EN MATEMÁTICA, ¿YA ESTÁ TODO INVENTADO?

http:\\atlas.mat.ub.es\personals\sombra

MARTÍN SOMBRA

ICREA & U. BARCELONA

EL PRAT DE LLOBREGAT, 27/11/2013

GOBIERNO DE ESPAÑA
MINISTERIO DE ECONOMÍA Y COMPETITIVIDAD
FECYT FUNDACIÓN ESPAÑOLA PARA LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA
SC[13]
www.fundaciorecerca.cat/setmanaciencia

"SE ACABÓ LA INVESTIGACIÓN.
¡YA ESTÁ TODO INVENTADO!"

Sudoku

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

1979: H. Garns' "Number Place" en 'Dell Pencil Puzzles and Word Games' (USA)

1984: "Sudoku" en "Monthly Nicolist" (Japón)

1997-2004: W. Gould's software para generar Sudokus

2004: Aparece en el "London Times" (UK)

2005: ———— "Daily Telegraph", "The Guardian", ...


DIVERTISSEMENTS QUOTIDIENS

PROGRAMME

¿Cuántas grillas completas hay?

grillas completas: 6.670.903.752.021.072.936.960 ≈ $6{,}6 \times 10^{21}$

Algunos Sudokus son "equivalentes"

1	2	3	5	6	7	8	9	4
4	5	6	1	8	9	2	3	7
7	8	9	2	3	4	1	5	6
2	1	4	3	5	6	7	8	9
3	6	5	7	9	8	4	1	2
8	9	7	4	1	2	3	6	5
5	3	2	6	4	1	9	7	8
6	4	8	9	7	3	5	2	1
9	7	1	8	2	5	6	4	3

grillas no equivalentes: 5.472.730.538

B. Felgenhauer y F. Jarvis (2006)

Grillas iniciales

	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
		4	3	9	8	5	6	7
8	6	5	2	7	1	3	9	4
9	3	7	6	4	5	8	1	2
3	4	1	8	6	2	9	7	5
5	7	2	9	1	4	6	3	8
6	9	8	5	3	7	2	4	1

LA MÁS GRANDE

	1							9
			3			8		
						6		
				1	2	4		
7		3						
5								
8			6					
				4			2	
			7				5	

LA MÁS PEQUEÑA

G. McGuire (2012)

¿CUÁNTAS GRILLAS INICIALES HAY?

• • •

¿Cómo se resuelve un Sudoku?

5		1					9	6
				9			5	
					5	2		7
4	9		1				7	
					7			
1	3						2	
3		4		5	9			
	2	8		7	1		4	
7	6	5	8	2				

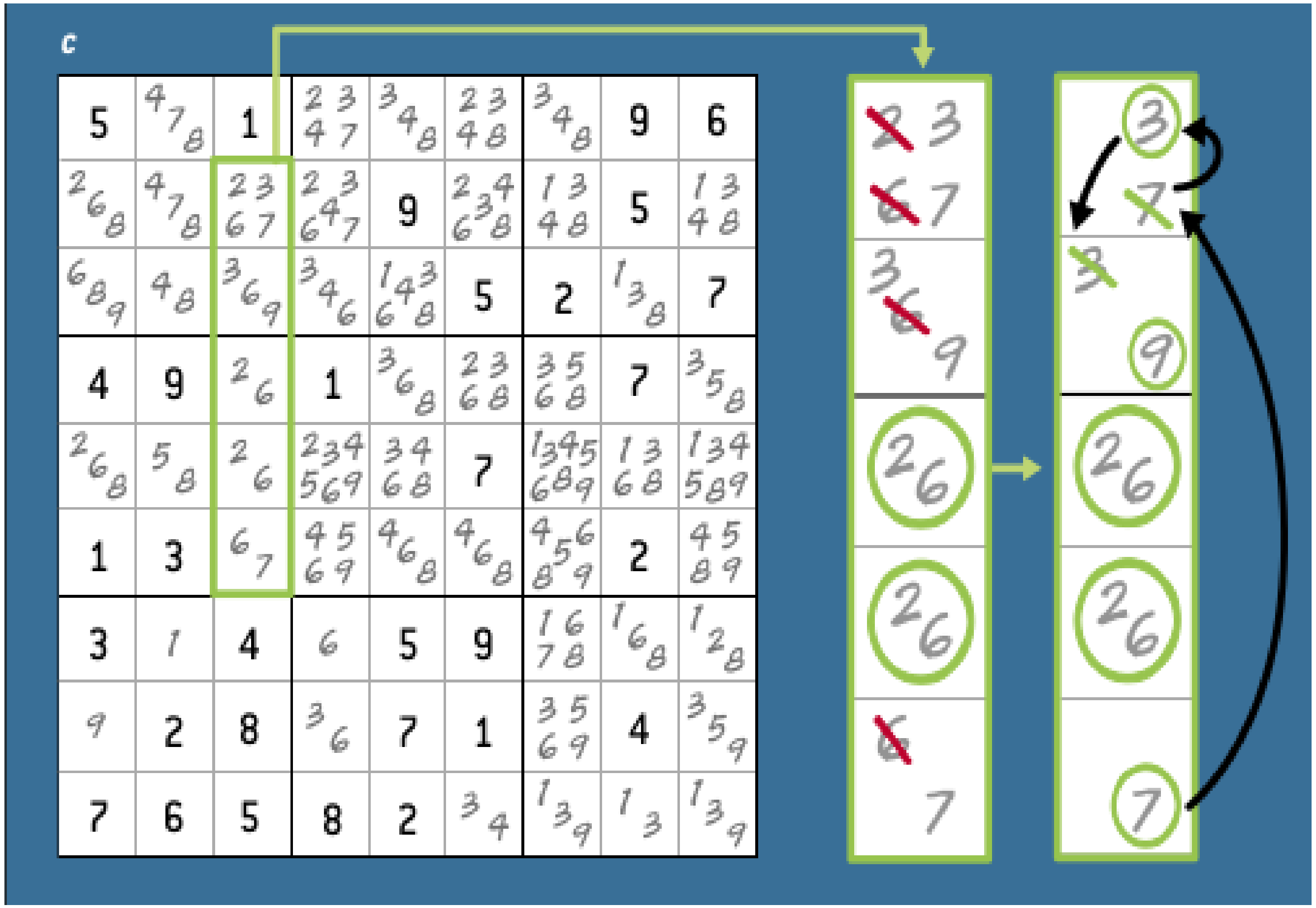
CELDAS "FORZADAS" Y CELDAS "ÚNICAS"

5		1					9	6
				9			5	
				1	5	2		7
4	9		1				7	
	5				7			
1	3	7					2	
3	1	4	6	5	9	7		2
9	2	8		7	1		4	
7	6	5	8	2				

ÚNICA CELDA

CELDA FORZADA

Simplificación de posibilidades



POR "FUERZA BRUTA": ENSAYO Y ERROR

5	4	1	2	3	8	?	9	6
				9			5	
					5	2		7
4	9		1				7	
					7			
1	3						2	
3		4		5	9			
	2	8		7	1		4	
7	6	5	8	2				

$< 9^{60}$ ENSAYOS

Sudokus $N^2 \times N^2$

				12			5		2						14
3				2		1	10	16	7			8		6	
	4	9	14				11	1	13		8			7	
		6	5	3				14				16			
			7	11	3		15	5		9	10		6		
10	8	1				13			4		11				15
										7	2		16		
	11	13	15		1				16		6		14		9
16									5		1		2		
7			6		8	3				13	15			4	
			3			5	2	10	14	8				1	7
15				7	10	12	4		11		16	13			
	2									5		9			1
	12		13	4	16		6		10				11	3	
			11						6		14		4		
				9			7							8	

16x16

	11		2						12			21		16		4				10	6	22		14
18					16		19				11	2		5	20	24		7		4				13
			16	20	10		1	9					13	18	15				8	3				
6			24	5				2	13	22	3		7	12	23	19	18	1						
				4	3	21		7	22	8	24	17	20	1	14		6		5		2	9		
	1	22						19		17								20				25		4
23	4				11		22	16	3		15		14				7			17	9	20	8	2
	24							25	6	19				7	18	10				14			13	
12			6						5	10									14	7				19
9	25		7		2	12			18				16	3			5	6			23	21		
	19	9		1		4		13						6		12		24			8	3		16
	5	13		3		14				20		11			10	8		21	25		19		12	
17				10			25	11		14	4		1			18	3				15			
	22	21		25	17					9		7	2	23	16		19	13		24	4	14		
	2	23		14	22	20	8	6				10	3				15	17			7	18	1	
	3	5	23	11		1		22	17	15	21				19			12	20				2	18
							2		20	5	8			4	24					12				21
	17		13		25					16	6		22	9		5		2	18	23	20			8
24			1		13		23	14				3	25	20		6	4		7					5
	8	18	21		5		15		9	1		19			11	25	23	14				24		
	13			15			10			2				21							11	17	19	
11	16	10		17	18		6	3	4		23		8		9	13			24			2	21	25
		3	8		20			15		25		14		22	2				21	1				
						2	7	23		18					1		16	3	10	9			24	15
2			4			13		17									11			18		8	22	

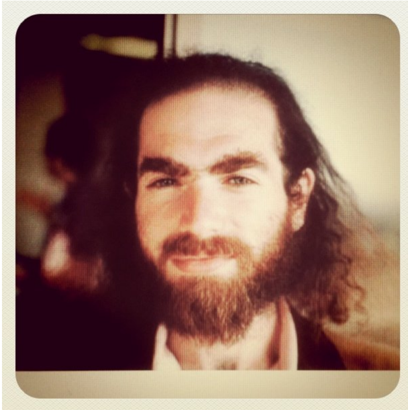
25x25

Ensayos: N^{2N^2}

Los siete "Problemas del Milenio"

Propuestos el año 2000 por
el Clay Mathematical Institute:

1. P versus NP
2. La conjetura de Hodge
3. La conjetura de Poincaré
4. La hipótesis de Riemann
5. Existencia de Yang-Mills y del salto de masa
5. Las ecuaciones de Navier-Stokes
7. La conjetura de Birch y Swinnerton-Dyer



Perelman (2003)

Premio: 10^6 dólares c/u

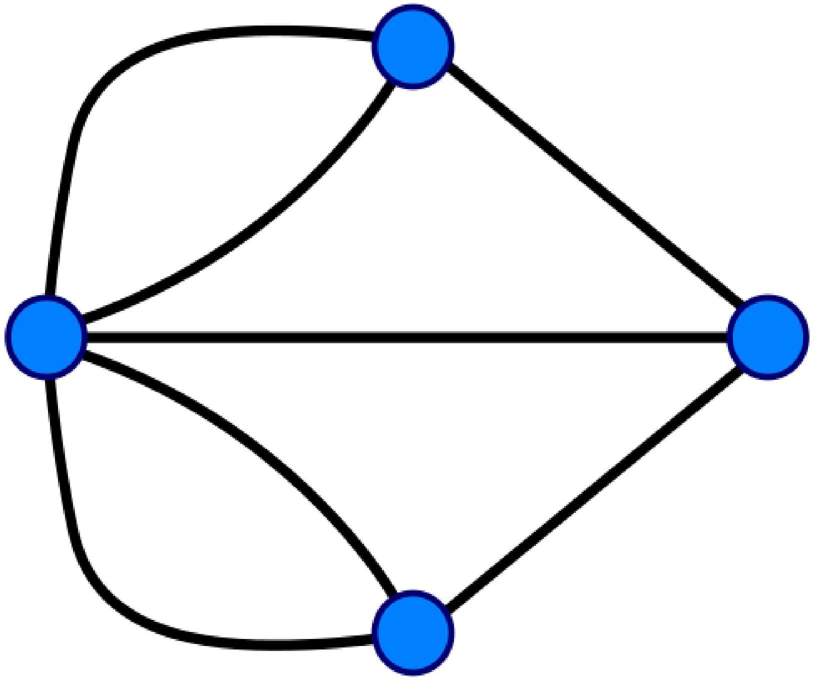
P versus NP

S. Cook (1971): is P = NP?

¿Es cierto que todo problema cuyas soluciones pueden verificarse rápidamente, también se puede resolver rápidamente?

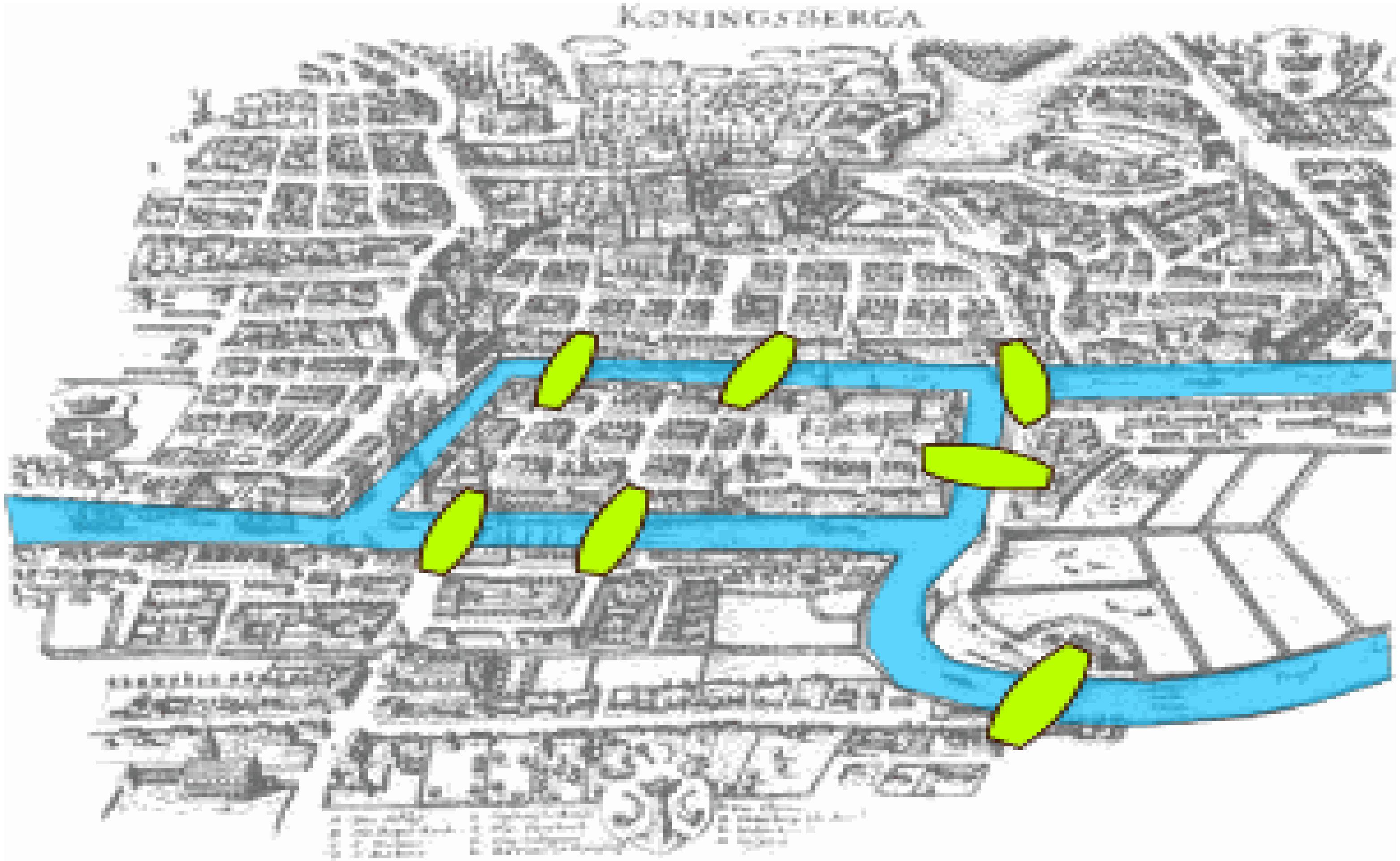
"If P=NP, then the world would be a profoundly different place than we usually assume it to be. There would be no special value in "creative leaps," no fundamental gap between solving a problem and recognizing the solution once it's found. Everyone who could appreciate a symphony would be Mozart; everyone who could follow a step-by-step argument would be Gauss"

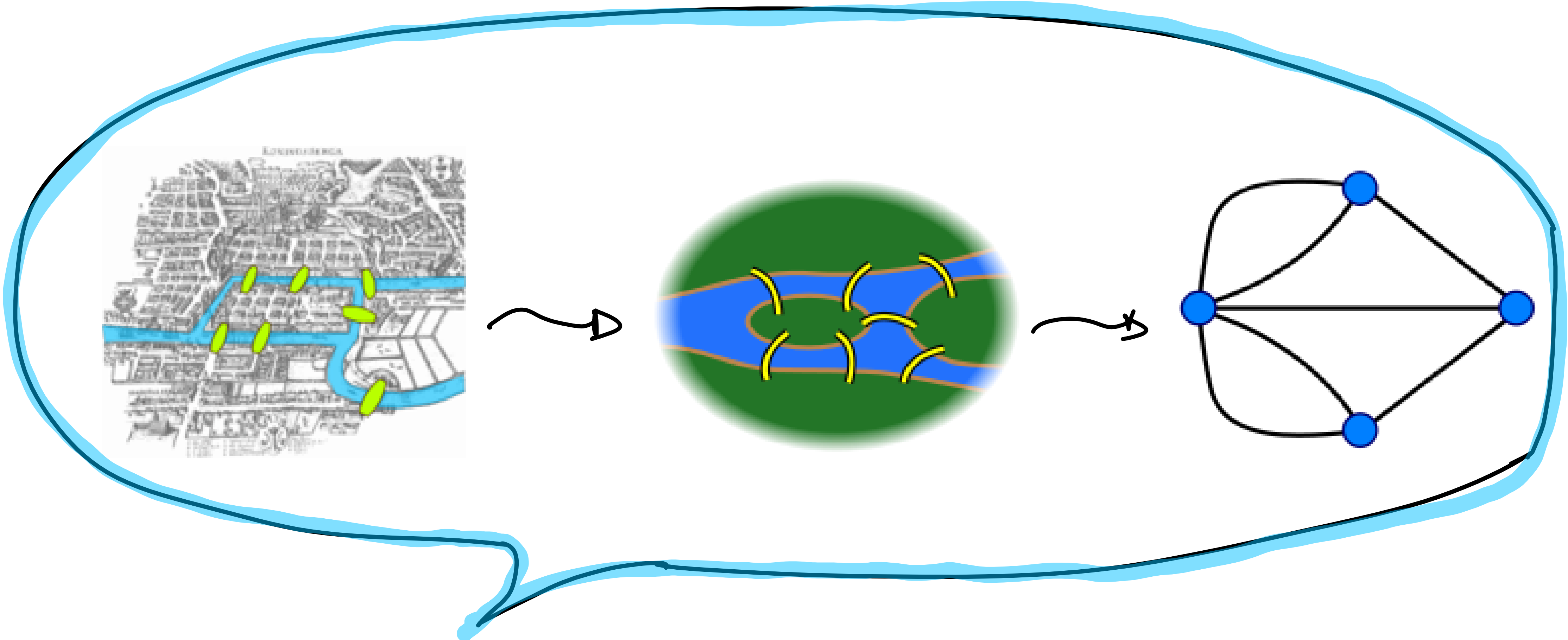
S. Aaranson (MIT)



¿SE PUEDE RECORRER ESTE GRAFO PASANDO EXACTAMENTE UNA VEZ POR CADA ARISTA Y VOLVIENDO AL NODO DE PARTIDA?

Los siete puentes de Könisberg





EULER (1736): HAY 100 CAMINOS QUE NO REPITEN ARISTAS.

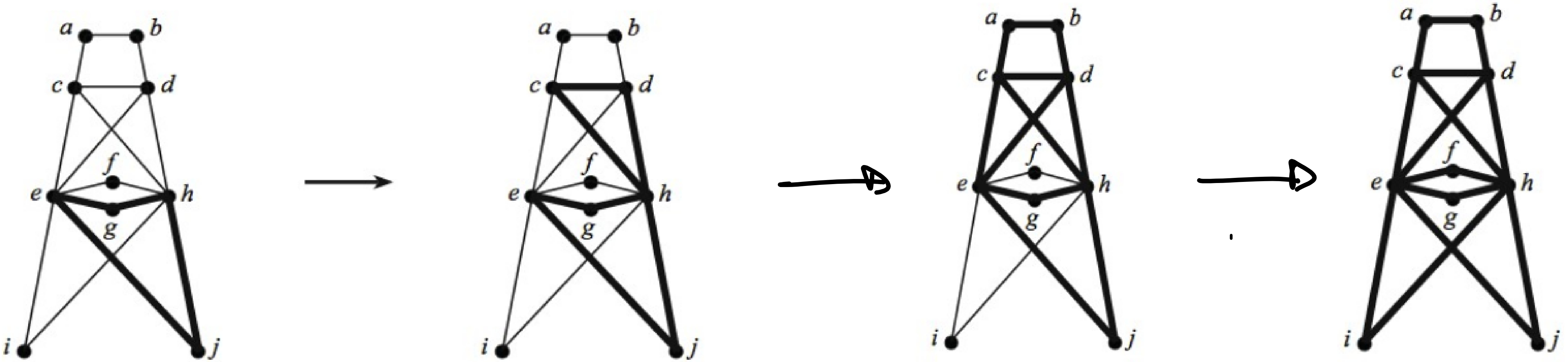
¿SE PUEDE ENCONTRAR UN CICLO EULERIANO?

EULER: UN GRAFO TIENE UN CICLO EULERIANO SI (Y SÓLO SI):

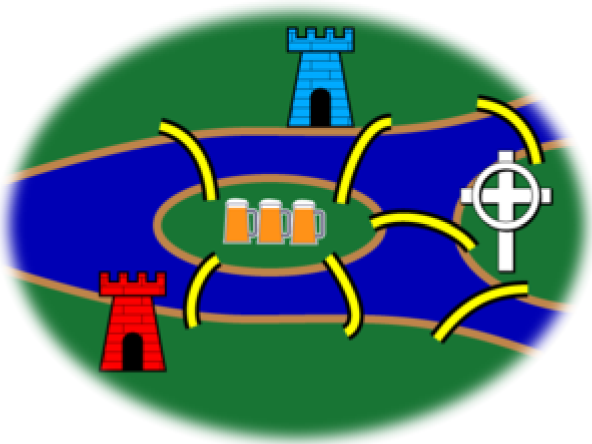
(1) ES CONEXO

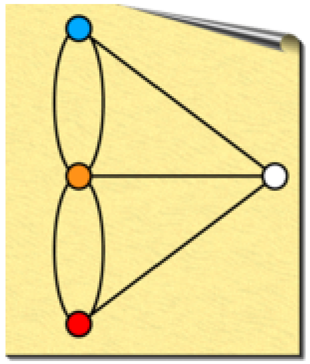
(2) A TODO NODO LLEGA UN NÚMERO PAR DE ARISTAS

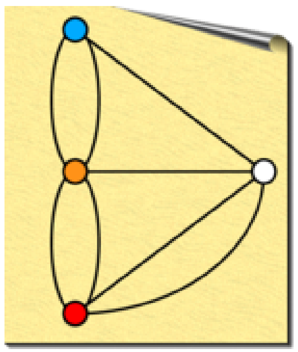
ALGORITMO DE HIERHOLZER (1873):



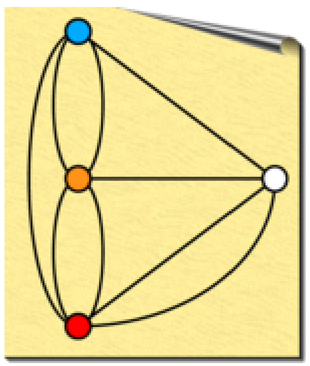
El Príncipe Azul, el Príncipe Rojo,
y el Cura del Pueblo



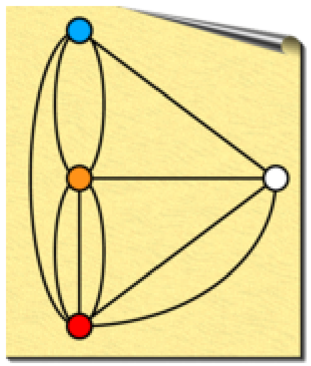




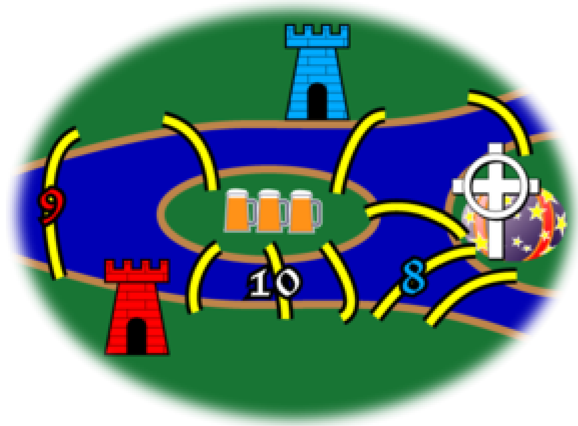
8° PUENTE



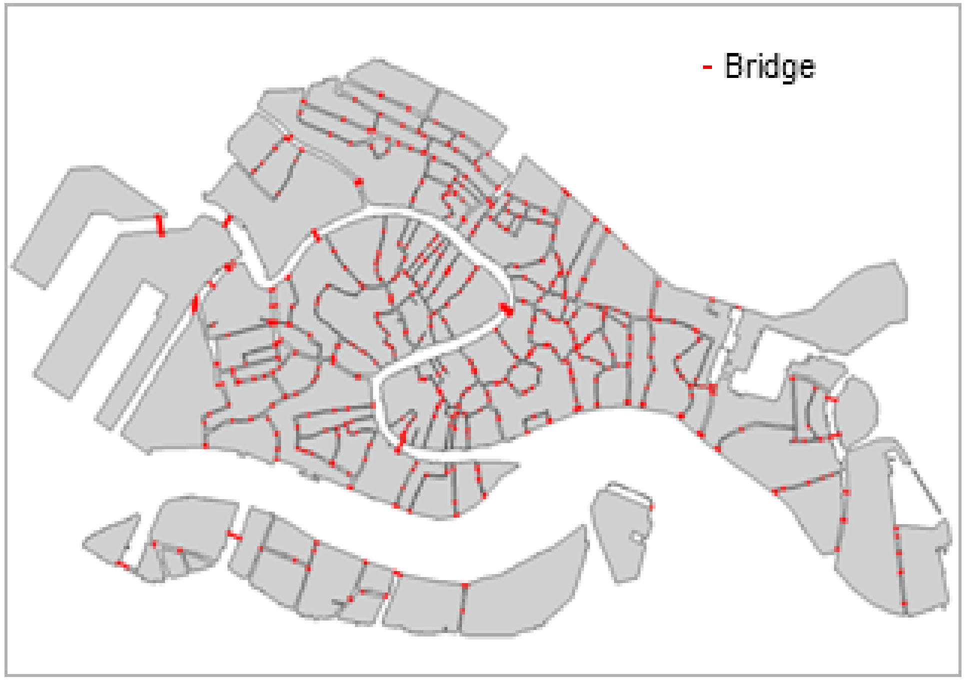
9° PUENTE



10° PUENTE

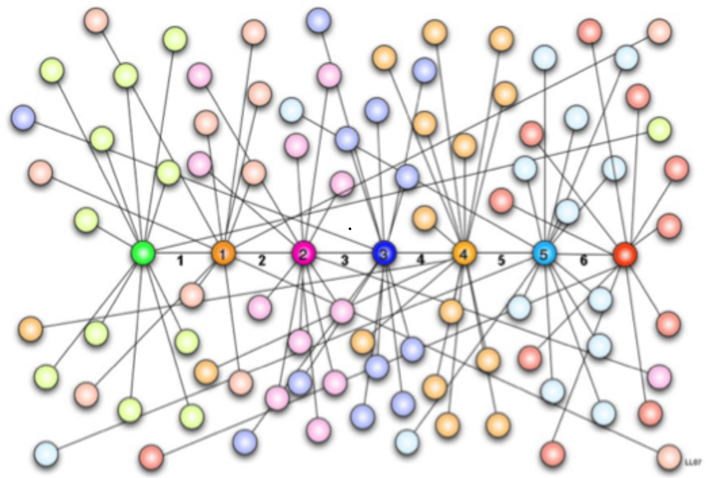


Los cuatrocientos nueve puentes de Venecia

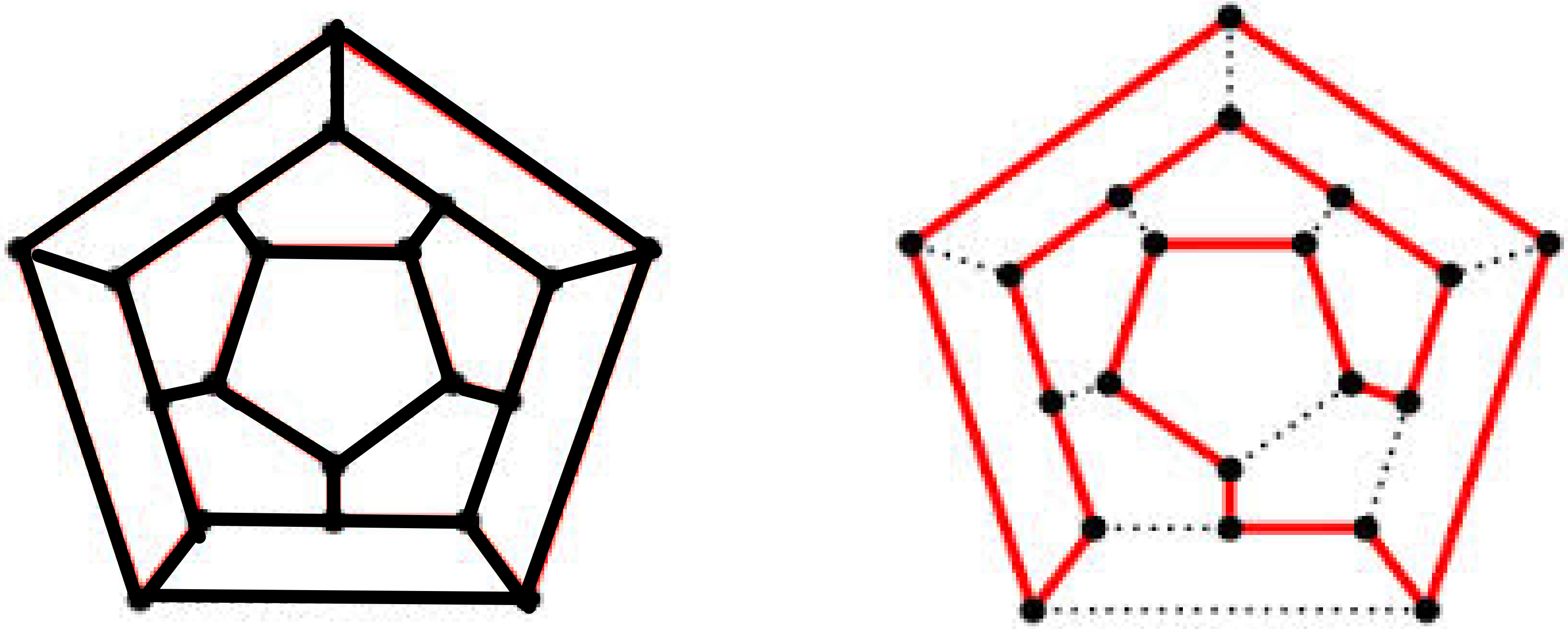


409 puentes: 409 aristas

117 islas: 117 nodos



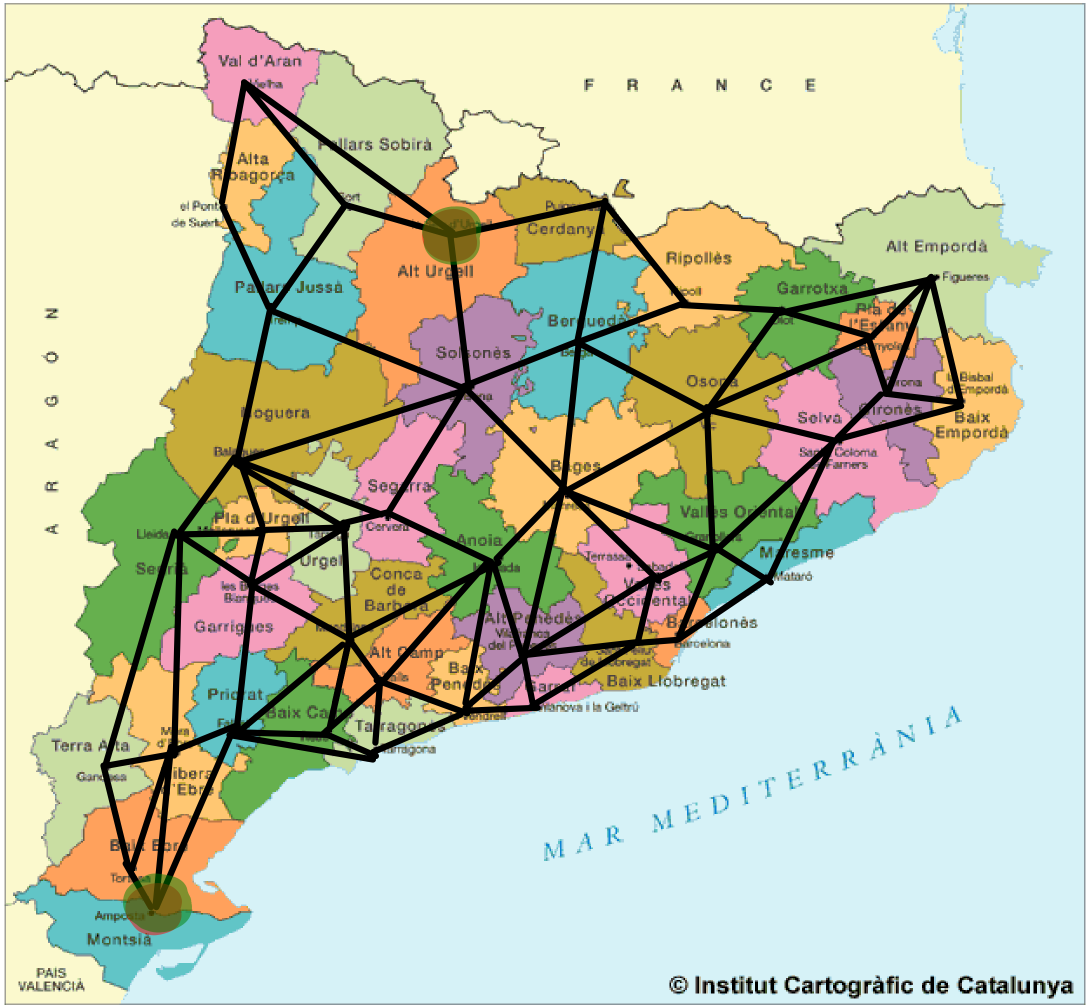
CAMINOS HAMILTONIANOS



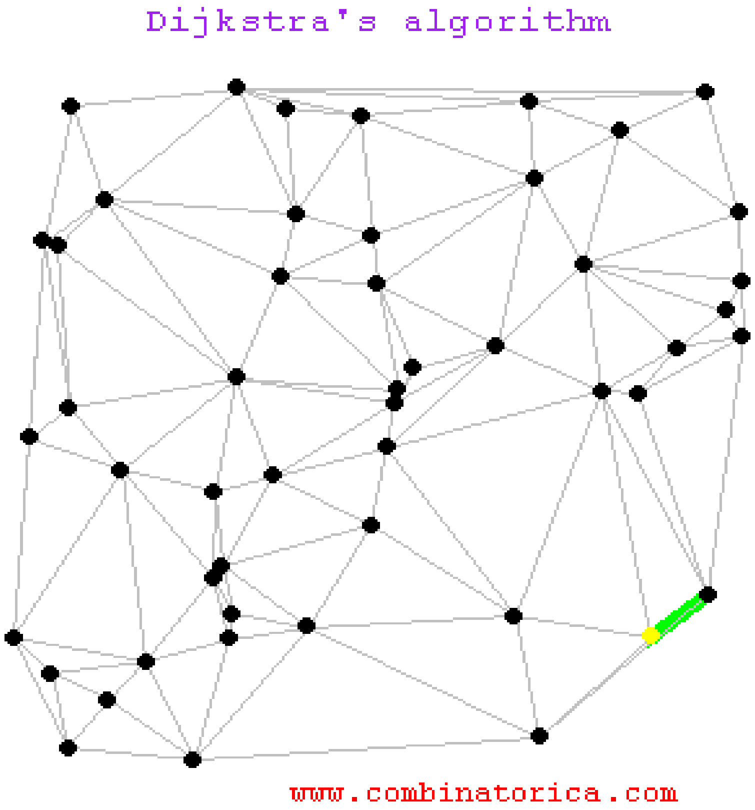
HAMILTON (1859): ¿SE PUEDE ENCONTRAR UN CICLO QUE PASE EXACTAMENTE UNA VEZ POR CADA NODO?

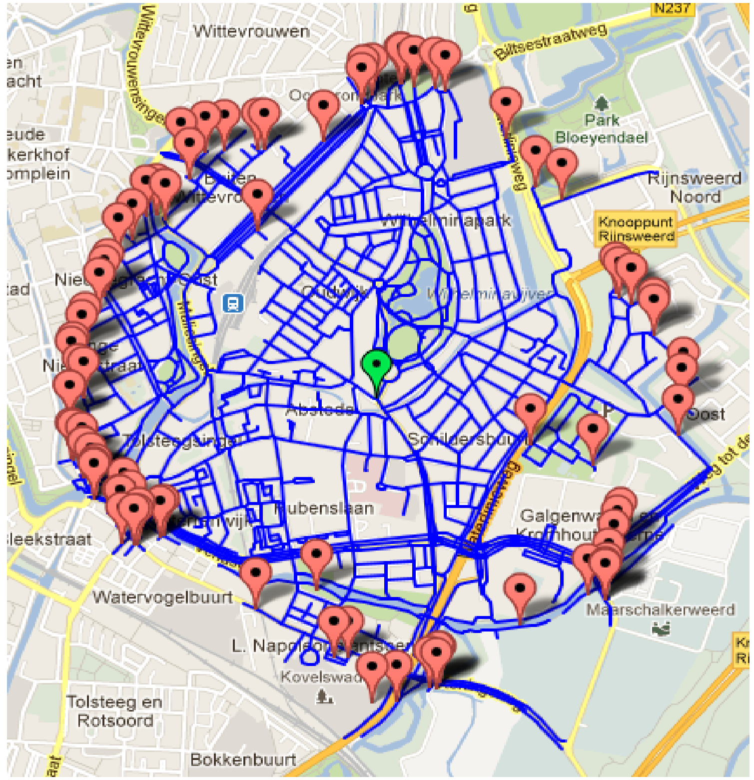
ALGORITMO DE HELD-KARP (1962): VERIFICA SI UN GRAFO DE N NODOS ES HAMILTONIANO USANDO $N^2 \times 2^N$ OPERACIONES

El camino más corto



¿Cual es la ruta más corta entre Amposta y la Seu d'Urgell?

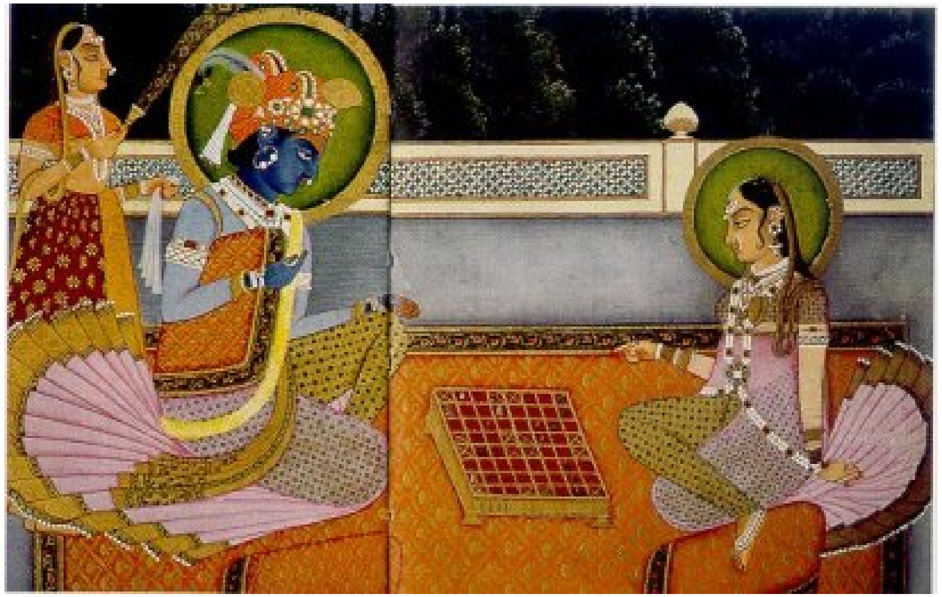




ALGORITMO DE DRIJSKA (1956): N^2 OPERACIONES SOBRE
UN GRAFO DE N NODOS

APLICACIONES A RUTEO: GPS, GOOGLE MAPS, OPEN MAP, ETC

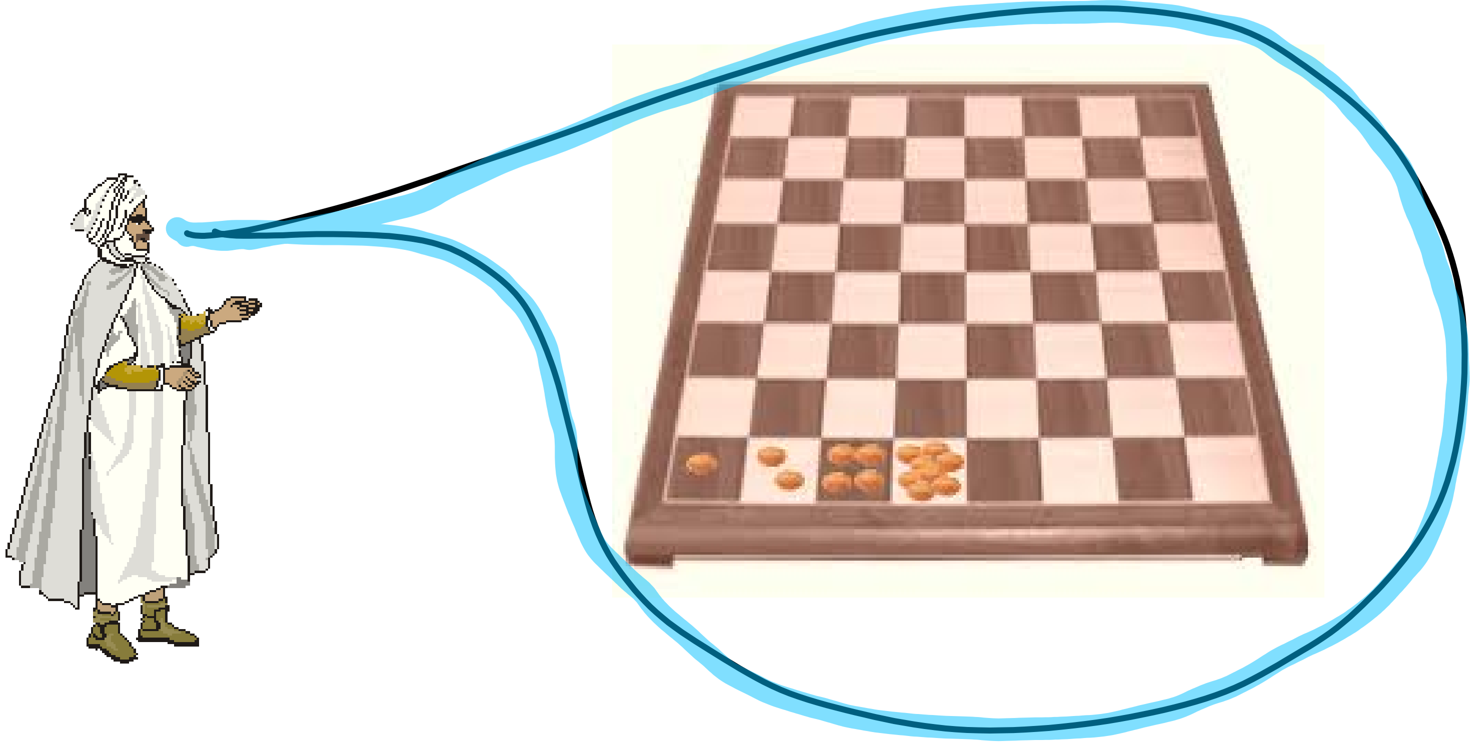
LA LEYENDA DEL AJEDREZ

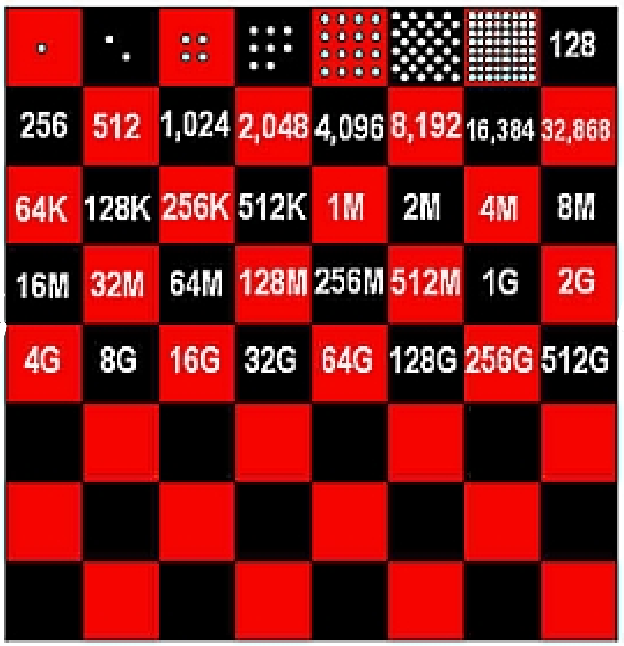


KRISHNA JUGANDO CON RHADA

SHAMS DE TABRIZ (~1300)

Y Sissa dijo:




128
256 512 1,024 2,048 4,096 8,192 16,384 32,868
64K 128K 256K 512K 1M 2M 4M 8M
16M 32M 64M 128M 256M 512M 1G 2G
4G 8G 16G 32G 64G 128G 256G 512G

¿CUÁNTOS GRANOS DE ARROZ?

CRECIMIENTO EXPONENCIAL

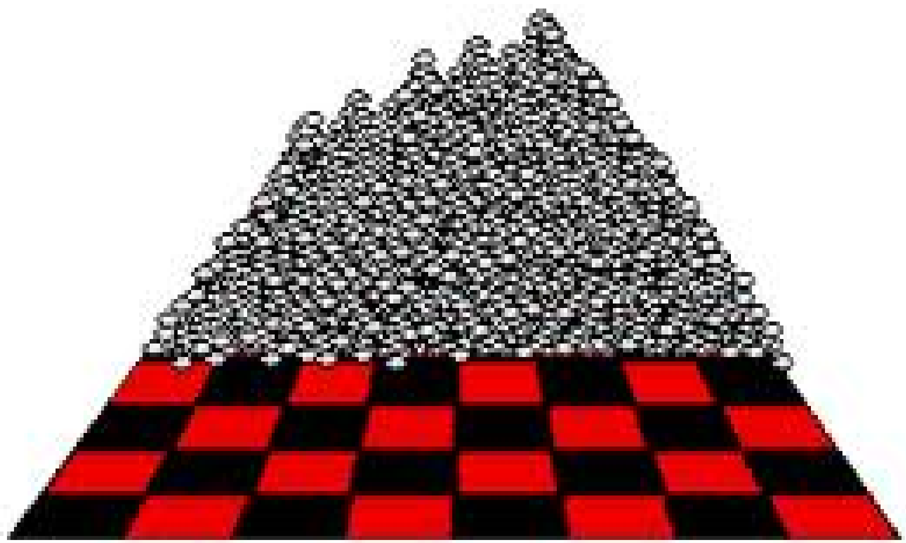
$$A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{63} = 2^{64} - 1$$

$= 18.446.744.073.709.551.615 \approx 1{,}8 \times 10^{19}$ GRANOS DE ARROZ!

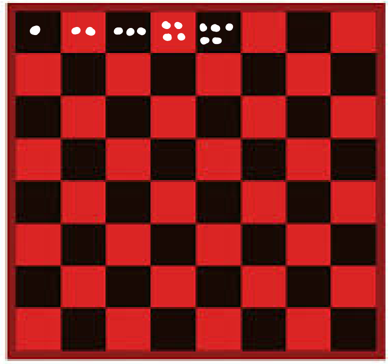
$\approx$ 461.168.602.000 TONELADAS DE ARROZ

$\approx$ 1.000 PRODUCCIÓN MUNDIAL EN 2012

> MT EVEREST DE ARROZ!!



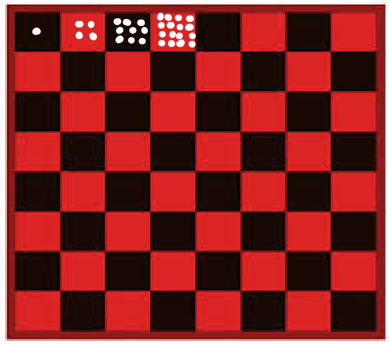
CRECIMIENTO LINEAL



$$1+2+3+4+\dots+64=\frac{64\times 65}{2}=2080 \text{ GRANOS}$$

$$\approx 0{,}40 \text{ KILOS DE ARROZ}$$

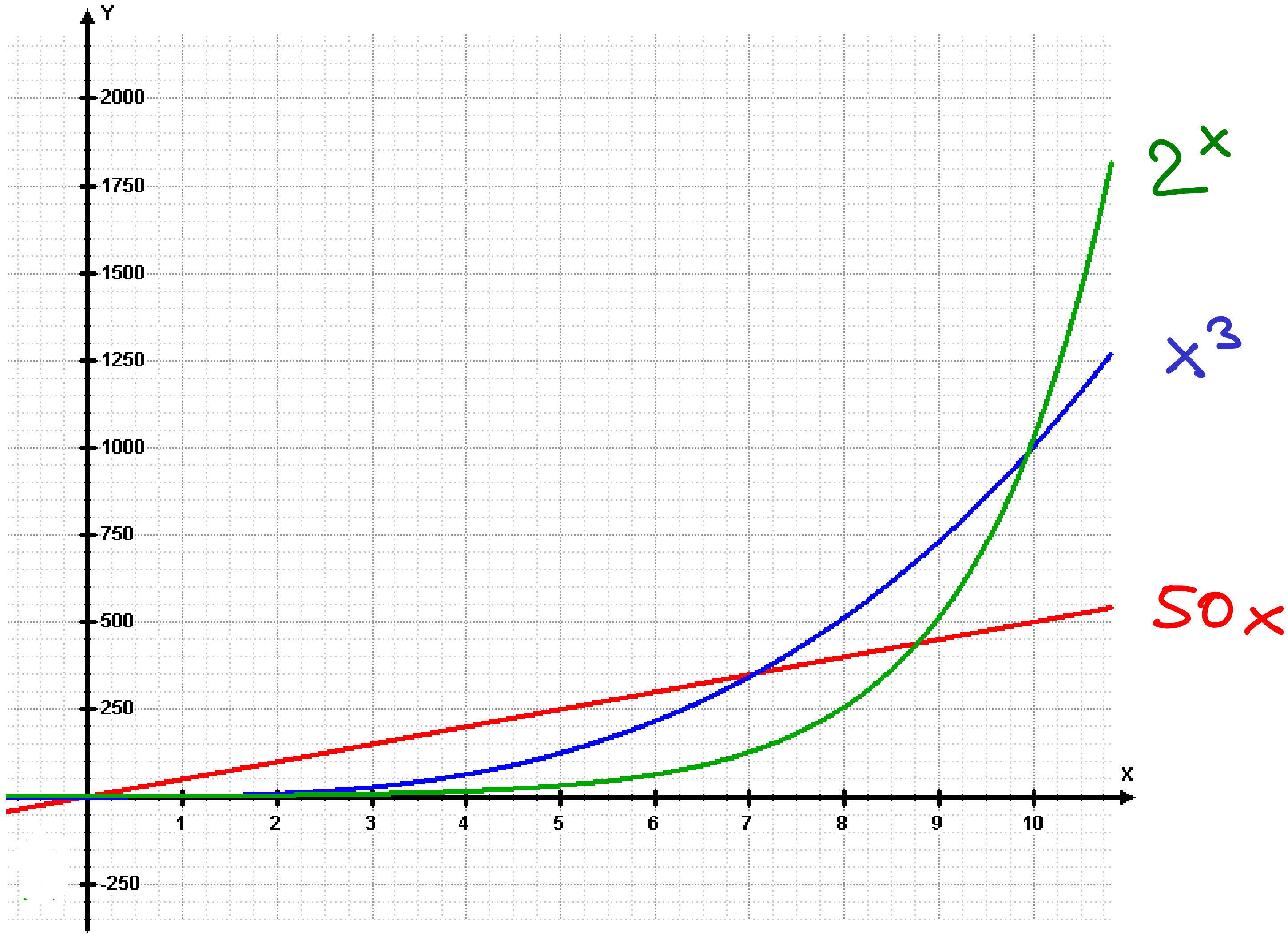
CRECIMIENTO CUADRÁTICO



$$1^2+2^2+3^2+4^2+\dots+64^2=89.440 \text{ GRANOS}$$

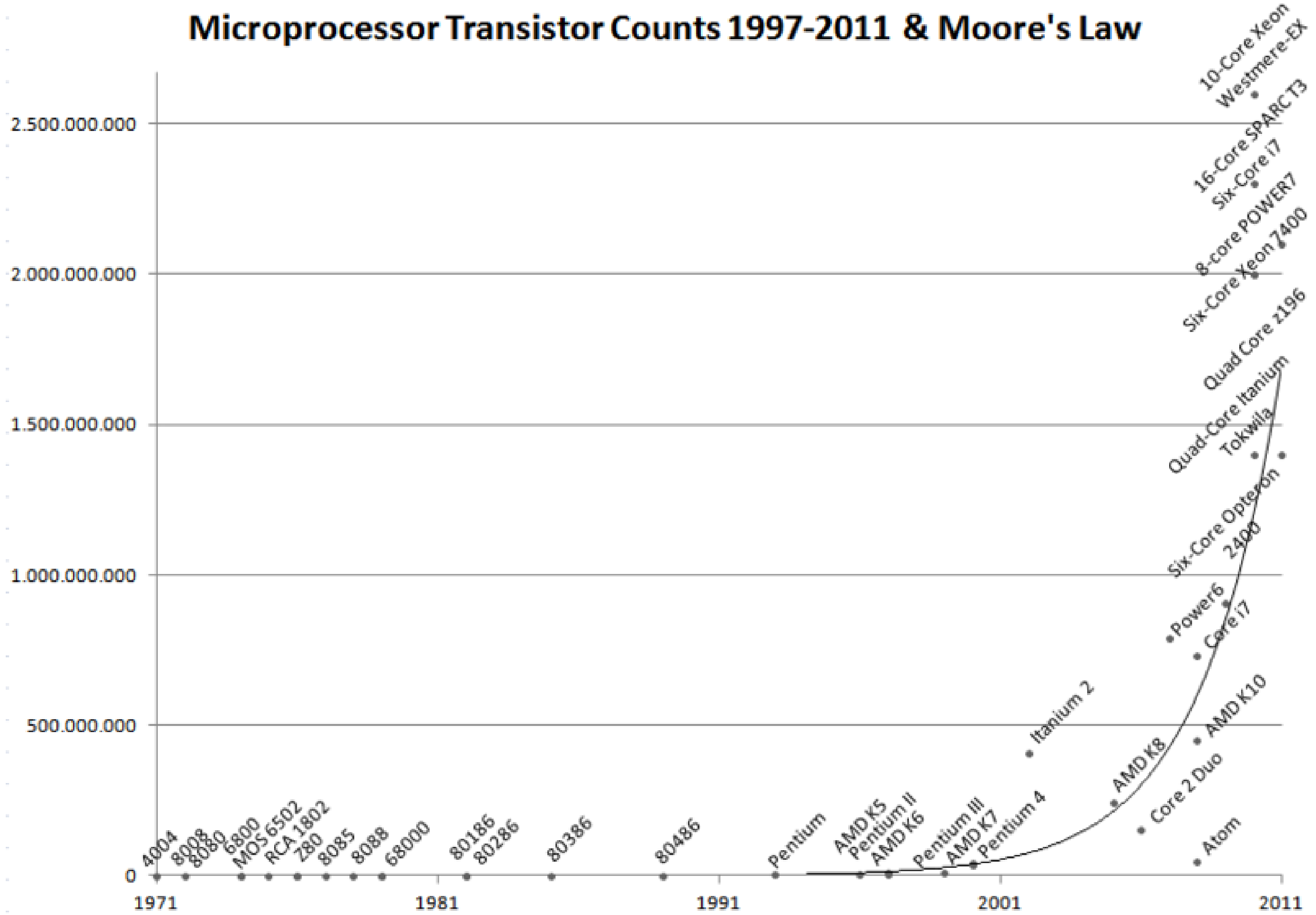
$$\approx 17{,}2 \text{ KILOS DE ARROZ}$$

POLINOMIAL VERSUS EXPONENCIAL



Ley de Moore (1965)

EL RENDIMIENTO DE LOS ORDENADORES SE DUPLICA CADA DOS AÑOS



CONSECUENCIAS PRÁCTICAS

PROBLEMA	COMPLEJIDAD	CAPACIDAD DE CÁLCULO 2013	CAPACIDAD DE CÁLCULO 2015
SUMA DE NÚMEROS DE N CIFRAS	LINEAL	N	$2 \times N$
CICLOS EULERIANOS SOBRE N NODOS	CUADRÁTICA	N	$1{,}41 \times N$
CAMINO MÁS CORTO SOBRE N NODOS	CUADRÁTICA	N	$1{,}41 \times N$
CICLOS HAMILTONIANOS SOBRE N NODOS	EXPONENCIAL	N	$N+1$
SUDOKU $N^2 \times N^2$	EXPONENCIAL	N	$N+1$

Las clases P y NP

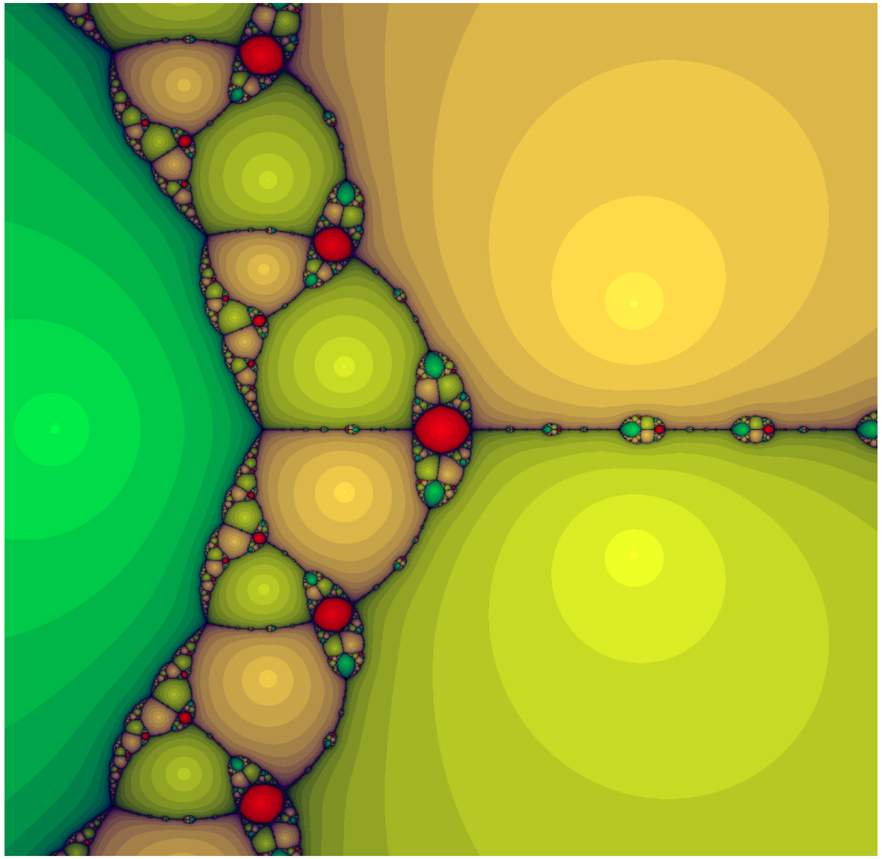
P = {Problemas que se pueden resolver en tiempo polinomial en el tamaño de la entrada}

- Sumar números ∈ P
- Ciclos eulerianos ∈ P
- El camino más corto ∈ P

NP = {Problemas con soluciones que se verifican en tiempo polinomial en el tamaño de la entrada}

- Ciclos hamiltonianos ∈ NP
- Sudoku ∈ NP

- Resolver sistemas de ecuaciones polinomiales en varias variables



Fractal de Newton

de $P(z) = z^3 - 2z + 2$

PROBLEMAS NP-COMPLETOS

UN PROBLEMA ES NP-COMPLETO SI TODO PROBLEMA EN NP PUEDE REDUCIRSE A ÉL EN TIEMPO POLINOMIAL

SON LOS PROBLEMAS "MÁS DIFÍCILES" EN NP

EJ: CICLOS HAMILTONIANOS (COOK, LEVIN 1971)

SUDOKU $N^2 \times N^2$ (YATO 2002)

LA PREGUNTA ¿P = NP? ES EQUIVALENTE A DECIDIR SI SE PUEDE RESOLVER SUDOKUS $N^2 \times N^2$ EN TIEMPO POLINOMIAL EN N

ALGUNAS DE LAS COSAS QUE HEMOS VISTO:

- CÓMO RESOLVER UN SUDOKU
- SABER SI HAY UN CAMINO EULERIANO, Y CÓMO ENCONTRARLO
- QUÉ ES UN CAMINO HAMILTONIANO
- CÓMO ENCONTRAR EL CAMINO MÁS CORTO ENTRE DOS PUNTOS
- CRECIMIENTO POLINOMIAL Y CRECIMIENTO EXPONENCIAL
- LAS CLASES P Y NP
- LOS PROBLEMAS NP COMPLETOS

¿CÓMO SE INVESTIGA EN MATEMÁTICA?

- BUSCAR PROBLEMAS INTERESANTES

  ... Y TRATAR DE RESOLVERLOS !
- PROPONER SOLUCIONES Y VALIDARLAS

  = PRODUCIR UNA DEMOSTRACIÓN

MÁS:
- PUBLICAR LOS RESULTADOS
- COMUNICAR EN CONGRESOS Y SEMINARIOS
- INTEGRAR GRUPOS Y REDES DE INVESTIGACIÓN
- FORMAR OTROS INVESTIGADORES

¿De dónde salen los Matemáticos?

- Grado en Matemática (4 años)
- Máster (1 año)
- Doctorado (4-5 años)

- U. Barcelona
- U. Politècnica de Catalunya
- U. Autònoma de Barcelona

UNIVERSITAT DE BARCELONA

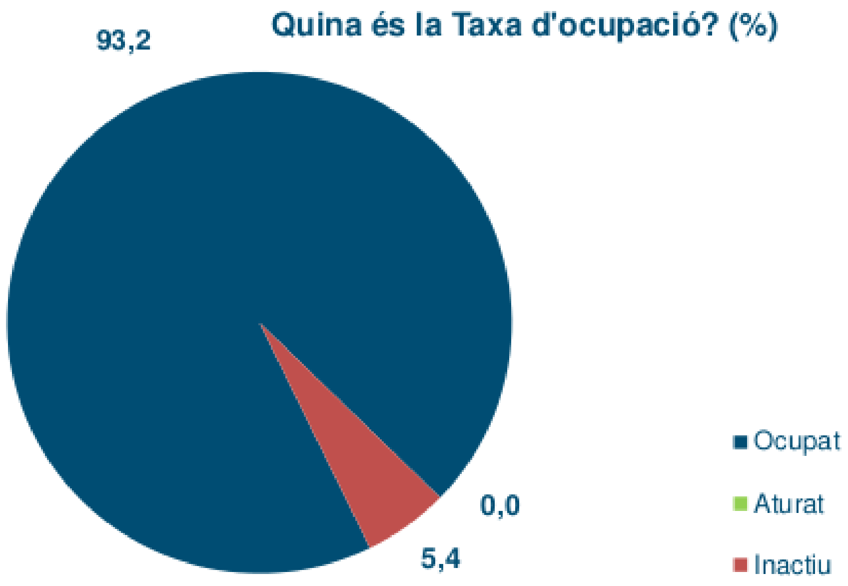
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA BARCELONATECH

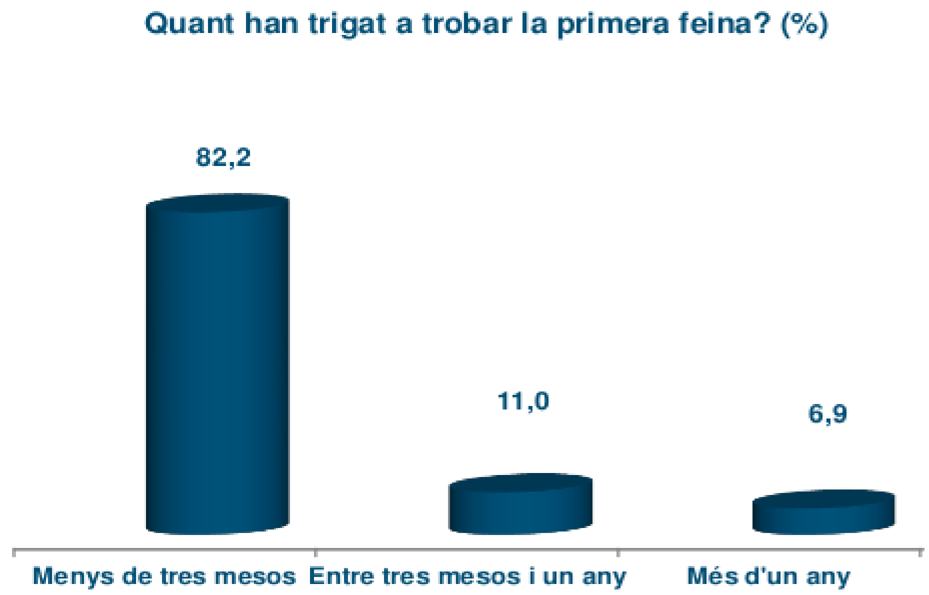
UPC

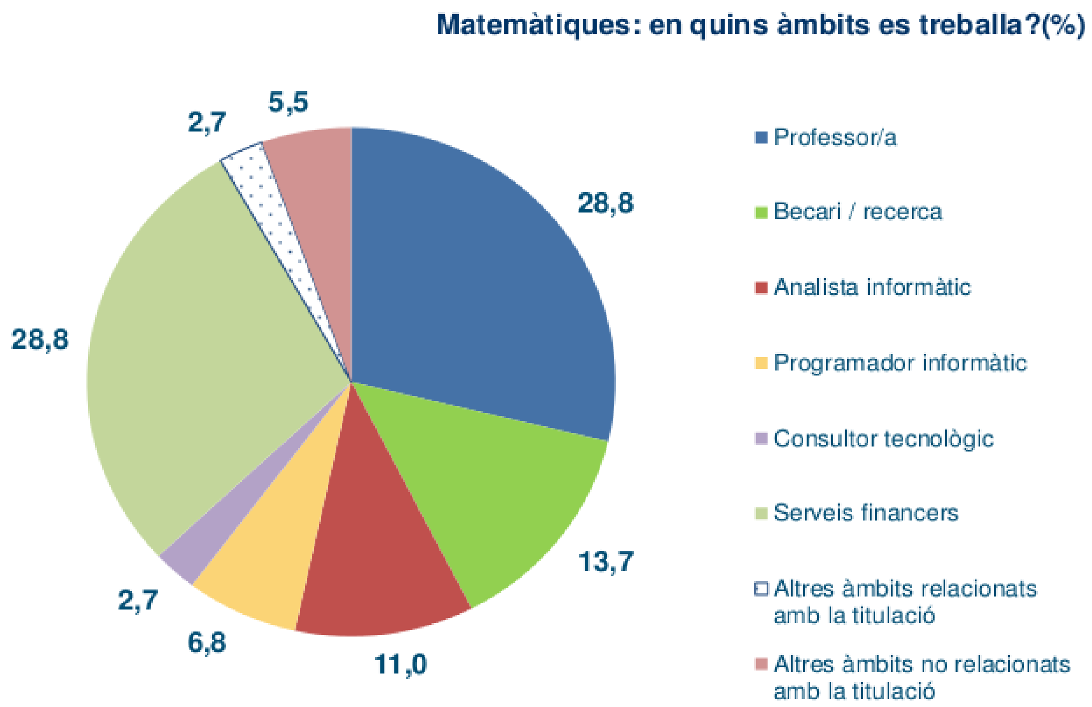
UAB Universitat Autònoma de Barcelona

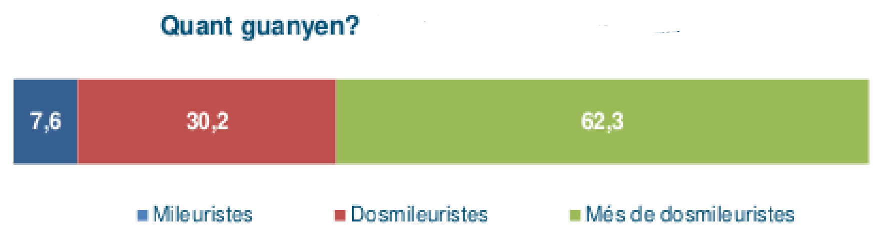
La Encuesta de Inserción Laboral 2011 (AQU GenCat)

	Població i mostra							
	Població	Mostra	% resposta	% error mostral	Homes		Dones	
					n	%	n	%
Ll. Matemàtiques (CAT)	95	74	78	5	38	51	36	49

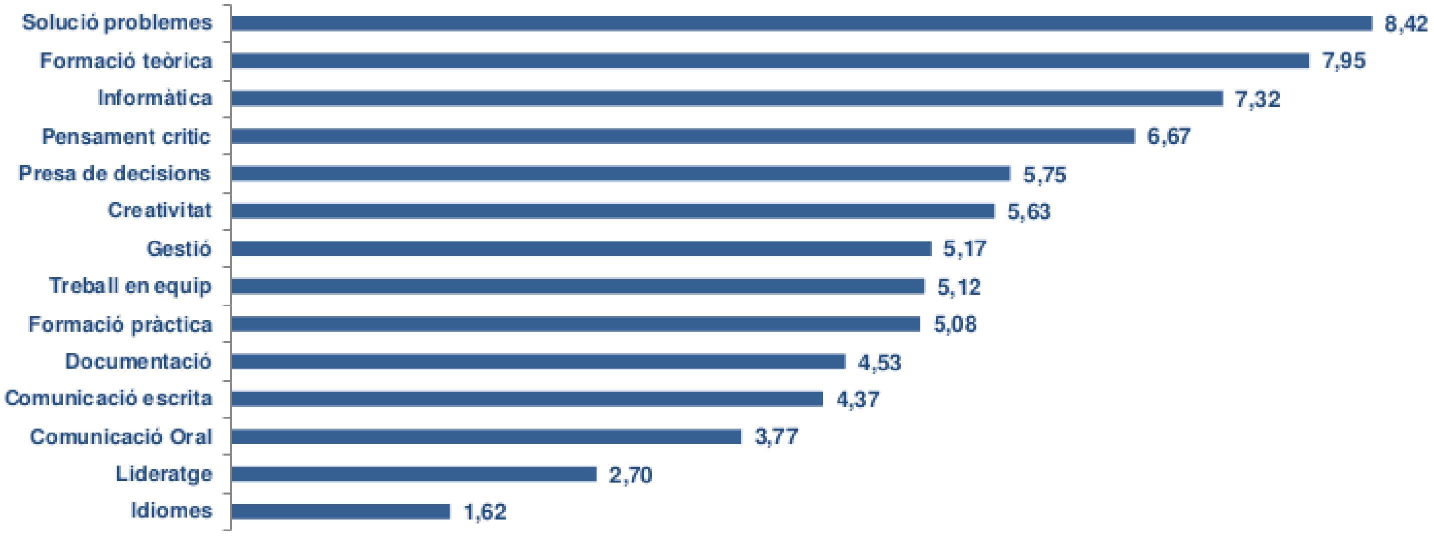

Quina és la Taxa d'ocupació? (%)
93,2
0,0
5,4
Ocupat
Aturat
Inactiu


Quant han trigat a trobar la primera feina? (%)
82,2
11,0
6,9
Menys de tres mesos
Entre tres mesos i un any
Més d'un any

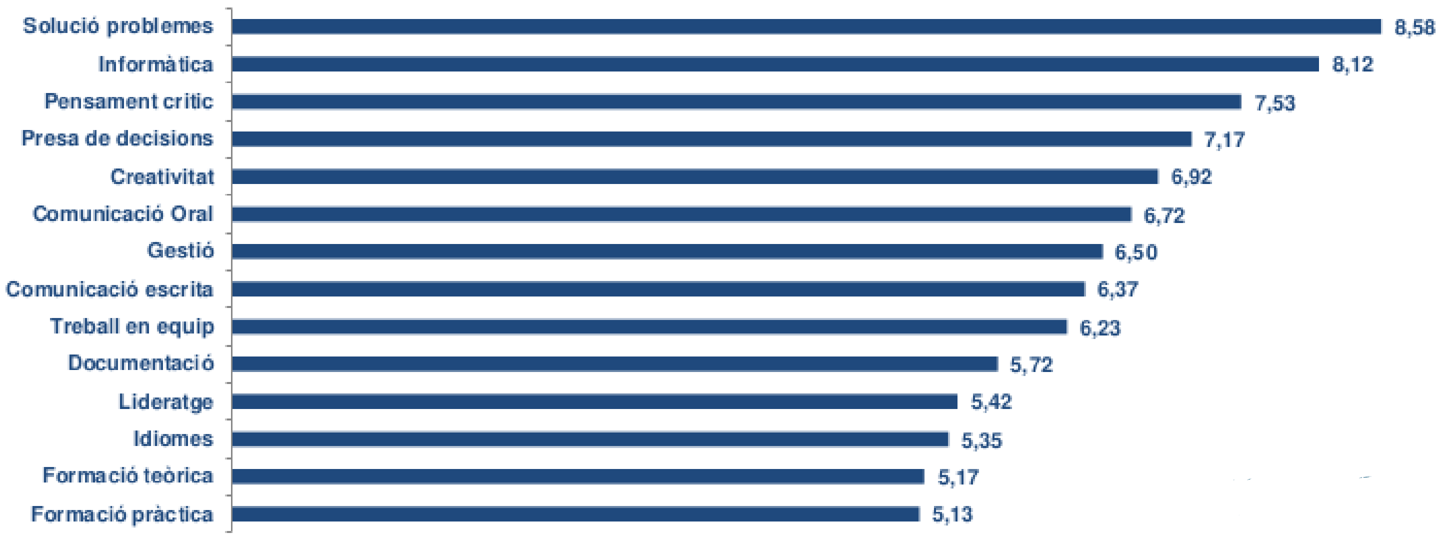

Matemàtiques: en quins àmbits es treballa?(%)
5,5
2,7
28,8
28,8
13,7
2,7
6,8
11,0
Professor/a
Becari / recerca
Analista informàtic
Programador informàtic
Consultor tecnològic
Serveis financers
Altres àmbits relacionats amb la titulació
Altres àmbits no relacionats amb la titulació


Quant guanyen?
7,6
30,2
62,3
Mileuristes
Dosmileuristes
Més de dosmileuristes

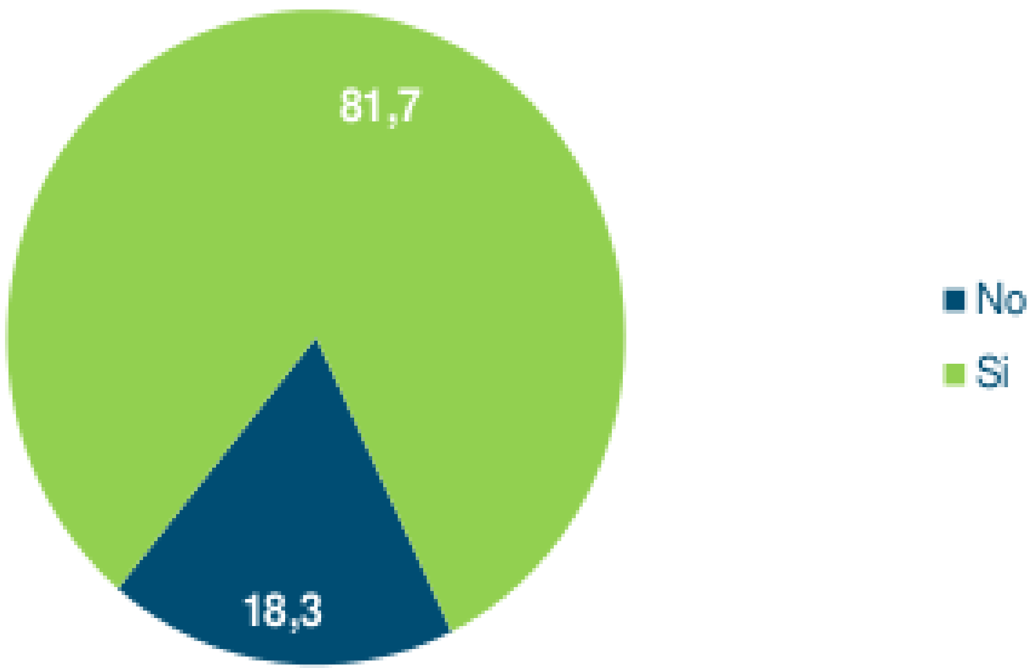
Com valoren el nivell de formació rebut? (4)



Com valoren la utilitat de la formació en el lloc de treball? (4)



Tornarien a fer la mateixa carrera? (%)



PARA SABER MÁS

ADRIÁN PAENZA: http://cms.dm.uba.ar/material/paenza

R. COURANT, H. ROBBINS: ¿QUÉ ES LA MATEMÁTICA?
FONDO DE CULTURA ECONÓMICA, 1952.

En Matemática, ¿ya está todo inventado?

http://atlas.mat.ub.es/personals/sombra

Martín Sombra

ICREA & U. Barcelona

El Prat de Llobregat, 27/11/2013

GOBIERNO DE ESPAÑA
MINISTERIO DE ECONOMÍA Y COMPETITIVIDAD
FECYT FUNDACIÓN ESPAÑOLA PARA LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA
SC[13] www.fundaciorecerca.cat/setmanaciencia