cdots + \xi_N : \xi \in \Lambda_{\mathcal{A}} + w_0\}$. Finalement, on pose $v_0 := M_{\mathcal{A}}(w_0) \in \mathbb{Z}^n$ et on a bien

$$c = M_{\mathcal{A}}(\mu) = M_{\mathcal{A}}(\lambda) - v_0 \in \mathcal{A}(D + D_0) - v_0 ,$$

car $\mathcal{A}(D + D_1) \subset \mathcal{A}(D + D_0)$ à cause de l'hypothèse $a_0 = 0$.

Maintenant, soit $\gamma \in Q \cap \frac{1}{D} \mathbb{Z}^n$ et $t \in \mathbb{R}_+^{N+1}$ tels que $t_0 + \cdots + t_N = 1$, $\gamma = M_{\mathcal{A}}(t)$ et de plus $\vartheta_{\mathcal{A},\tau}(\gamma) = \ell_{\tau}(t)$. On pose alors $c := D\gamma \in DQ \cap \mathbb{Z}^n$ et, suivant l'argument précédent, on prend $\lambda \in \mathbb{N}_{D+D_0}^{N+1}$ tel que $c = M_{\mathcal{A}}(\lambda) - v_0$ et $\lambda - Dt \in \Lambda_{\mathcal{A}} + w_0$. Alors

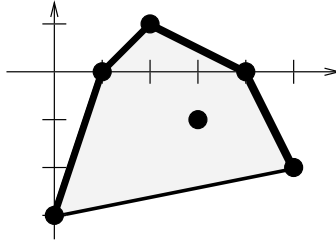
$$D\vartheta_{\mathcal{A},\tau}(\gamma) = D \sum_{i=1}^N \tau_i t_i = \sum_{i=1}^N \tau_i \lambda_i - \sum_{i=1}^N \tau_i (\lambda_i - D t_i) = \ell_{\tau}(\lambda) + O(1) ,$$

d'où $D\rho(D) \leq s_{\tau}(X_{\mathcal{A}}; D + D_0) + O(D^n)$. En appliquant à nouveau l'asymptotique (III.1) on obtient

$$\frac{e_{\tau}(X_{\mathcal{A}})}{(n+1)!} = \lim_{D \rightarrow \infty} \frac{s_{\tau}(X_{\mathcal{A}}; D + D_0)}{D^{n+1}} \geq \lim_{D \rightarrow \infty} \frac{\rho(D)}{D^n} = \int_Q \vartheta_{\mathcal{A},\tau} dx_1 \cdots dx_n .$$

□

Exemple III.2. — Considérons la courbe rationnelle normale $C \subset \mathbb{P}^5$, adhérence de l'image de l'application $s \mapsto (1 : s : s^2 : s^3 : s^4 : s^5)$, avec le poids $\tau := (-3, 0, 1, -1, 0, -2) \in \mathbb{R}^6$. La figure suivante illustre le polytope associé et sa toiture:



Le poids de Chow correspondant est 2 fois l'intégrale de la paramétrisation de sa toiture, soit $e_{\tau}(C) = -2$.

Signalons que l'expression intégrale des poids de Chow de $X_{\mathcal{A}}$ est également implicite dans [Don02, § 4.2]. Alternativement, on peut l'obtenir aussi comme conséquence des résultats de I.M. Gelfand, M.M. Kapranov et A.V. Zelevinski sur le polytope de Newton du \mathcal{A} -résultant [GKZ94, Ch. 7 et 8]. Dans les lignes suivantes on indique brièvement comment faire cela; on supposera une certaine familiarité avec les objets et notations de cette référence.

Tout d'abord on remarque qu'il suffit de démontrer l'énoncé pour un choix générique (au sens de Zariski) du vecteur τ dans \mathbb{Q}^{N+1} , puisque les termes considérés sont continus par rapport à τ . Par linéarité, on peut supposer de plus $\tau \in \mathbb{Z}^{N+1}$.

Soit T la sous-division polyédrale du polytope $Q_{\mathcal{A}}$ induite par τ comme dans [GKZ94, Ch. 7, Exemple 1.1, p. 215]; c'est une *triangulation* car τ est supposé générique. Le théorème 3.3 de [GKZ94, Ch. 8, p. 261] implique $e_{\tau}(X_{\mathcal{A}}) = \langle \tau, \varphi_T \rangle$, où $\varphi_T \in \mathbb{R}^{N+1}$ est la *fonction caractéristique de T* (voir *loc. cit.*, § 7.1.D, p. 220) et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire standard de \mathbb{R}^{N+1} . La condition $\tau \in \mathbb{Z}^{N+1} \cap \text{Int}(C(T))$ est satisfaite par définition de $C(T)$, voir *loc. cit.*, Ch. 7, Déf. 1.4, p. 219. En recollant avec la définition de φ_T (Ch. 7, Identité (1.4), p. 220 de *loc. cit.*) ceci implique

$$e_\tau(X_{\mathcal{A}}) = \sum_{i=0}^N \left(\tau_i \sum_{\sigma} n! \text{Vol}_n(\sigma) \right) ,$$

où la deuxième somme porte sur les faces $\sigma \in T$ de dimension n dont a_i est un sommet. Chacun de ces σ étant un simplexe, on vérifie aisément

$$\frac{1}{n+1} \text{Vol}_n(\sigma) \left(\sum_{i: a_i \in S(\sigma)} \tau_i \right) = \int_{\sigma} \vartheta_{\mathcal{A}, \tau} dx_1 \cdots dx_n ,$$

où $S(\sigma)$ dénote l'ensemble des sommets du simplexe σ . Des alinéas précédents il suit enfin

$$\begin{aligned} \frac{e_\tau(X_{\mathcal{A}})}{(n+1)!} &= \sum_{\sigma \in T} \frac{1}{n+1} \left(\sum_{i: a_i \in S(\sigma)} \tau_i \right) \text{Vol}_n(\sigma) \\ &= \sum_{\sigma \in T} \int_{\sigma} \vartheta_{\mathcal{A}, \tau} dx_1 \cdots dx_n = \int_{Q_{\mathcal{A}}} \vartheta_{\mathcal{A}, \tau} dx_1 \cdots dx_n . \end{aligned}$$

Corollaire III.3. — Avec les notations de la proposition III.1 on a

$$e_\tau(X_{\mathcal{A}}) + e_{-\tau}(X_{\mathcal{A}}) = (n+1)! \text{Vol}_{n+1}(Q_{\mathcal{A}, \tau}) .$$

Démonstration. — Il suffit de remarquer que $\vartheta_{\mathcal{A}, \tau}(x) + \vartheta_{\mathcal{A}, -\tau}(x)$ est égal à l'épaisseur de $Q_{\mathcal{A}, \tau}$ au-dessus du point $x \in Q_{\mathcal{A}}$. \square

Ce résultat nous permet, par exemple, de calculer la hauteur d'une variété torique définie sur un corps de base $F := \mathbb{K}(t)$ (corps des fractions rationnelles en une variable t sur \mathbb{K}). Pour $\alpha \in F^\times$ et $v \in \mathbb{K}$ on pose $\text{ord}_v(\alpha)$ l'ordre d'annulation de la fonction α au point v . On pose également $\text{ord}_\infty(\alpha) := \deg(\alpha)$ l'ordre d'annulation de α à l'infini. Avec ces conventions on a

$$(III.2) \quad \sum_{v \in \{\infty\} \cup \mathbb{K}} \text{ord}_v(\alpha) = 0 .$$

On pose maintenant, pour $\gamma = (\gamma_0 : \cdots : \gamma_M) \in \mathbb{P}^M(F)$,

$$h(\gamma) := \sum_{v \in \{\infty\} \cup \mathbb{K}} \max\{\text{ord}_v(\gamma_0), \dots, \text{ord}_v(\gamma_M)\} \in \mathbb{N} ,$$

qui est bien définie grâce à la formule (III.2). Finalement, la hauteur d'une F -sous-variété $X \subset \mathbb{P}^N(\overline{F})$ est par définition, celle de sa forme de Chow: $h(X) := h(\text{Ch}_X)$, par analogie avec le cas des corps de nombres.

Proposition III.4. — Soit $\mathcal{A} \in (\mathbb{Z}^n)^{N+1}$ tel que $L_{\mathcal{A}} = \mathbb{Z}^n$, $\tau \in \mathbb{Z}^{N+1}$. Soit $X_{\mathcal{A}, \tau} \subset \mathbb{P}^N(\overline{F})$ l'adhérence de Zariski de l'application monomiale

$$\mathbb{T}^n(\overline{F}) \rightarrow \mathbb{P}^N(\overline{F}) , \quad s \mapsto (t^{\tau_0} s^{a_0} : \cdots : t^{\tau_N} s^{a_N}) ,$$

alors $h(X_{\mathcal{A}, \tau}) = (n+1)! \text{Vol}_{n+1}(Q_{\mathcal{A}, \tau})$.

Démonstration. — Soit $\text{Ch}_{X_{\mathcal{A}}} \in \mathbb{K}[U_0, \dots, U_n]$ la forme de Chow de $X_{\mathcal{A}}$, la variété torique correspondant à $\tau = \mathbf{0}_{N+1}$. Alors

$$\text{Ch}_{X_{\mathcal{A}, \tau}} = \text{Ch}_{X_{\mathcal{A}}}(t^{-\tau_j} U_{i,j} : 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq N) \in F[U_0, \dots, U_n]$$

est un polynôme de Laurent en t , dont la hauteur est égale à la somme de ses valuations t -adique et $\frac{1}{t}$ -adique, soit:

$$h(X_{\mathcal{A}, \tau}) = \text{ord}_0(\text{Ch}_{X_{\mathcal{A}, \tau}}) + \text{ord}_\infty(\text{Ch}_{X_{\mathcal{A}, \tau}}) = e_\tau(X_{\mathcal{A}}) + e_{-\tau}(X_{\mathcal{A}}) = (n+1)! \text{Vol}_{n+1}(Q_{\mathcal{A}, \tau})$$

d'après le corollaire III.3. \square

III.2. Démonstration du théorème 0.1. — Dans ce paragraphe on explicite la fonction de Hilbert arithmétique et la hauteur normalisée d'une variété torique. On montre que ces invariants numériques se décomposent en somme finie de contributions locales, chaque terme étant un poids de Hilbert et un poids de Chow, respectivement.

On reprend $\overline{\mathbb{Q}}$ comme corps de base. Soit $\mathcal{A} \in (\mathbb{Z}^n)^{N+1}$ tel que $L_{\mathcal{A}} = \mathbb{Z}^n$ et $\alpha \in (K^\times)^{N+1}$. Soit $X_{\mathcal{A},\alpha} \subset \mathbb{P}^N$ la sous-variété torique associée et notons $\tau_{\alpha v} := (\log |\alpha_0|_v, \dots, \log |\alpha_N|_v) \in \mathbb{R}^{N+1}$ le poids de α relatif à une place $v \in M_K$.

Proposition III.5. — $\mathcal{H}_{\text{norm}}(X_{\mathcal{A},\alpha}; D) = \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} s_{\tau_{\alpha v}}(X_{\mathcal{A}}; D)$ pour tout $D \in \mathbb{N}$.

Démonstration. — Soit $\{(x^\lambda)^\vee : \lambda \in \mathbb{N}_D^{N+1}\}$ la base de $K[x_0, \dots, x_N]_D^\vee$ duale de celle des monômes, et pour $c \in \mathcal{A}(D)$ on pose

$$q_c := \sum_{\lambda \in \mathbb{N}_D^{N+1}; M_{\mathcal{A}}(\lambda)=c} \alpha^\lambda (x^\lambda)^\vee .$$

Ainsi, pour une forme $f = \sum_\lambda f_\lambda x^\lambda \in K[x_0, \dots, x_N]_D$ et un point $s \in \mathbb{T}^n$ on a

$$f \circ \varphi_{\mathcal{A},\alpha}(s) = \sum_{\lambda \in \mathbb{N}_D^{N+1}} f_\lambda \alpha^\lambda s^{M_{\mathcal{A}}(\lambda)} = \sum_{c \in \mathcal{A}(D)} q_c(f) s^c .$$

Soit $I := I(X_{\mathcal{A},\alpha}) \subset K[x_0, \dots, x_N]$ l'idéal de définition de $X_{\mathcal{A},\alpha}$; on voit ainsi que $f \in I_D$ si et seulement si $q_c(f) = 0$ pour tout c . Donc l'ensemble $\{q_c : c \in \mathcal{A}(D)\}$ forme une base de l'annulateur $\text{Ann}(I_D)$ et alors la proposition II.3 implique

$$\mathcal{H}_{\text{norm}}(X_{\mathcal{A},\alpha}; D) = \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \left| \bigwedge_{c \in \mathcal{A}(D)} q_c \right|_v .$$

Pour $v \in M_K$ on a

$$\log |q_c|_v = \log \max \{ |\alpha^\lambda|_v : \lambda \in \mathbb{N}_D^{N+1}, M_{\mathcal{A}}(\lambda) = c \} = \max \{ \ell_{\tau_{\alpha v}}(\lambda) : \lambda \in \mathbb{N}_D^{N+1}, M_{\mathcal{A}}(\lambda) = c \}$$

où $\ell_{\tau_{\alpha v}}$ désigne la forme linéaire associée au poids $\tau_{\alpha v}$. Le fait que les supports des composantes non nulles des vecteurs q_c soient disjoints et la proposition III.1 entraînent

$$\log \left| \bigwedge_c q_c \right|_v = \sum_c \log |q_c|_v = s_{\tau_{\alpha v}}(X_{\mathcal{A}}) ,$$

ce qui achève la démonstration. \square

Maintenant on énonce et démontre le théorème 0.1 dans sa version générale, c.-à-d. pour un vecteur \mathcal{A} quelconque. On rappelle que $\mu_{\mathcal{A}}$ désigne la forme volume sur l'espace linéaire $L_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ associée à \mathcal{A} , voir § I.1.

Théorème III.6. — Soit $\mathcal{A} \in (\mathbb{Z}^n)^{N+1}$ et $\alpha \in (K^\times)^{N+1}$. Posons $r := \dim(Q_{\mathcal{A}})$, alors

$$\widehat{h}(X_{\mathcal{A},\alpha}) = (r+1)! \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \int_{Q_{\mathcal{A}}} \vartheta_{\mathcal{A},\tau_{\alpha v}} \mu_{\mathcal{A}} .$$

Démonstration du théorème III.6 et de la proposition 0.4. — Supposons pour le moment $L_{\mathcal{A}} = \mathbb{Z}^n$. Notons que $\tau_{\alpha v} = 0$ pour presque tout v , donc la décomposition de $\mathcal{H}_{\text{norm}}$ ne contient qu'un nombre fini de poids de Hilbert non nuls. On déduit de la proposition précédente et de l'asymptotique (III.1)

$$\mathcal{H}_{\text{norm}}(X_{\mathcal{A},\alpha}; D) = \frac{c(X_{\mathcal{A},\alpha})}{(n+1)!} D^{n+1} + O(D^n)$$

avec $c(X_{\mathcal{A},\alpha}) := \sum_v \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} e_{\tau_{\alpha v}}(X_{\mathcal{A}})$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, alors $[k]X_{\mathcal{A},\alpha} = X_{\mathcal{A},[k]\alpha}$ puisque $[k]X_{\mathcal{A}}^{\circ} = X_{\mathcal{A}}^{\circ}$; en particulier $\deg([k]X_{\mathcal{A},\alpha}) = \deg(X_{\mathcal{A},\alpha})$. On a aussi $\tau_{[k]\alpha v} = k \tau_{\alpha v}$, ce qui implique $c([k]X_{\mathcal{A},\alpha}) = k \cdot c(X_{\mathcal{A},\alpha})$. De plus

$$0 \leq h([k]X_{\mathcal{A},\alpha}) - c([k]X_{\mathcal{A},\alpha}) \leq \frac{n+1}{2} \log(N+1) \deg(X_{\mathcal{A},\alpha}) ,$$

grâce à l'encadrement (II.8), donc $c(X_{\mathcal{A},\alpha}) = \deg(X_{\mathcal{A},\alpha}) \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h([k]X_{\mathcal{A},\alpha})}{k \deg([k]X_{\mathcal{A},\alpha})} = \widehat{h}(X_{\mathcal{A},\alpha})$. On conclut par application de la proposition III.1.

Considérons maintenant le cas général. Soit $\eta : \mathbb{R}^r \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire injective définie sur \mathbb{Z} telle que $\eta(\mathbb{Z}^r) = L_{\mathcal{A}}$. On pose $b_i := \eta^{-1}(a_i) \in \mathbb{Z}^r$ puis $\mathcal{B} := (b_0, \dots, b_N) \in (\mathbb{Z}^r)^{N+1}$, alors $X_{\mathcal{B},\alpha} = X_{\mathcal{A},\alpha}$ [GKZ94, Ch.5, Prop. 1.2]. On vérifie $\eta(Q_{\mathcal{B}}) = Q_{\mathcal{A}}$, $\vartheta_{\mathcal{B},\tau_{\alpha v}} = \vartheta_{\mathcal{A},\tau_{\alpha v}} \circ \eta$ et $\eta^*(\mu_{\mathcal{A}}) = dx_1 \cdots dx_r$, d'où

$$\int_{Q_{\mathcal{B}}} \vartheta_{\mathcal{B},\tau_{\alpha v}} dx_1 \cdots dx_r = \int_{Q_{\mathcal{A}}} \vartheta_{\mathcal{A},\tau_{\alpha v}} \mu_{\mathcal{A}} .$$

On a $L_{\mathcal{B}} = \eta^{-1}(L_{\mathcal{A}}) = \mathbb{Z}^r$, ce qui nous ramène au cas précédemment considéré. \square

Notons qu'on a en particulier répondu affirmativement à la question II.2 pour les variétés toriques.

Alternativement, on peut reformuler le théorème 0.1 sous la forme

$$\widehat{h}(X_{\mathcal{A},\alpha}) = (n+1)! \int_{Q_{\mathcal{A}}} \theta_{\mathcal{A},\alpha} dx_1 \cdots dx_n$$

avec $\theta_{\mathcal{A},\alpha} := \sum_v \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \vartheta_{\mathcal{A},\tau_{\alpha v}}$. Cette fonction est concave et affine par morceaux, car elle est somme d'un nombre fini de fonction de ce type; de plus $\theta_{\mathcal{A},\alpha}$ est à valeurs *positives*: pour $0 \leq i \leq N$ on a $\vartheta_{\mathcal{A},\tau_{\alpha v}}(a_i) \geq \log |\alpha_i|_v$ et donc

$$\theta_{\mathcal{A},\alpha}(a_i) \geq \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log |\alpha_i|_v = 0$$

par la formule du produit. De là on déduit $\theta_{\mathcal{A},\alpha}(x) \geq 0$ pour tout $x \in Q_{\mathcal{A}}$, à cause de la concavité.

Remarque III.7. — Si $\widehat{h}(X_{\mathcal{A},\alpha}) = 0$ on a nécessairement $\theta_{\mathcal{A},\alpha} \equiv 0$, ce qui entraîne que $\vartheta_{\mathcal{A},\tau_{\alpha v}}$ est une fonction affine sur $Q_{\mathcal{A}}$ pour tout $v \in M_K$. On en déduit qu'il existe $\beta \in X_{\mathcal{A}}^{\circ}$ tel que $\xi = \alpha \cdot \beta^{-1}$ vérifie $\vartheta_{\mathcal{A},\tau_{\xi v}} \equiv 0$ pour tout $v \in M_K$. Donc $\xi \in \text{Tors}(\mathbb{T}^N)$ et ainsi $X_{\mathcal{A},\alpha} = X_{\mathcal{A},\xi}$ est une sous-variété de torsion de $(\mathbb{P}^N)^{\circ}$, ce qui fournit, pour les variétés toriques, une autre preuve de la positivité de la hauteur normalisée d'une variété qui n'est pas de torsion.

Exemple III.8. — Soit $\mathcal{A} := (a_0, \dots, a_{N-1}, a_N) \in (\mathbb{Z}^n)^{N+1}$ tel que $L_{\mathcal{A}} = \mathbb{Z}^n$, on note comme précédemment $Q_{\mathcal{A}} = \text{Conv}(a_0, \dots, a_{N-1})$ et soit aussi $\alpha = (1, \dots, 1, \alpha_N) \in (K^{\times})^{N+1}$. Pour chaque $v \in M_K$ on a

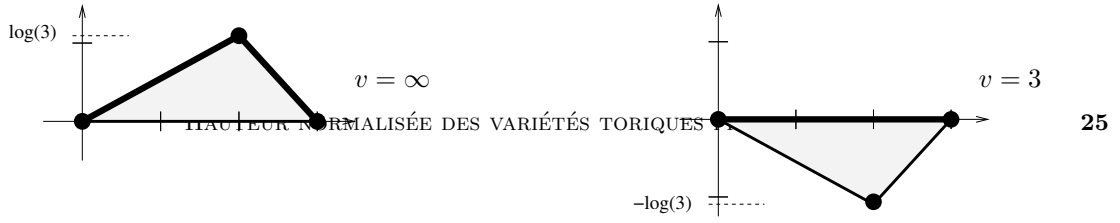
$$\int_{Q_{\mathcal{A}}} \vartheta_{\mathcal{A},\tau_{\alpha v}} dx_1 \cdots dx_n = \frac{1}{n+1} \text{Vol}_n(Q_{\mathcal{A}}) \log \max\{1, |\alpha_N|_v\} = \frac{1}{n+1} \text{Vol}_n(Q_{\mathcal{A}}) \log |\alpha|_v$$

d'où

$$\widehat{h}(X_{\mathcal{A},\alpha}) = n! \text{Vol}_n(Q_{\mathcal{A}}) \widehat{h}(\alpha) = \deg(X_{\mathcal{A},\alpha}) \widehat{h}(\alpha) .$$

Par exemple, considérons la courbe plane $C \subset \mathbb{P}^2$, adhérence de l'image de $\mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$, $s \mapsto (1 : 3s^2 : s^3)$. Les figures suivantes montrent les polytopes associés et leurs toitures:

et $\vartheta_v \equiv 0$ pour $v \neq \infty, 3$; donc $\widehat{h}(C) = 3 \log(3)$.



Cet exemple contient le cas des *hypersurfaces* binomiales, qui est toutefois plus simple à traiter directement. Soit $f = x^a - \lambda x^b \in K[x_0, \dots, x_N]$ une forme irréductible, alors pour chaque place archimédienne $v \in M_K^\infty$ on peut calculer la mesure de Mahler correspondante à l'aide de la formule de Jensen, on a $\mu_v(f) := \mu(x^a - |\lambda|_v x^b) = \log \max\{1, |\lambda|_v\}$. Ainsi

$$\widehat{h}(Z(f)) = \sum_{v \in M_K^\infty} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \mu_v(f) + \sum_{v \in M_K \setminus M_K^\infty} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log |f|_v = h((1 : \lambda)) .$$

Maintenant soit $[-1] : (\mathbb{P}^N)^\circ \rightarrow (\mathbb{P}^N)^\circ$, $(x_0 : \dots : x_N) \mapsto (x_0^{-1} : \dots : x_N^{-1})$ l'application d'inversion. On obtient une expression pour la somme de la hauteur de $X_{\mathcal{A}, \alpha}$ et de sa variété symétrique, dont les termes locaux sont des volumes de polytopes:

Corollaire III.9. — Soit $\mathcal{A} \in (\mathbb{Z}^n)^{N+1}$ tel que $L_{\mathcal{A}} = \mathbb{Z}^n$ et $\alpha \in (K^\times)^{N+1}$, alors

$$\widehat{h}(X_{\mathcal{A}, \alpha}) + \widehat{h}([-1] X_{\mathcal{A}, \alpha}) = (n+1)! \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \text{Vol}_{n+1}(Q_{\mathcal{A}, \tau_{\alpha v}}) .$$

Démonstration. — On a $[-1] X_{\mathcal{A}, \alpha} = X_{\mathcal{A}, [-1]\alpha}$ et $\tau_{[-1]\alpha v} = -\tau_{\alpha v}$; le résultat est donc une conséquence immédiate du théorème 0.1 et du corollaire III.3. \square

Considérons un espace ambiant \mathbb{T}^N muni de la hauteur normalisée \widehat{h}_ι relative aux plongement $\iota : \mathbb{T}^N \hookrightarrow \mathbb{P}^{2^N-1}$, composition de l'inclusion $\mathbb{T}^N \hookrightarrow (\mathbb{P}^1)^N$ avec le plongement de Segre $(\mathbb{P}^1)^N \hookrightarrow \mathbb{P}^{2^N-1}$, voir § I.2. Le plongement ι est équivariant, donc pour une sous-variété $Y \subset \mathbb{T}^N$ on a $\widehat{h}_\iota(Y) = \widehat{h}_{\mathbb{P}^N}(\overline{\iota(Y)})$ d'après la proposition I.1. De plus, notons que cette hauteur est invariante par rapport à l'inversion: on a $[-1]Y = \sigma(Y)$ où $\sigma : ((x_1 : y_1), \dots, (x_N : y_N)) \mapsto ((y_1 : x_1), \dots, (y_N : x_N))$, donc $\widehat{h}_\iota([-1]Y) = \widehat{h}_\iota(Y)$.

Soit maintenant $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_N) \in (\mathbb{Z}^n)^N$ tel que $L_{\mathcal{B}} = \mathbb{Z}^n$ et $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N) \in (K^\times)^N$. Considérons l'application monomiale

$$\mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^N, \quad s \mapsto (\beta_1 s^{b_1}, \dots, \beta_N s^{b_N})$$

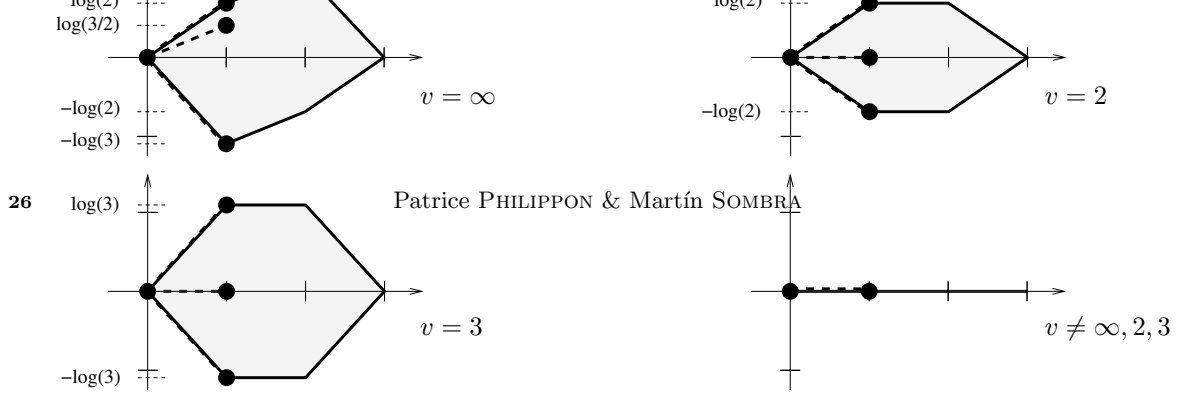
et posons $Y_{\mathcal{B}, \beta} \subset \mathbb{T}^N$ son image. On vérifie alors que $\overline{s(Y_{\mathcal{B}, \beta})} \subset \mathbb{P}^{2^N-1}$ est la variété torique correspondant aux vecteurs

$$\left(\sum_{i \in I} b_i : I \subset \{1, \dots, N\} \right) \in (\mathbb{Z}^n)^{2^N}, \quad \left(\prod_{i \in I} \beta_i : I \subset \{1, \dots, N\} \right) \in (K^\times)^{2^N} .$$

Pour $v \in M_K$ et $i = 1, \dots, N$ on considère le segment $P_{i,v} := \text{Conv}(\mathbf{0}, (b_i, \log |\beta_i|_v)) \subset \mathbb{R}^{n+1}$; ainsi le polytope associé à la variété torique $s(Y_{\mathcal{B}, \beta})$ pour la place v est donné par la somme de Minkowski $P_{0,v} + \dots + P_{N,v}$. Le corollaire III.9 entraîne

$$(III.3) \quad \widehat{h}_\iota(Y_{\mathcal{B}, \beta}) = \frac{(n+1)!}{2} \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \text{Vol}_{n+1}(P_{0,v} + \dots + P_{N,v}) .$$

Comme illustration de cette formule, considérons la courbe $C \subset \mathbb{T}^3 \hookrightarrow (\mathbb{P}^1)^3 \xrightarrow{\text{Segre}} \mathbb{P}^7$ image de l'application $s \mapsto (2s, \frac{1}{3}s, \frac{3}{2}s)$. Les figures suivantes montrent les segments $P_{i,v}$ (en trait discontinu) et les polytopes associés, pour chaque place $v \in M_{\mathbb{Q}}$:



donc $\widehat{h}_i(C) = 6 \log(2) + 6 \log(3)$.

IV. Sur quelques constructions standard

Dans la suite nous étendons les résultats de la section précédente au cas d'un tore muni de plusieurs plongements monomiaux. D'abord, on introduit les multiploids de Chow et on établit ses propriétés essentielles; notre approche s'appuie sur les formes résultantes d'idéaux multihomogènes, déjà considérées au paragraphe I.2.

Puis, on introduit la notion d'intégrale mixte d'une famille de fonctions concaves. On montre ensuite que le multiploid du tore \mathbb{T}^n relatif à plusieurs plongements monomiaux s'écrit comme une intégrale mixte. Finalement, on explicite la multihauteur normalisée de \mathbb{T}^n relative à des plongements monomiaux. Cette multihauteur se décompose comme somme de contributions locales, chaque terme étant l'intégrale mixte de l'ensemble de fonctions concaves et affines par morceaux associées à ces plongements monomiaux, pour la place $v \in M_K$ correspondante.

On étudie également le comportement de la famille de fonctions $\Theta_{\mathcal{A}, \alpha}$ par rapport à d'autres constructions: décomposition de $X_{\mathcal{A}, \alpha}$ en orbites sous l'action $*_{\mathcal{A}}$, formation de joints, produits de Segre et plongements de Veronese.

IV.1. Décomposition en orbites. — Soit $\mathcal{A} \in (\mathbb{Z}^n)^{N+1}$ et $\alpha \in (K^\times)^{N+1}$, les orbites de l'action $*_{\mathcal{A}}$ sur $X_{\mathcal{A}, \alpha}$ sont en correspondance avec l'ensemble $F(Q_{\mathcal{A}})$ des faces du polytope $Q_{\mathcal{A}}$. Pour chaque face P on considère un point $\alpha_P := (\alpha_{P,0} : \cdots : \alpha_{P,N}) \in \mathbb{P}^N$ défini par $\alpha_{P,j} := \alpha_j$ si $a_j \in P$ et $\alpha_{P,j} := 0$ sinon; la bijection est donnée par [GKZ94, Ch. 5, Prop. 1.9], [Ful93, § 3.1]

$$P \mapsto X_{\mathcal{A}, \alpha, P}^\circ := \mathbb{T}^n *_{\mathcal{A}} \alpha_P \subset \mathbb{P}^N .$$

On a la décomposition $X_{\mathcal{A}, \alpha} = \bigsqcup_{P \in F(Q_{\mathcal{A}})} X_{\mathcal{A}, \alpha, P}^\circ$, posons $N(P) := \text{Card}\{i : a_i \in P\} - 1$ et

$$\mathcal{A}(P) = (a_i : a_i \in P) \in (\mathbb{Z}^n)^{N(P)+1} , \quad \alpha(P) := (\alpha_i : a_i \in P) \in (K^\times)^{N(P)+1} .$$

On vérifie que $X_{\mathcal{A}, \alpha, P}^\circ \subset \mathbb{P}^N$ est l'orbite principale d'une variété torique contenue dans un sous-espace standard $E \cong \mathbb{P}^{N(P)}$. Restreinte à ce sous-espace, elle s'identifie à la sous-variété $X_{\mathcal{A}(P), \alpha(P)}^\circ \subset \mathbb{P}^{N(P)}$, de dimension égale à la dimension (réelle) de la face P .

Finalement, chaque orbite est en correspondance avec une certaine face P du polytope $Q_{\mathcal{A}}$. Similairement la famille de fonctions $\Theta_{\mathcal{A}(P), \alpha(P)}$ associée à l'orbite, est la *restriction* à la face P de la famille $\Theta_{\mathcal{A}, \alpha}$ associée à l'action $*_{\mathcal{A}}$ et au point α :

Proposition IV.1. — Pour chaque $v \in M_K$ on a $\vartheta_{\mathcal{A}(P), \tau_{\alpha(P)} v} = \vartheta_{\mathcal{A}, \tau_{\alpha} v} \big|_P$.

IV.2. Multiploids de Chow. — On se place à nouveau sur un corps de base \mathbb{K} algébriquement clos. Soient X une variété (non plongée) de dimension n et $\varphi_i : X \dashrightarrow \mathbb{P}^{N_i}$ des applications rationnelles, *plongements* sur un ouvert dense de X ($i = 0, \dots, n$). On pose $\Phi : X \rightarrow \prod_{i=0}^n \mathbb{P}^{N_i}$, $x \mapsto (\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x))$, et on considère la forme résultante

$$\text{Rés}_{\varphi_0, \dots, \varphi_n} := \text{rés}_{e_0, \dots, e_n} (I(\Phi(X))) \in \mathbb{K}[U_0, \dots, U_n]$$

de l'idéal premier multihomogène $I(\Phi(X)) \subset \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ d'indice e_0, \dots, e_n , dans la notation du paragraphe I.2.

Définition IV.2. — Soient $\tau_0 \in \mathbb{R}^{N_0+1}, \dots, \tau_n \in \mathbb{R}^{N_n+1}$ des poids et t une variable additionnelle. Le multipoids de Chow de X relatif à $(\varphi_0, \tau_0), \dots, (\varphi_n, \tau_n)$ est

$$e_{\tau_0, \dots, \tau_n}(\varphi_0, \dots, \varphi_n; X) := \deg_t (\text{Rés}_{\varphi_0, \dots, \varphi_n}(t^{\tau_{ij}} U_{ij} : 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq N_i)) \in \mathbb{R}.$$

Remarquons que pour $\tau_0 := (1, \dots, 1)$ et $\tau_i := 0$ pour $1 \leq i \leq n$,

$$e_{\tau_0, \dots, \tau_n}(\varphi_0, \dots, \varphi_n; X) := \deg_{U_0}(\text{Rés}_{\varphi_0, \dots, \varphi_n})$$

ne dépend pas du plongement φ_0 [**Rem01a**, Prop. 3.4]; c'est le *multidegré* de X relatif à $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

Soient $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^N, \psi : X \rightarrow \mathbb{P}^P$ des applications projectives, on pose

$$\varphi \oplus \psi : X \rightarrow \mathbb{P}^{(N+1)(P+1)-1}$$

la composition de $X \rightarrow \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^P, x \mapsto (\varphi(x), \psi(x))$ avec le plongement de Segre. On obtient ainsi une structure de semi-groupe commutatif sur l'ensemble des applications projectives de X . Pour $\tau \in \mathbb{R}^{N+1}, \omega \in \mathbb{R}^{P+1}$ on pose $\tau \oplus \omega := (\tau_i + \omega_j : 0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq P) \in \mathbb{R}^{(N+1)(P+1)}$, ainsi $(\varphi, \tau) \oplus (\psi, \omega) := (\varphi \oplus \psi, \tau \oplus \omega)$.

Lemme IV.3. —

(a) L'application $((\varphi_0, \tau_0), \dots, (\varphi_n, \tau_n)) \mapsto e_{\tau_0, \dots, \tau_n}(\varphi_0, \dots, \varphi_n; X)$ est symétrique et linéaire en chaque variable par rapport à \oplus ;

(b) $e_{\tau, \dots, \tau}(\varphi, \dots, \varphi; X) = e_{\tau}(\overline{\varphi(X)})$;

(c) $e_{\tau_0, \dots, \tau_n}(\varphi_0, \dots, \varphi_n; X) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \sum_{0 \leq i_0 < \dots < i_j \leq n} e_{\tau_{i_0} \oplus \dots \oplus \tau_{i_j}}(\varphi_{i_0} \oplus \dots \oplus \varphi_{i_j}(X))$.

Le multipoids de Chow généralise donc le poids de Chow considéré au § III.1. La partie (c) permet de ramener le calcul des multipoids de Chow à celui de poids de Chow standard.

Démonstration. — La symétrie est évidente, puisque la forme $\text{Rés}_{\varphi_0, \dots, \varphi_n}$ est symétrique (à un facteur scalaire près) par rapport aux permutations des variables. Donc pour la partie (a), il suffit d'établir la linéarité par rapport à la première variable.

Soient $\varphi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^N$ et $\psi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^P$ des plongements sur un ouvert dense de X , et $\tau \in \mathbb{R}^{N+1}, \omega \in \mathbb{R}^{P+1}$ des poids. Soient $x = \{x_0, \dots, x_N\}$ et $y = \{y_0, \dots, y_P\}$ des coordonnées homogènes pour \mathbb{P}^N et \mathbb{P}^P respectivement, et notons $X_{\varphi, \psi}$ l'image de l'application

$$X \rightarrow \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^P \times \mathbb{P}^{N_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{N_n}, \quad s \mapsto (\varphi(s), \psi(s), \varphi_1(s), \dots, \varphi_n(s))$$

et $I_{\varphi, \psi} \subset \mathbb{K}[x, y, x_1, \dots, x_n]$ son idéal. Considérons des groupes de variables $V = \{V_0, \dots, V_N\}, W = \{W_0, \dots, W_P\}$ et posons $V \cdot W := \{V_i W_j : 0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq P\}$. On a la factorisation [**Rem01a**, Prop. 3.5]

$$\begin{aligned} \text{rés}_{e+e', e_1, \dots, e_n}(I_{\varphi, \psi})(V \cdot W, U_1, \dots, U_n) \\ \text{(IV.1)} \quad = \lambda \cdot \text{rés}_{e, e_1, \dots, e_n}(I_{\varphi, \psi})(V, U_1, \dots, U_n) \cdot \text{rés}_{e', e_1, \dots, e_n}(I_{\varphi, \psi})(W, U_1, \dots, U_n) \neq 0 \end{aligned}$$

où e, e', e_1, \dots, e_n désignent les vecteurs de la base standard de \mathbb{R}^{n+2} et λ un élément de \mathbb{K}^\times .

On vérifie $\text{rés}_{e+e', e_1, \dots, e_n}(I_{\varphi, \psi}) = \text{Rés}_{\varphi \oplus \psi, \varphi_1, \dots, \varphi_n}$; cela vient de la théorie des formes résultantes et peut se démontrer avec des arguments très proches de ceux de [**Rem01b**, pp. 102–103]. Similairement

$$\text{rés}_{e, e_1, \dots, e_n}(I_{\varphi, \psi}) = \text{Rés}_{\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n}, \quad \text{rés}_{e', e_1, \dots, e_n}(I_{\varphi, \psi}) = \text{Rés}_{\psi, \varphi_1, \dots, \varphi_n};$$

pour obtenir cela il faut en plus tenir compte du fait que les projections naturelles $\mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^P \times \prod_{i=1}^n \mathbb{P}^{N_i} \rightarrow \mathbb{P}^N \times \prod_{i=1}^n \mathbb{P}^{N_i}$ et $\mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^P \times \prod_{i=1}^n \mathbb{P}^{N_i} \rightarrow \mathbb{P}^P \times \prod_{i=1}^n \mathbb{P}^{N_i}$ sont des plongements sur un ouvert dense de $X_{\varphi, \psi}$.

Soit maintenant $U = \{U_{ij} : 0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq P\}$ un groupe de $(N+1)(P+1)$ variables. On déduit de ce qui précède et de la factorisation (IV.1)

$$\begin{aligned} e_{\tau \oplus \omega, \tau_1, \dots, \tau_n}(\varphi \oplus \psi, \varphi_1, \dots, \varphi_n; X) &= \deg_t \left(\text{Rés}_{\varphi \oplus \psi, \varphi_1, \dots, \varphi_n} (t^{\tau \oplus \omega} U, t^{\tau_1} U_1, \dots, t^{\tau_n} U_n) \right) \\ &= \deg_t \left(\text{Rés}_{\varphi \oplus \psi, \varphi_1, \dots, \varphi_n} ((t^\tau V) \cdot (t^\omega W), t^{\tau_1} U_1, \dots, t^{\tau_n} U_n) \right) \\ &= \deg_t \left(\text{Rés}_{\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n} (t^\tau V, t^{\tau_1} U_1, \dots, t^{\tau_n} U_n) \right) + \deg_t \left(\text{Rés}_{\psi, \varphi_1, \dots, \varphi_n} (t^\omega W, t^{\tau_1} U_1, \dots, t^{\tau_n} U_n) \right) \\ &= e_{\tau, \tau_1, \dots, \tau_n}(\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n; X) + e_{\omega, \tau_1, \dots, \tau_n}(\psi, \varphi_1, \dots, \varphi_n; X) . \end{aligned}$$

Passons à la partie (b), soit $I \subset \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ l'idéal de l'image du morphisme $X \rightarrow (\mathbb{P}^N)^{n+1}$, $s \mapsto (\varphi(s), \dots, \varphi(s))$, on sait que $\text{rés}_{e_0, \dots, e_n}(I) = \text{élim}_{e_0, \dots, e_n}(I)^f$ pour une certaine puissance $f \geq 1$, où $\text{élim}_{e_0, \dots, e_n}(I)$ désigne la *forme éliminante* de I d'indice e_0, \dots, e_n , voir [Rem01a, p. 74]. Or, par définition, cette forme éliminante coïncide avec la forme de Chow de $\overline{\varphi(X)} \subset \mathbb{P}^N$.

En outre $\deg_{U_i}(\text{rés}_{e_0, \dots, e_n}(I)) = \deg(\varphi(X))$ [Rem01a, Prop. 3.4], d'où $\text{rés}_{e_0, \dots, e_n}(I) = \mathcal{C}h_{\overline{\varphi(X)}}$. On en conclut $e_{\tau, \dots, \tau}(\varphi, \dots, \varphi; X) = e_\tau(\overline{\varphi(X)})$ car les définitions respectives coïncident.

L'alinéa (c) s'ensuit formellement de ces propriétés et de l'identité algébrique

$$(IV.2) \quad (n+1)! L(z_0, \dots, z_n) = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \sum_{0 \leq i_0 < \dots < i_j \leq n} \ell(z_{i_0} + \dots + z_{i_j})$$

valable pour une fonction multilinéaire symétrique L sur un semi-groupe abélien $(S, +)$ quelconque et $\ell(z) := L(z, \dots, z)$, et qu'on laisse au lecteur intéressé le soin de démontrer. \square

IV.3. Multihauteurs des plongements monomiaux. — Soient $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : R \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions concaves définies sur des ensembles convexes $Q, R \subset \mathbb{R}^n$ respectivement. On pose

$$f \boxplus g : Q + R \rightarrow \mathbb{R} , \quad x \mapsto \max\{f(y) + g(z) : y \in Q, z \in R, y + z = x\} ,$$

qui est une fonction concave définie sur la somme de Minkowski $Q + R$; on obtient ainsi une structure de semi-groupe commutatif sur l'ensemble des fonctions concaves. Par la suite on supposera que toutes les fonctions concaves considérées sont définies sur des ensembles convexes *compacts*.

Définition IV.4. — Pour une famille de fonctions concaves $f_0 : Q_0 \rightarrow \mathbb{R}, \dots, f_n : Q_n \rightarrow \mathbb{R}$ l'intégrale mixte (ou multi-intégrale) est définie via la formule

$$\text{MI}(f_0, \dots, f_n) := \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \sum_{0 \leq i_0 < \dots < i_j \leq n} \int_{Q_{i_0} + \dots + Q_{i_j}} f_{i_0} \boxplus \dots \boxplus f_{i_j} dx_1 \cdots dx_n .$$

Cette notion est proche de celle de *volume mixte* (ou *multi-volume*) $\text{MV}(Q_1, \dots, Q_n)$ d'une famille d'ensembles convexes $Q_1, \dots, Q_n \subset \mathbb{R}^n$, dont une définition possible est

$$\text{MV}(Q_1, \dots, Q_n) := \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n} \text{Vol}_n(Q_{i_1} + \dots + Q_{i_j}) .$$

On sait que ceci généralise le volume d'un ensemble convexe, car on a $\text{MV}(Q, \dots, Q) = n! \text{Vol}_n(Q)$. Le volume mixte est symétrique et linéaire en chaque variable Q_i par rapport à la somme de Minkowski. On renvoie à [CLO98, § 7.4] pour les propriétés de base de cette notion. Souvent, pour souligner qu'il s'agit du volume mixte n -dimensionnel, on notera $\text{MV}_n(Q_1, \dots, Q_n)$.

Les propriétés analogues de l'intégrale mixte sont résumées dans la proposition suivante. Pour une fonction concave $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ et $\mu \leq \min(f)$ on considère le polytope

$$Q_{f, \mu} := \text{Conv}(\text{Graphe}(f), Q \times \{\mu\}) = \text{Conv}((x, f(x)), (x, \mu) : x \in Q) \subset \mathbb{R}^{n+1} ;$$

on a $\int_Q f dx_1 \cdots dx_n = \text{Vol}_{n+1}(Q_{f, \mu}) + \mu \text{Vol}_n(Q)$.

Proposition IV.5. —

(a) $\text{MI}(f_0, \dots, f_n)$ est symétrique et linéaire en chaque variable f_i par rapport à \boxplus ;

(b) $\text{MI}(f, \dots, f) = (n+1)! \int_Q f dx_1 \cdots dx_n$;

(c) $\text{MI}(f_0, \dots, f_n) \geq 0$ pour $f_0 \geq 0, \dots, f_n \geq 0$;

(d) Soit $\mu_i \leq \min(f_i, 0)$ pour $i = 0, \dots, n$, alors

$$\text{MI}(f_0, \dots, f_n) = \text{MV}_{n+1}(Q_{f_0, \mu_0}, \dots, Q_{f_n, \mu_n}) + \sum_{i=0}^n \mu_i \text{MV}_n(Q_0, \dots, Q_{i-1}, Q_{i+1}, \dots, Q_n) .$$

La notion d'intégrale mixte généralise donc celle d'intégrale d'une fonction concave. La partie (d) montre qu'on peut en ramener le calcul à celui de volumes mixtes (et donc de volumes standard).

Démonstration. — Pour la partie (a), la symétrie de l'intégrale mixte est claire à partir de sa définition. En outre, la linéarité et la positivité (alinéa (c)) sont immédiatement vérifiées à partir de (d), de l'identité (IV.3) ci-dessous et des propriétés analogues pour le volume mixte. Pour (b), on vérifie $\boxplus_{i=0}^j f((j+1)x) = (j+1)f(x)$ pour tout $x \in Q$ grâce à la concavité de f ; cet alinéa est donc une conséquence de la formule (elle-même conséquence de l'identité (IV.2) appliquée à $(S, +) := (\mathbb{R}, +)$ et $L(z_0, \dots, z_n) := z_0 \cdots z_n$)

$$(n+1)! = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n+1}{j+1} (j+1)^{n+1} .$$

Pour la partie (d), soient $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : R \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions concaves et $\mu \leq \min(f)$, $\nu \leq \min(g)$. On vérifie alors $\mu + \nu \leq \min(f \boxplus g)$ et

$$(IV.3) \quad Q_{f \boxplus g, \mu + \nu} = Q_{f, \mu} + Q_{g, \nu} ,$$

c.-à-d. $f \boxplus g$ est la paramétrisation de la toiture de la somme de Minkowski $Q_{f, \mu} + Q_{g, \nu}$. Soit maintenant $\mu_i \leq \min(f_i, 0)$, on en déduit

$$(IV.4) \quad \begin{aligned} \int_{Q_{i_0 + \dots + Q_{i_j}}} f_{i_0} \boxplus \dots \boxplus f_{i_j} dx_1 \cdots dx_n &= \text{Vol}_{n+1}(Q_{f_{i_0} \boxplus \dots \boxplus f_{i_j}, \mu_{i_0} + \dots + \mu_{i_j}}) \\ &+ (\mu_{i_0} + \dots + \mu_{i_j}) \text{Vol}_n(Q_{i_0} + \dots + Q_{i_j}) \\ &= \text{Vol}_{n+1}(Q_{f_{i_0}, \mu_{i_0}} + \dots + Q_{f_{i_j}, \mu_{i_j}}) \\ &- \text{Vol}_{n+1}((Q_{i_0} + [0, -\mu_{i_0}]) + \dots + (Q_{i_j} + [0, -\mu_{i_j}])) \end{aligned}$$

où l'on désigne par Q_{i_ℓ} et $[0, -\mu_{i_\ell}]$ l'image de ces polytopes par les inclusions de \mathbb{R}^n et de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^{n+1} via $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0)$ et $x \mapsto (0, \dots, 0, x)$, respectivement. On déduit de là et des définitions de l'intégrale mixte et du volume mixte

$$\text{MI}(f_0, \dots, f_n) = \text{MV}_{n+1}(Q_{f_0, \mu_0}, \dots, Q_{f_n, \mu_n}) - \text{MV}_{n+1}(Q_0 + [0, -\mu_0], \dots, Q_n + [0, -\mu_n]) .$$

Comme conséquence de la formule (IV.4), on voit que ce dernier volume mixte est une forme linéaire en μ_0, \dots, μ_n , c.-à-d.

$$\text{MV}_{n+1}(Q_0 + [0, -\mu_0], \dots, Q_n + [0, -\mu_n]) = A_0 \mu_0 + \dots + A_n \mu_n ,$$

et on a $A_i = \text{MV}_{n+1}(Q_0, \dots, Q_{i-1}, [0, 1], Q_{i+1}, \dots, Q_n)$. En appliquant la définition du volume mixte on trouve

$$\begin{aligned} A_i &= \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \sum_{\substack{0 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n \\ i_\ell \neq i}} \text{Vol}_{n+1}([0, 1] + Q_{i_1} + \dots + Q_{i_j}) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j} \sum_{\substack{0 \leq i_0 < \dots < i_j \leq n \\ i_\ell \neq i}} \text{Vol}_{n+1}(Q_{i_0} + \dots + Q_{i_j}) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j} \sum_{\substack{0 \leq i_0 < \dots < i_j \leq n \\ i_\ell \neq i}} \text{Vol}_n(Q_{i_0} + \dots + Q_{i_j}) \\ &= -\text{MV}_n(Q_0, \dots, Q_{i-1}, Q_{i+1}, \dots, Q_n) , \end{aligned}$$

par le fait que $Q_0 + \dots + Q_n$ est de dimension n et donc de volume $n + 1$ -dimensionnel nul, et $\text{Vol}_{n+1}([0, 1] + Q) = \text{Vol}_n(Q)$ pour $Q \subset \mathbb{R}^n$. \square

Revenons au cadre monomial: soit

$$\mathcal{A}_0 \in (\mathbb{Z}^n)^{N_0+1} , \dots , \mathcal{A}_n \in (\mathbb{Z}^n)^{N_n+1}$$

des vecteurs tels que $L_{\mathcal{A}_i} = \mathbb{Z}^n$ pour tout i et $\tau_0 \in \mathbb{R}^{N_0+1}, \dots, \tau_n \in \mathbb{R}^{N_n+1}$. Soit $\varphi_{\mathcal{A}_i} : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{P}^{N_i}$ le plongement associé et $\vartheta_{\mathcal{A}_i, \tau_i} : Q_{\mathcal{A}_i} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction affine par morceaux correspondante, pour $i = 0, \dots, n$. La proposition suivante explicite le multiploïde de Chow du tore \mathbb{T}^n relatif à $(\varphi_{\mathcal{A}_0}, \tau_0), \dots, (\varphi_{\mathcal{A}_n}, \tau_n)$:

Proposition IV.6. — $e_{\tau_0, \dots, \tau_n}(\varphi_{\mathcal{A}_0}, \dots, \varphi_{\mathcal{A}_n}; \mathbb{T}^n) = \text{MI}(\vartheta_{\mathcal{A}_0, \tau_0}, \dots, \vartheta_{\mathcal{A}_n, \tau_n})$.

Démonstration. — Soient $\mathcal{B} = (b_0, \dots, b_N) \in (\mathbb{Z}^n)^{N+1}$, $\mathcal{C} = (c_0, \dots, c_P) \in (\mathbb{Z}^n)^{P+1}$ des vecteurs et posons

$$\mathcal{B} \oplus \mathcal{C} := (b_i + c_j : 0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq P) \in (\mathbb{Z}^n)^{(N+1)(P+1)} .$$

On vérifie $\varphi_{\mathcal{B}} \oplus \varphi_{\mathcal{C}} = \varphi_{\mathcal{B} \oplus \mathcal{C}}$. Similairement, pour des poids $\tau \in \mathbb{R}^{N+1}$ et $\omega \in \mathbb{R}^{P+1}$ on vérifie $\vartheta_{\mathcal{B}, \tau} \boxplus \vartheta_{\mathcal{C}, \omega} = \vartheta_{\mathcal{B} \oplus \mathcal{C}, \tau \oplus \omega}$. Le résultat est donc une conséquence directe du lemme IV.3(c), du cas non mixte (Proposition III.1) et de la définition de l'intégrale mixte. \square

Soit maintenant $\alpha_0 \in (K^\times)^{N_0+1}, \dots, \alpha_n \in (K^\times)^{N_n+1}$ et notons $\varphi_i : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{P}^{N_i}$ le plongement monomial associé au couple $(\mathcal{A}_i, \alpha_i)$, pour $i = 0, \dots, n$. On démontre enfin le théorème 0.3 explicitant la multahauteur normalisée

$$\widehat{h}((\mathcal{A}_0, \alpha_0), \dots, (\mathcal{A}_n, \alpha_n); \mathbb{T}^n) := \widehat{h}(\varphi_0, \dots, \varphi_n; \mathbb{T}^n)$$

du tore \mathbb{T}^n relative à ces plongements, en termes d'intégrales mixtes. Pour chaque $v \in M_K$ on note $\vartheta_{i,v} : Q_{\mathcal{A}_i} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction paramétrant la toiture du polytope $Q_{i,v} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ associé au vecteur \mathcal{A}_i et au poids $\tau_{\alpha_i v}$.

Démonstration du théorème 0.3. — Soit $\beta \in (K^\times)^{N+1}$ et $\gamma \in (K^\times)^{P+1}$ et posons

$$\beta \otimes \gamma := (\beta_i \gamma_j : 0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq P) \in (K^\times)^{(N+1)(P+1)} .$$

On vérifie sans peine $\varphi_{\mathcal{B}, \beta} \oplus \varphi_{\mathcal{C}, \gamma} = \varphi_{\mathcal{B} \oplus \mathcal{C}, \beta \otimes \gamma}$ pour des vecteurs $\mathcal{B} \in (\mathbb{Z}^n)^{N+1}$ et $\mathcal{C} \in (\mathbb{Z}^n)^{P+1}$. Posons $\mathcal{A} := (\mathcal{A}_0, \dots, \mathcal{A}_n)$ et $\alpha := (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$, on considère alors l'application

$$\Phi_{\mathcal{A}, \alpha} : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{P}^{N_0} \times \dots \times \mathbb{P}^{N_n} , \quad s \mapsto (\varphi_0(s), \dots, \varphi_n(s))$$

et on note $Z := \overline{\Phi_{\mathcal{A}, \alpha}(\mathbb{T}^n)}$ l'adhérence de Zariski de son image. Pour $D = (D_0, \dots, D_n) \in (\mathbb{N}^*)^{n+1}$ on rappelle le plongement mixte $\Psi_D : \mathbb{P}^{N_0} \times \dots \times \mathbb{P}^{N_n} \rightarrow \mathbb{P}^{\binom{D_0+N_0}{N_0} \dots \binom{D_n+N_n}{N_n}-1}$ introduit au paragraphe I.2;

on vérifie $\Psi_D \circ \Phi_{\mathcal{A}, \alpha} = D_0 \varphi_0 \oplus \cdots \oplus D_n \varphi_n = \varphi_{D \cdot \mathcal{A}, \alpha^{\otimes D}}$ avec $D \cdot \mathcal{A} := D_0 \mathcal{A}_0 \oplus \cdots \oplus D_n \mathcal{A}_n$ et $\alpha^{\otimes D} := \alpha_0^{\otimes D_0} \otimes \cdots \otimes \alpha_n^{\otimes D_n}$. Donc $\Psi_D(Z) = X_{D \cdot \mathcal{A}, \alpha^{\otimes D}}$ et en appliquant l'identité (I.4) on trouve

$$(IV.5) \quad \widehat{h}(X_{D \cdot \mathcal{A}, \alpha^{\otimes D}}) = \widehat{h}(\Psi_D(Z)) = \sum_{c \in \mathbb{N}_{n+1}^{n+1}} \binom{n+1}{c} \widehat{h}_c(Z) D^c .$$

Soit $v \in M_K$, la variété torique $X_{D \cdot \mathcal{A}} \subset \mathbb{P}^{(D_0 + N_0) \cdots (D_n + N_n) - 1}$ associée au vecteur $D \cdot \mathcal{A}$ satisfait grâce au lemme IV.3(b)

$$e_{D \cdot \tau_{\alpha v}}(X_{D \cdot \mathcal{A}}) = e_{D \cdot \tau_{\alpha v}}(D \cdot \varphi_{\mathcal{A}}(\mathbb{T}^n)) = e_{D \cdot \tau_{\alpha_0 v}, \dots, D \cdot \tau_{\alpha_n v}}(D \cdot \varphi_{\mathcal{A}}, \dots, D \cdot \varphi_{\mathcal{A}}; \mathbb{T}^n)$$

avec $D \cdot \varphi_{\mathcal{A}} := D_0 \varphi_{\mathcal{A}_0} \oplus \cdots \oplus D_n \varphi_{\mathcal{A}_n}$ et $D \cdot \tau_{\alpha v} := D_0 \tau_{\alpha_0 v} \oplus \cdots \oplus D_n \tau_{\alpha_n v} = \tau_{\alpha^{\otimes D} v}$. La symétrie et la multilinéarité des multipoids de Chow impliquent

$$(IV.6) \quad e_{D \cdot \tau_{\alpha v}}(X_{D \cdot \mathcal{A}}) = \sum_{c \in \mathbb{N}_{n+1}^{n+1}} \binom{n+1}{c} e_c(\mathcal{A}, \alpha, v) D^c$$

où $e_c(\mathcal{A}, \alpha, v)$ désigne le multipoids de Chow $e_{\tau}(\varphi; \mathbb{T}^n)$ du tore \mathbb{T}^n relatif à

$$(\varphi, \tau) := \overbrace{(\varphi_{\mathcal{A}_0}, \tau_{\alpha_0 v}), \dots, (\varphi_{\mathcal{A}_0}, \tau_{\alpha_0 v})}^{c_0 \text{ fois}}, \dots, \overbrace{(\varphi_{\mathcal{A}_n}, \tau_{\alpha_n v}), \dots, (\varphi_{\mathcal{A}_n}, \tau_{\alpha_n v})}^{c_n \text{ fois}} .$$

Comme conséquence des décompositions (IV.5), (IV.6) et du cas non mixte (théorème 0.1) on déduit

$$\sum_{c \in \mathbb{N}_{n+1}^{n+1}} \binom{n+1}{c} \widehat{h}_c(Z) D^c = \sum_{c \in \mathbb{N}_{n+1}^{n+1}} \binom{n+1}{c} \left(\sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} e_c(\mathcal{A}, \alpha, v) \right) D^c .$$

Cette identité polynomiale étant valable pour *tout* $D \in (\mathbb{N}^*)^{N+1}$, on en déduit que les coefficients respectifs doivent coïncider. La multihauteur $\widehat{h}((\mathcal{A}_0, \alpha_0), \dots, (\mathcal{A}_n, \alpha_n); \mathbb{T}^n)$ est par définition le coefficient de $(n+1)! D_0 \cdots D_n$ (correspondant à $c = (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^{n+1}$) dans cette expression, donc en particulier

$$\widehat{h}((\mathcal{A}_0, \alpha_0), \dots, (\mathcal{A}_n, \alpha_n); \mathbb{T}^n) = \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} e_{\tau_{\alpha_0 v}, \dots, \tau_{\alpha_n v}}(\varphi_{\mathcal{A}_0}, \dots, \varphi_{\mathcal{A}_n}; \mathbb{T}^n) ,$$

d'où on conclut par application de la proposition précédente. \square

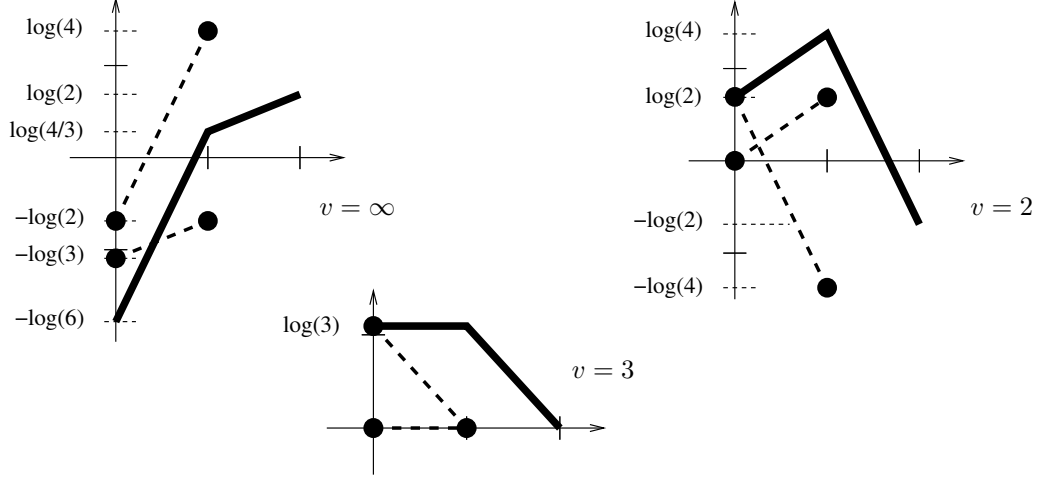
Remarque IV.7. — Plus généralement, on a démontré pour tout $c \in \mathbb{N}_{n+1}^{n+1}$:

$$\widehat{h}_c(\Phi_{\mathcal{A}, \alpha}(\mathbb{T}^n)) = \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} e_c(\mathcal{A}, \alpha, v) = \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \text{MI}_c(\vartheta_{\mathcal{A}, \tau_{\alpha v}})$$

$$\text{avec } \text{MI}_c(\vartheta_{\mathcal{A}, \tau_{\alpha v}}) := \text{MI} \left(\overbrace{\vartheta_{\mathcal{A}_0, \tau_{\alpha_0 v}}, \dots, \vartheta_{\mathcal{A}_0, \tau_{\alpha_0 v}}}^{c_0 \text{ fois}}, \dots, \overbrace{\vartheta_{\mathcal{A}_n, \tau_{\alpha_n v}}, \dots, \vartheta_{\mathcal{A}_n, \tau_{\alpha_n v}}}^{c_n \text{ fois}} \right) .$$

On illustre ce résultat sur un exemple. Considérons des plongements monomiaux $\varphi : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$, $s \mapsto (\frac{1}{2} : 4s)$ et $\psi : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$, $s \mapsto (\frac{1}{3} : \frac{s}{2})$. La figure suivante montre pour chaque $v \in M_{\mathbb{Q}}$, les graphes

des fonctions ϑ_v associées, en trait discontinu pour celles correspondant à φ et ψ et en gras pour celle correspondant à la somme $\varphi \oplus \psi$:



et $\vartheta_v \equiv 0$ pour $v \neq \infty, 2, 3$. D'où

$$\begin{aligned} \widehat{h}(\varphi, \psi; \mathbb{T}^1) &= \text{MI}(\vartheta_{\varphi, \infty}, \vartheta_{\psi, \infty}) + \text{MI}(\vartheta_{\varphi, 2}, \vartheta_{\psi, 2}) + \text{MI}(\vartheta_{\varphi, 3}, \vartheta_{\psi, 3}) \\ &= \sum_{v=\infty, 2, 3} \left(\int_0^2 \vartheta_{\varphi \oplus \psi, v} dx - \int_0^2 \vartheta_{\varphi, v} dx - \int_0^2 \vartheta_{\psi, v} dx \right) \\ &= (2 \log(2) - \log(3)) + 2 \log(2) + \log(3) = 4 \log(2) . \end{aligned}$$

Remarquons $\overline{\varphi(\mathbb{T}^1)} = \overline{\psi(\mathbb{T}^1)} = \mathbb{P}^1$, donc $\widehat{h}(\varphi, \varphi; \mathbb{T}^1) = \widehat{h}(\psi, \psi; \mathbb{T}^1) = 0$.

IV.4. Joints, plongements de Segre et de Veronese. — La classe des variétés toriques est fermée par formation de joints, produits de Segre et plongements de Veronese. De plus, ces constructions se transportent de manière naturelle en des constructions standard sur les polytopes associés. Dans la suite, on montre que la famille de fonctions $\Theta_{\mathcal{A}, \alpha}$ associée à une variété torique se comporte de manière aussi naturelle par rapport à ces opérations.

Soient $X \subset \mathbb{P}^N$ et $Y \subset \mathbb{P}^P$ des variétés de dimension n et p respectivement. Le *joint* est par définition

$$X \# Y = \{(v x : w y) : x \in X, y \in Y, (v : w) \in \mathbb{P}^1\} \subset \mathbb{P}^{N+P+1} .$$

Soient $i(X)$ et $j(Y)$ respectivement, les plongements de X et de Y *via* les inclusions standard $i : \mathbb{P}^N \hookrightarrow \mathbb{P}^{N+P+1}$ et $j : \mathbb{P}^P \hookrightarrow \mathbb{P}^{N+P+1}$. Le joint est donc la réunion des droites joignant les points de $i(X)$ à ceux de $j(Y)$; c'est une variété de dimension $n + p + 1$ et de degré $\deg(X) \deg(Y)$.

Soient $\mathcal{A} = (a_0, \dots, a_N) \in (\mathbb{Z}^n)^{N+1}$, $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_N) \in (K^\times)^{N+1}$, $\mathcal{B} = (b_0, \dots, b_P) \in (\mathbb{Z}^p)^{P+1}$ et $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_P) \in (K^\times)^{P+1}$ tels que $L_{\mathcal{A}} = \mathbb{Z}^n$ et $L_{\mathcal{B}} = \mathbb{Z}^p$, on pose alors

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \# \mathcal{B} &:= ((1, a_0, \mathbf{0}_p), \dots, (1, a_N, \mathbf{0}_p), (0, \mathbf{0}_n, b_0), \dots, (0, \mathbf{0}_n, b_P)) \in (\mathbb{Z}^{n+p+1})^{N+P+2} , \\ \alpha \# \beta &:= (\alpha_0, \dots, \alpha_N, \beta_0, \dots, \beta_P) \in (K^\times)^{N+P+2} . \end{aligned}$$

On vérifie $X_{\mathcal{A}, \alpha}^\circ \# X_{\mathcal{B}, \beta}^\circ = \{(u \varphi_{\mathcal{A}, \alpha}(s) : \varphi_{\mathcal{B}, \beta}(t)) : s \in \mathbb{T}^n, t \in \mathbb{T}^p, u \in \mathbb{T}^1\} = X_{\mathcal{A} \# \mathcal{B}, \alpha \# \beta}^\circ$ donc

$$X_{\mathcal{A}, \alpha} \# X_{\mathcal{B}, \beta} = X_{\mathcal{A} \# \mathcal{B}, \alpha \# \beta} .$$

Posons $Q \subset \mathbb{R}^n$ et $R \subset \mathbb{R}^p$ les polytopes associés à \mathcal{A} et \mathcal{B} respectivement. Le polytope $Q_{\mathcal{A}\#\mathcal{B}} \subset \mathbb{R}^{n+p+1}$ s'écrit comme l'image de l'application

$$j_{Q,R} : [0, 1] \times Q \times R \rightarrow \mathbb{R}^{n+p+1}, \quad (u, s, t) \mapsto (u, u s, (1-u)t);$$

autrement dit $Q_{\mathcal{A}\#\mathcal{B}}$ est la réunion des segments joignant les points de $\{1\} \times Q \times \{\mathbf{0}_p\} \cong Q$ à ceux de $\{0\} \times \{\mathbf{0}_n\} \times R \cong R$.

Soit maintenant

$$s_{N,P} : \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^P \rightarrow \mathbb{P}^{(N+1)(P+1)-1}, \quad (x, y) \mapsto (x_i y_j : i = 0, \dots, N, j = 0, \dots, P)$$

le plongement de Segre. Le *produit de Segre* $X \times Y \subset \mathbb{P}^{(N+1)(P+1)-1}$ est défini comme l'image par $s_{N,P}$ du produit cartésien de X et Y ; c'est une variété de dimension $n+p$ et de degré $\binom{n+p}{n} \deg(X) \deg(Y)$. On pose alors

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \times \mathcal{B} &:= ((a_i, b_j) : i = 0, \dots, N, j = 0, \dots, P) \in (\mathbb{Z}^{n+p})^{(N+1)(P+1)}, \\ \alpha \otimes \beta &:= (\alpha_i \beta_j : i = 0, \dots, N, j = 0, \dots, P) \in (K^\times)^{(N+1)(P+1)}, \end{aligned}$$

notons que cette dernière notation a déjà été introduite au cours de la preuve du théorème 0.3 dans la section III. Une vérification directe montre $X_{\mathcal{A},\alpha} \times X_{\mathcal{B},\beta} = s_{N,P}(X_{\mathcal{A},\alpha}, X_{\mathcal{B},\beta}) = X_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}, \alpha \otimes \beta}$ et que le polytope associé $Q_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} \subset \mathbb{R}^{n+p}$ est le produit cartésien $Q \times R$.

Pour $D \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$v_{N,D} : \mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{P}^{\binom{D+N}{N}-1}, \quad x \mapsto (x^b : b \in \mathbb{N}_D^{N+1})$$

le *plongement de Veronese* de degré D en $N+1$ variables homogènes. L'image $v_{N,D}(X_{\mathcal{A},\alpha}) \subset \mathbb{P}^{\binom{D+N}{N}-1}$ est une variété de dimension n et de degré $D^n \deg(X)$. Posons

$$\begin{aligned} V(\mathcal{A}) &:= (b_0 a_0 + \dots + b_N a_N : b \in \mathbb{N}_D^{N+1}) \in (\mathbb{Z}^n)^{\binom{N+D}{N}}, \\ V(\alpha) &:= (\alpha_0^{b_0} \dots \alpha_N^{b_N} : b \in \mathbb{N}_D^{N+1}) \in (K^\times)^{\binom{N+D}{N}}. \end{aligned}$$

On vérifie aisément $v_{N,D}(X_{\mathcal{A},\alpha}) = X_{V(\mathcal{A}),V(\alpha)}$ et que le polytope associé $Q_{V(\mathcal{A})} \subset \mathbb{R}^n$ est l'homothétique DQ .

Nous collectons dans l'énoncé suivant le comportement des fonctions ϑ_v par rapport à ces opérations. La démonstration suit des observations précédentes, nous laissons les détails au lecteur intéressé.

Proposition IV.8. — *Avec les notations introduites, pour $v \in M_K$ on a*

- (a) $\vartheta_{\mathcal{A}\#\mathcal{B},\tau_{\alpha\#\beta v}} \circ j_{Q,R}(u, s, t) = u \vartheta_{\mathcal{A},\tau_{\alpha v}}(s) + (1-u) \vartheta_{\mathcal{B},\tau_{\beta v}}(t)$ pour $u \in [0, 1]$, $s \in Q$, $t \in R$;
- (b) $\vartheta_{\mathcal{A} \times \mathcal{B},\tau_{\alpha \times \beta v}}(s, t) = \vartheta_{\mathcal{A},\tau_{\alpha v}}(s) + \vartheta_{\mathcal{B},\tau_{\beta v}}(t)$ pour $s \in Q$, $t \in R$;
- (c) $\vartheta_{V(\mathcal{A}),\tau_{V(\alpha) v}}(Ds) = D \vartheta_{\mathcal{A},\tau_{\alpha v}}(s)$ pour $s \in Q$.

En calculant l'intégrale de ces fonctions on obtient, à partir de cette proposition et du théorème 0.1, des formules pour la hauteur normalisée des joints, produits de Segre et plongements de Veronese des variétés toriques. En fait, ces formules sont valables pour des variétés quelconques et sont conséquence de résultats analogues pour la hauteur projective:

Proposition IV.9. — *Soient $X \subset \mathbb{P}^N$ et $Y \subset \mathbb{P}^P$ des sous-variétés de dimension n et p respectivement, alors*

- (a) $\widehat{h}(X\#Y) = \widehat{h}(X) \deg(Y) + \deg(X) \widehat{h}(Y)$;
- (b) $\widehat{h}(X \times Y) = \binom{n+p+1}{p} \widehat{h}(X) \deg(Y) + \binom{n+p+1}{n} \deg(X) \widehat{h}(Y)$;
- (c) $\widehat{h}(v_{N,D}(X)) = D^{n+1} \widehat{h}(X)$ pour $D \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration. — Pour la première on applique l'égalité $[k](X\#Y) = ([k]X)\#([k]Y)$ qu'on vérifie de façon directe à partir de la définition du joint. D'après [Phi95, Prop. 2]

$$\frac{h([k](X\#Y))}{\deg([k](X\#Y))} = \frac{h([k]X)}{\deg([k]X)} + \frac{h([k]Y)}{\deg([k]Y)} + c(n,p)$$

avec $c(n,p) := \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^p \frac{1}{2(i+j+1)}$. En prenant la limite on en déduit

$$\deg(X\#Y) \widehat{h}(X\#Y) = \deg(X\#Y) \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h([k](X\#Y))}{k \deg([k](X\#Y))} = \widehat{h}(X) \deg(Y) + \deg(X) \widehat{h}(Y)$$

car $\deg(X\#Y) = \deg(X) \deg(Y)$. La partie (b) se démontre de la même façon, en utilisant $[k](X \times Y) = ([k]X) \times ([k]Y)$ et [Phi95, Prop. 1]. La partie (c) correspond à l'identité (I.4) appliquée à $m := 0$ et $D_0 := D$. \square

En général, il est intéressant de savoir calculer la hauteur des variétés projectives produites par diverses constructions. Comme généralisation des plongements de Veronese, on peut considérer les applications monomiales $\varphi_{\mathcal{B},\beta} : \mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{P}^M$, $x \mapsto (\beta_0 x^{b_0} : \dots : \beta_M x^{b_M})$ avec $b_j \in \mathbb{N}_D^{N+1}$ et $\beta_j \in K^\times$ pour un certain $D \in \mathbb{N}^*$.

L'image d'une variété torique par une telle application est aussi torique: soit $\mathcal{A} \in (\mathbb{Z}^n)^{N+1}$ et $\alpha \in \mathbb{P}^N$, alors

$$\overline{\varphi_{\mathcal{B},\beta}(X_{\mathcal{A},\alpha})} = X_{\mathcal{C},\gamma}$$

où $\mathcal{C} = (c_0, \dots, c_M) \in (\mathbb{Z}^n)^{M+1}$ avec $c_j := M_{\mathcal{A}}(b_j) = b_{j0} a_0 + \dots + b_{jn} a_n$, et $\gamma = \Phi_{\mathcal{B},\beta}(\alpha) = (\beta_0 \alpha^{b_0} : \dots : \beta_M \alpha^{b_M}) \in \mathbb{P}^M$. Remarquons que lorsque la classe des variétés toriques est fermée par ces constructions, elles sont de bons candidats pour tester des formules conjecturales.

Références

- [AB95] M. Abbès, T. Bouche, *Théorème de Hilbert-Samuel arithmétique*, Ann. Inst. Fourier **45** (1995) 375-401.
- [AD03] F. Amoroso, S. David, *Minoration de la hauteur normalisée dans un tore*, J. Inst. Math. Jussieu **2** (2003) 335-381.
- [BY98] C. Berenstein, A. Yger, *Green currents and analytic continuation*, J. Anal. Math. **75** (1998) 1-50.
- [BGS94] J.-B. Bost, H. Gillet, C. Soulé, *Heights of projective varieties and positive Green forms*, J. Amer. Math. Soc. **7** (1994) 903-1027.
- [Bou70] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitres 1 à 3*, Hermann, 1970.
- [Boy98] D. Boyd, *Mahler's measure and special values of L-functions*, Experiment. Math. **7** (1998) 37-82.
- [CLO98] D. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Using algebraic geometry*, Graduate Texts in Math. **185**, Springer, 1998.
- [Dav03] S. David, *On the height of subvarieties of groups varieties*, à paraître dans J. Ramanujan Math. Soc..
- [DP99] S. David, P. Philippon, *Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés des tores*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **28** (1999) 489-543.
- [Don02] S.K. Donaldson, *Scalar curvature and stability of toric varieties*, J. Differential Geom. **62** (2002) 289-349.
- [ES96] D. Eisenbud, B. Sturmfels, *Binomial ideals*, Duke Math. J. **84** (1996) 1-45.
- [EF02] J.-H. Evertse, R.G. Ferretti, *Diophantine inequalities on projective varieties*, Internat. Math. Res. Not. **25** (2002) 1295-1330.
- [Fer03] R.G. Ferretti, *Diophantine approximations and toric deformations*, Duke Math. J. **118** (2003) 493-522.
- [Ful93] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Ann. Math. Studies **131**, Princeton Univ. Press, 1993.
- [GKZ94] I.M. Gelfand, M.M. Kapranov, A.V. Zelevinsky, *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*, Birkhäuser, 1994.

- [GS88] H. Gillet, C. Soulé, *Amplitude arithmétique*, C. R. Acad. Sci. Paris **307** (1988) 887-890.
- [GHP97] M. Giusti, J. Heintz, K. Hägele, J.E. Morais, L.M. Pardo, J.L. Montaña, *Lower bounds for Diophantine approximations*, J. Pure Appl. Algebra **117 & 118** (1997), 277-317.
- [Gor1873] P. Gordan, *Über den größten gemeinsam Faktor*, Math. Ann. **7** (1873) 443-448.
- [KK02] C. Kaiser, K. Köhler, *A fixed point formula of Lefschetz type in Arakelov geometry. III. Representations of Chevalley schemes and heights of flag varieties*, Invent. Math. **147** (2002) 633-669.
- [KPS01] T. Krick, L.M. Pardo, M. Sombra, *Sharp estimates for the arithmetic Nullstellensatz*, Duke Math. J. **109** (2001) 521-598.
- [Lau92] M. Laurent, *Hauteur de matrices d'interpolation*, dans P. Philippon (ed.): Approximations diophantiniennes et nombres transcendants (Luminy, 1990) 215-238, de Gruyter, 1992.
- [Mai00] V. Maillot, *Géométrie d'Arakelov des variétés toriques et fibrés en droites intégrables*, Mém. Soc. Math. France **80** (2000) vi+129 pp..
- [Mum77] D. Mumford, *Stability of projective varieties*, Enseign. Math. **23** (1977) 39-110.
- [Phi91] P. Philippon, *Sur des hauteurs alternatives, I*, Math. Ann. **289** (1991) 255-283.
- [Phi95] P. Philippon, *Sur des hauteurs alternatives, III*, J. Math. Pures Appl. **74** (1995) 345-365.
- [PS04] P. Philippon, M. Sombra, *Quelques aspects diophantiens des variétés toriques projectives*, 39 pp.. E-print téléchargeable math.NT/0411084.
- [PS05] P. Philippon, M. Sombra, *Géométrie diophantienne et variétés toriques*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **340** (2005) 507-512.
- [Ran01] H. Randriambololona, *Hauteurs pour les sous-schémas et exemples d'utilisation de méthodes arakeloviennes en théorie de l'approximation diophantienne*, thèse de doctorat, Univ. Paris-Sud, 2001. Téléchargeable à <http://www.stud.enst.fr/~randriam/>
- [Ran04] H. Randriambololona, *Métriques de sous-quotient et théorème de Hilbert-Samuel pour les faisceaux cohérents*, J. Reine Angew. Math. **590** (2006) 67-88.
- [Rem01a] G. Rémond, *Élimination multihomogène*, chapitre 5 de *Introduction to algebraic independence theory*, Lecture Notes in Math. **1752** (2001) 53-81.
- [Rem01b] G. Rémond, *Géométrie diophantienne multiprojective*, chapitre 7 de *Introduction to algebraic independence theory*, Lecture Notes in Math. **1752** (2001) 95-131.
- [RS62] J.B. Rosser, L. Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, Illinois J. Math. **6** (1962) 64-94.
- [Som02] M. Sombra, *Minimums successifs des variétés toriques projectives*, J. Reine Angew. Math. **586** (2005) 207-233.
- [Stu94] B. Sturmfels, *On the Newton polytope of the resultant*, J. Algebraic Combin. **3** (1994) 207-236.
- [Tam00] H. Tamvakis, *Height formulas for homogeneous varieties*, Michigan Math. J. **48** (2000) 593-610.
- [Wal00] M. Waldschmidt, *Diophantine approximation on linear algebraic groups. Transcendance properties of the exponential function in several variables*, Grund. Math. Wiss. **326**, Springer, 2000.
- [Zha95a] S.-W. Zhang, *Positive line bundles on arithmetic varieties*, J. Amer. Math. Soc. **8** (1995) 187-221.
- [Zha95b] S.-W. Zhang, *Small points and adelic metrics*, J. Algebraic Geom. **4** (1995) 281-300.

PATRICE PHILIPPON, Institut de Mathématiques - U.M.R. 7586 du CNRS, Projet Géométrie et Dynamique, Case 7012, 2 place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France.

E-mail : pph@math.jussieu.fr

Url : <http://www.math.jussieu.fr/~pph/>

MARTÍN SOMBRA, Universitat de Barcelona, Departament d'Àlgebra i Geometria, Gran Vía 585, 08007 Barcelona, Espagne.

E-mail : sombra@ub.edu

Url : <http://atlas.mat.ub.es/personals/sombra/>