

EN MATEMÁTICA...

¿YA ESTÁ TODO INVENTADO?

MARTÍN SOMBRA

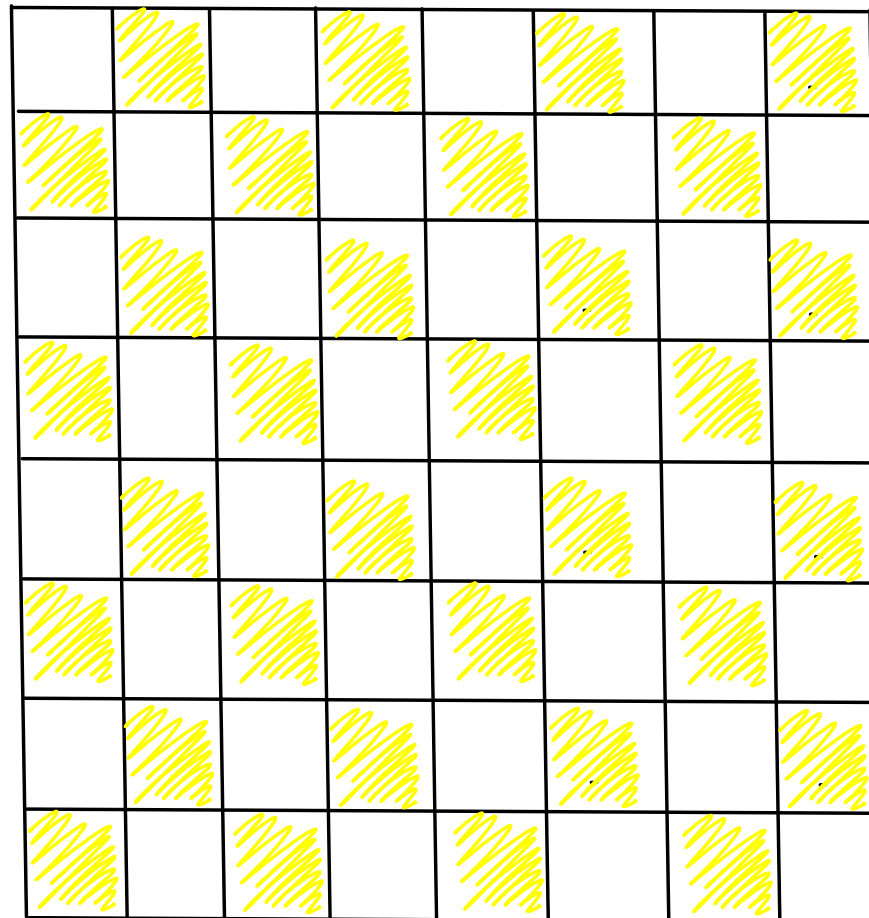
7/5/2012

¿Queda algo por investigar?



LA RECHERCHE, C'EST FINI. TOUT A ETE INVENTE

LA LEYENDA DEL AJEDREZ



0	00	000	0000	00000	000000	0000000	00000000
00		000		00000		0000000	
	00		0000		0000000		00000000
000		0000		0000000		00000000	
	0000		0000000		00000000		000000000
0000		0000000		00000000		000000000	
	0000000		00000000		000000000		0000000000
0000000		00000000		000000000		0000000000	
	00000000		000000000		0000000000		00000000000
00000000		000000000		0000000000		00000000000	

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2^{63} \approx 10^{19}$$

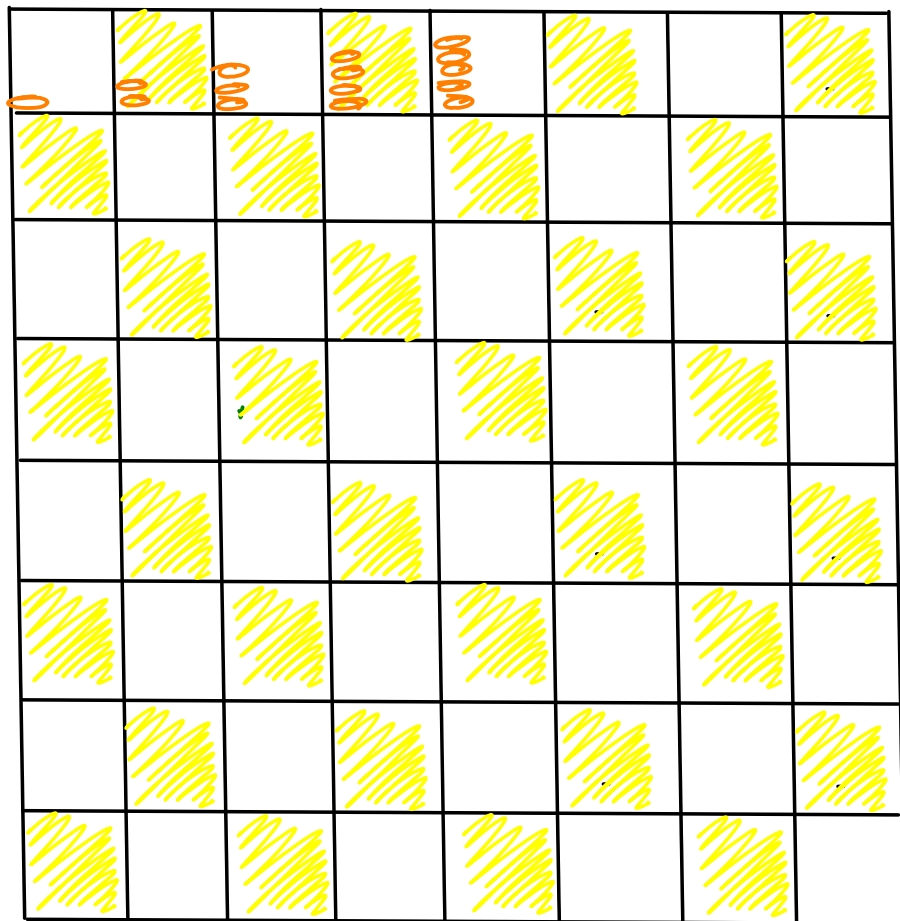
PRODUCCIÓN MUNDIAL DE ARROZ (2009): 678.000.000 tn

1 KG DE ARROZ \approx 5000 gramos (1 grano \approx 0,20 g)

\rightarrow SE PRODUCEN $3,39 \cdot 10^{15}$ gramos / año

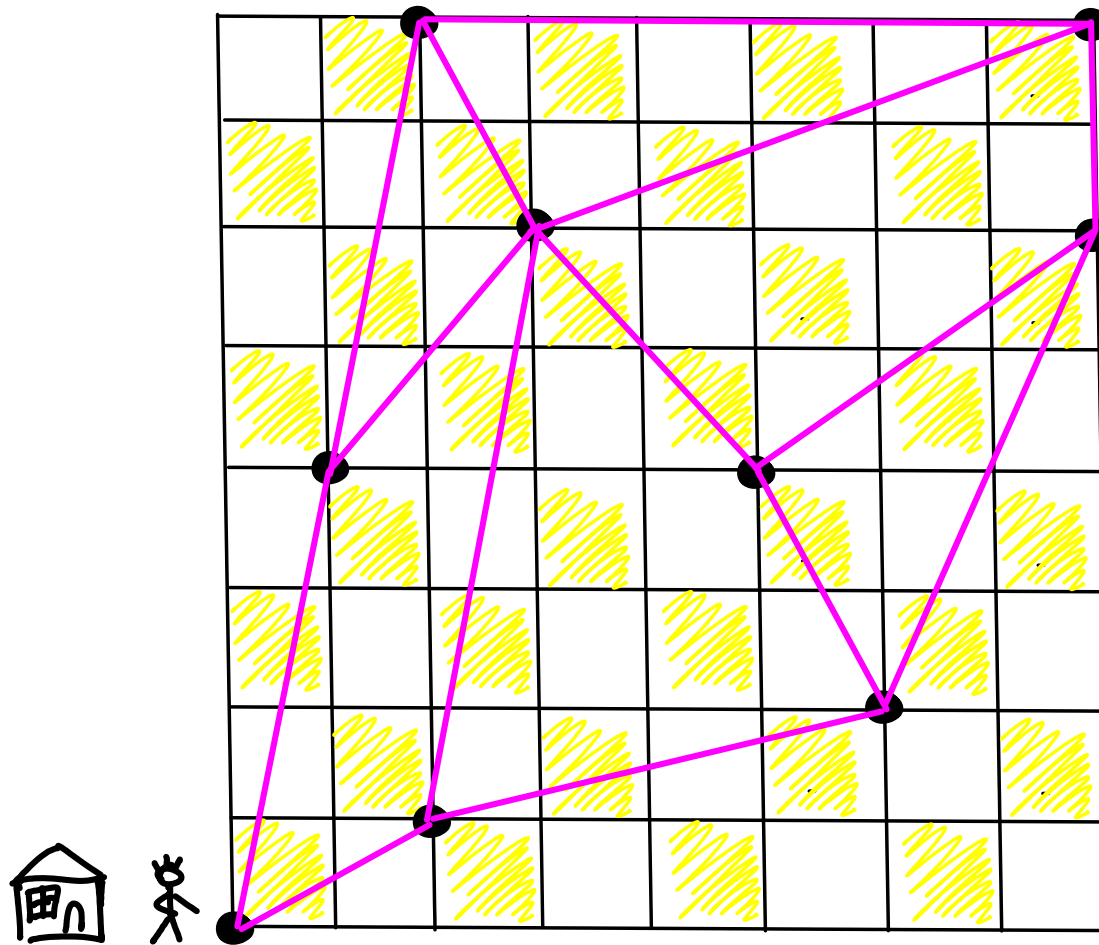
NECESITARÍAMOS $3.000 \times$ PRODUCCIÓN ANUAL !!!

Si el aumento hubiera sido lineal



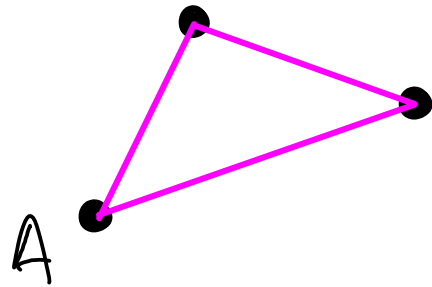
$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 64 = \frac{64 \cdot 65}{2} = 2080 \text{ gramos} \approx 94 \text{ kg}$$

EL PROBLEMA DEL VIAJANTE

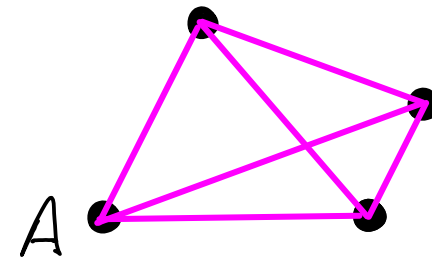


¿Cuál es el camino cerrado más corto para recorrer todas las ciudades?

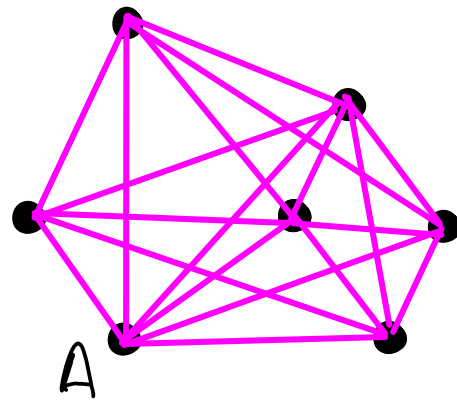
3 ciudades



4 ciudades



7 ciudades:

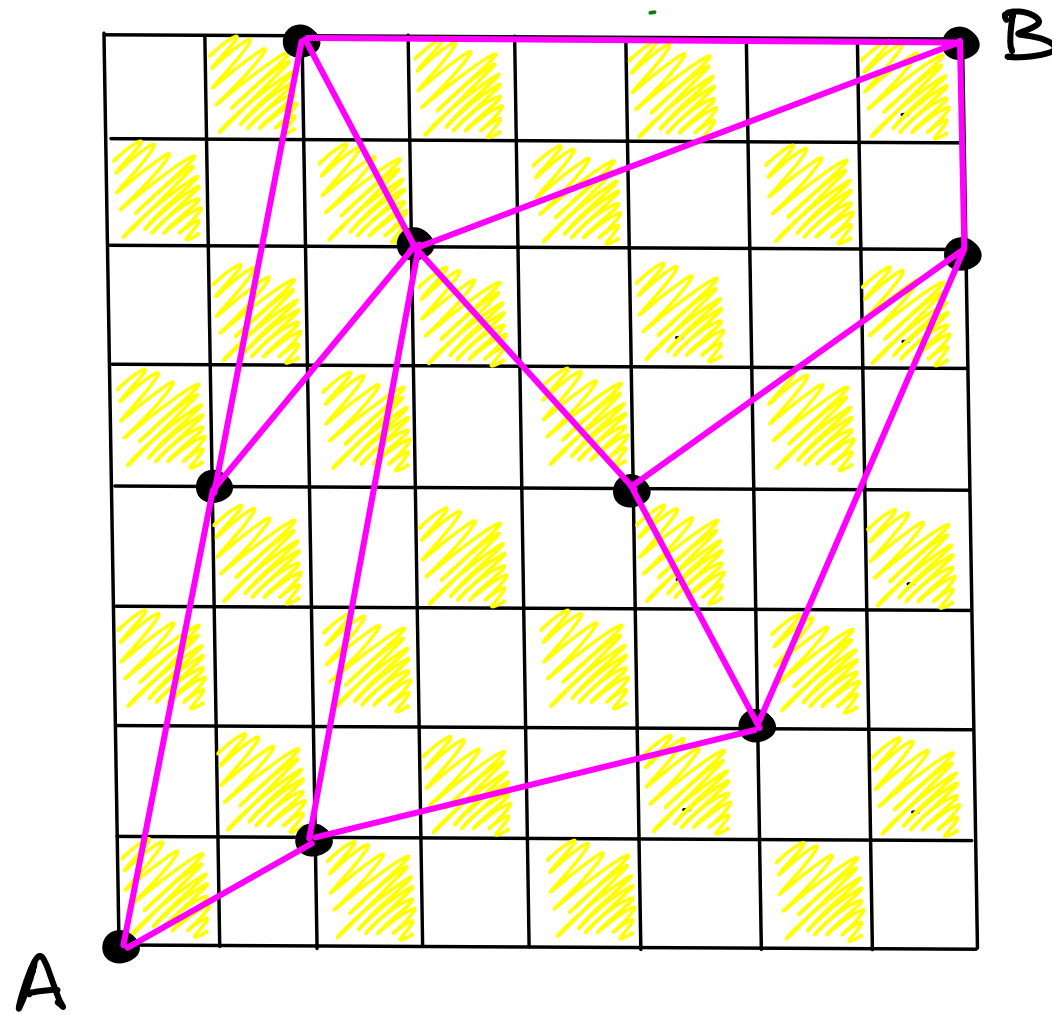


$6! = 720$ recorridos

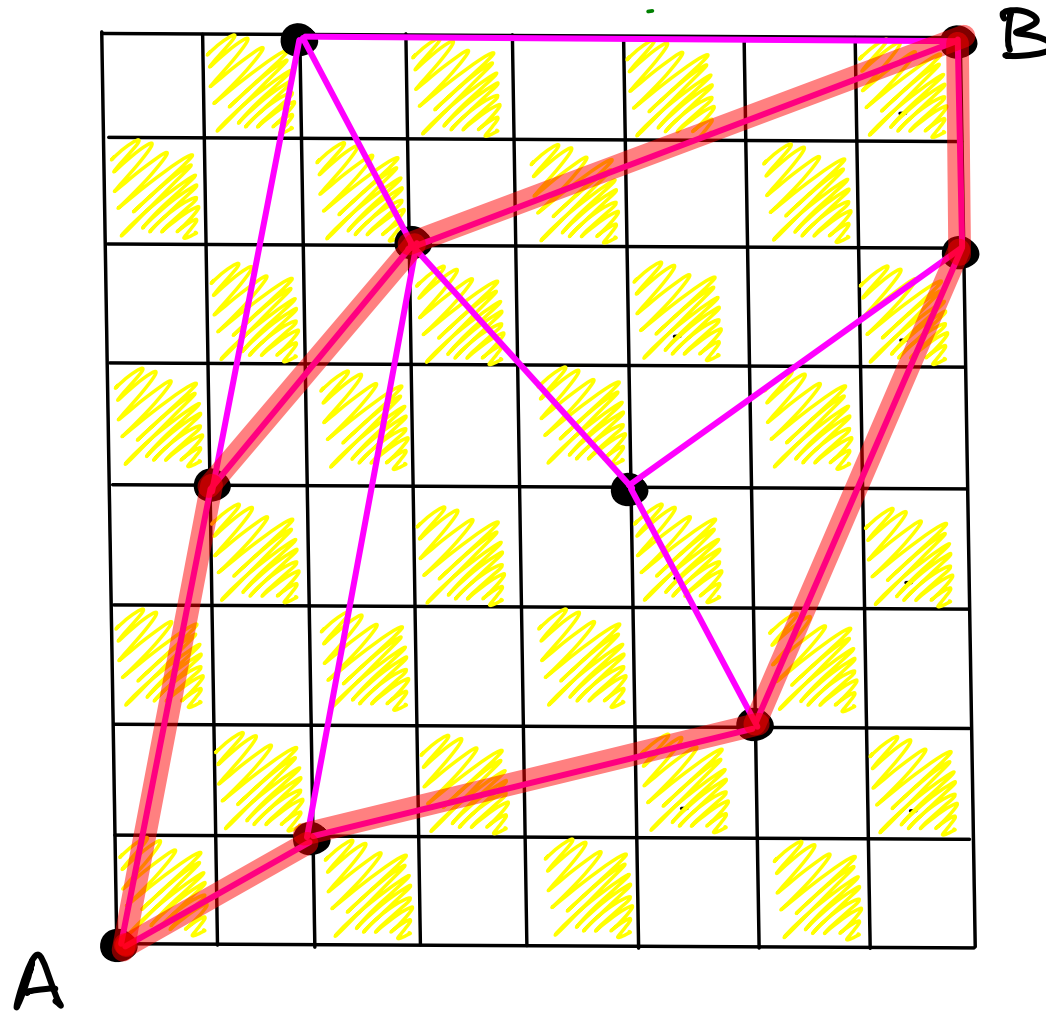
n ciudades: $(n-1)! = (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ recorridos

Ej: $n=33 \rightarrow 28.000.000.000.000$ años en el Mare Nostrum

EL CAMINO MÁS CORTO ENTRE A Y B



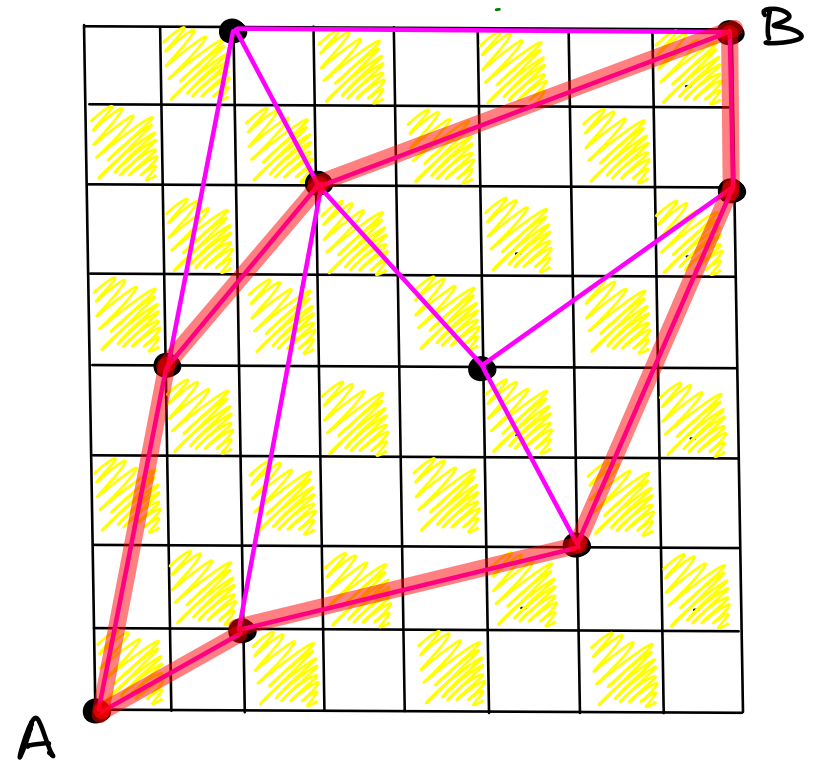
¿CUAL DE LAS DOS RUTAS ES LA MAS CORTA?



Usando el teorema de Pitágoras:

$$\text{CAMINO 1} = \sqrt{17} + \sqrt{8} + \sqrt{29} = 12,337$$

$$\text{CAMINO 2} = \sqrt{5} + \sqrt{17} + \sqrt{20} + \sqrt{4} = 12,831$$



UN PROBLEMA ABIERTO

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_m \geq 1$$

$$b_1, b_2, b_3, b_4, \dots, b_n \geq 1$$

¿Cuántos dígitos hay que calcular para decidir

$$\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_m} > \sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \dots + \sqrt{b_n} \quad ?$$

Algunos ejemplos

$$\sqrt{10} + \sqrt{11} - \sqrt{5} - \sqrt{18} \approx 0,00002$$

$$\sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{18} - \sqrt{4} - \sqrt{12} - \sqrt{12} \approx 0,0000005$$

Idea #1

$1 \leq a < b$ de h dígitos binarios.

Queremos una minoración para

$$\log_2(\sqrt{b} - \sqrt{a})$$

Multipliquemos y dividamos por el conjugado $\sqrt{b} + \sqrt{a}$

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} = (\sqrt{b} - \sqrt{a}) \frac{\sqrt{b} + \sqrt{a}}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} = \frac{b - a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} \geq \frac{1}{2^{1 + \frac{h}{2}}}$$

$$\implies \log_2(\sqrt{b} - \sqrt{a}) \geq -1 - \frac{h}{2}$$

Ejemplos:

$$\sqrt{3} - \sqrt{2} = 0,3178$$

$$\sqrt{31} - \sqrt{30} = 0,0905$$

$$\sqrt{4095} - \sqrt{4094} = 0,0078$$

Para 3 raíces: Sean $a, b, c \geq 1$ de h dígitos binarios
tales que $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{c}$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

$$\implies \log_2 |\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}| \geq -3 \left(\frac{h}{2} + \log_2 3 \right)$$

En general:

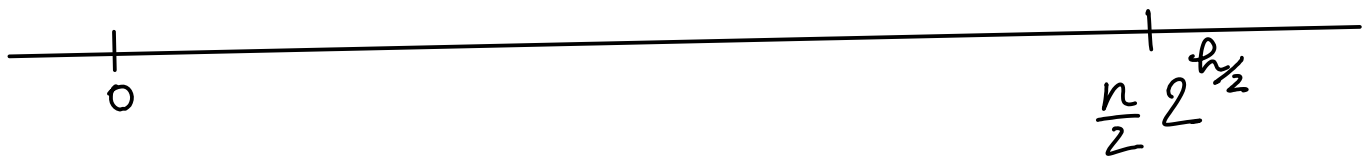
$$\log_2 \left(\sum_{i=1}^k \sqrt{a_i} - \sum_{i=k+1}^n \sqrt{a_i} \right) \geq -(2^n - 1) \left(\frac{h}{2} + \log_2 n \right)$$

exponencial!!

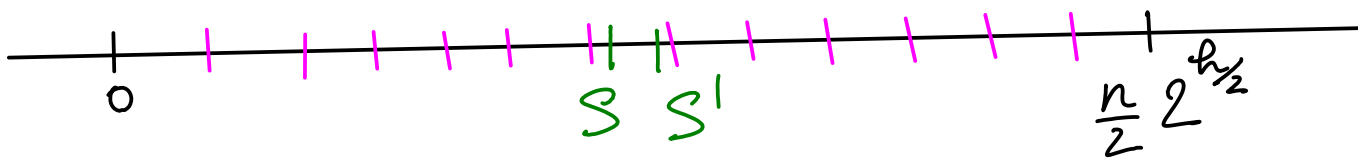
IDEA #2: LAS "CAJAS DE DIRICHLET"

Tomamos todas las posibles sumas

$$\sum_{i=1}^{n/2} \sqrt{a_i} \quad a_i \geq 1 \quad \text{de } h \text{ dígitos}$$



Dividimos el intervalo en $(2^h)^{n/2} - 1$ "cajas":
hay alguna caja con dos sumas



$$\log |S - S'| < \frac{n-1}{2} \left(h + \log_2 \left(\frac{n}{2} \right) \right)$$

lineal!

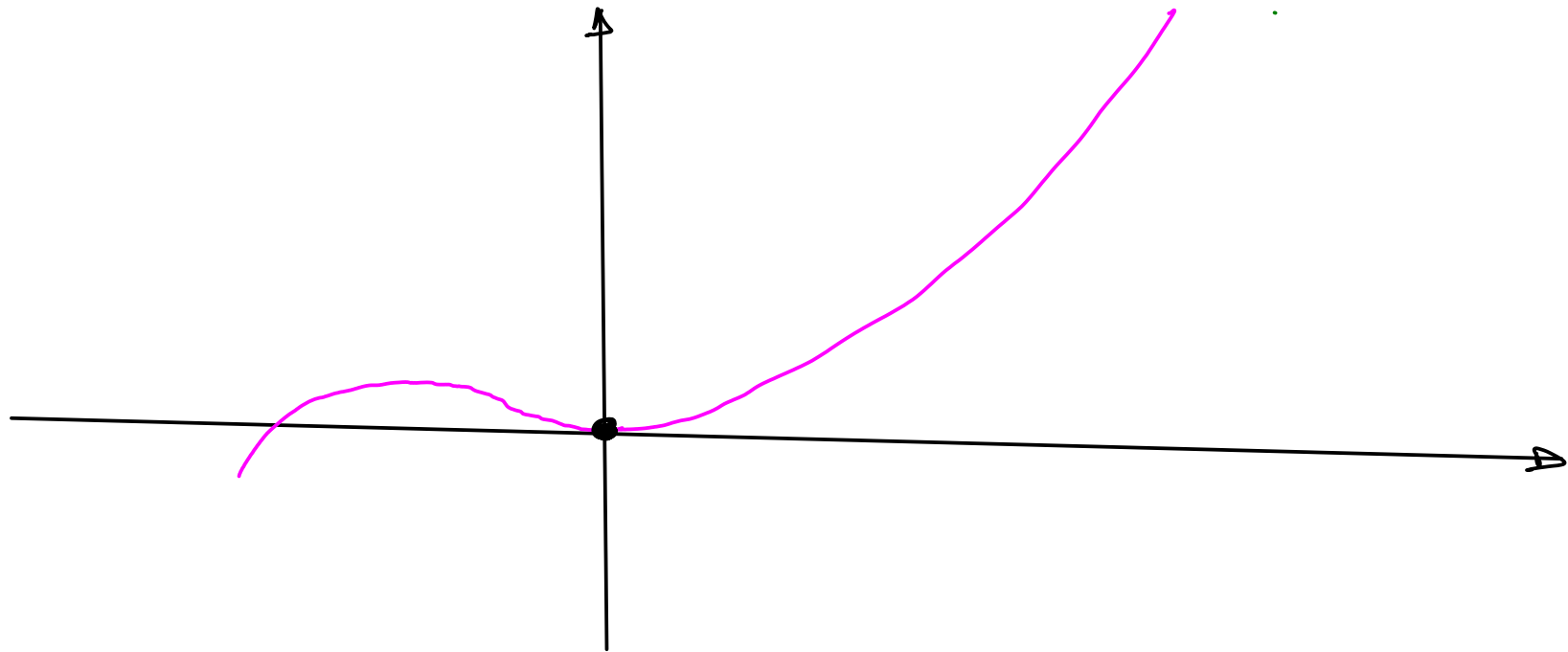
IDEA #3: cambio de problema!

Sumas de raíces cuadradas de polinomios

Teorema: $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ números distintos,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n/2} \sqrt{1 + \alpha_i x} - \sum_{i=n/2+1}^n \sqrt{1 + \alpha_i x}$$

El orden de multiplicación en 0 de f es $\leq n$



¿CÓMO SE INVESTIGA EN MATEMÁTICA?

"Había más imaginación en la cabeza de Arquímedes que en la de Homero"

Voltaire

1RA ETAPA

- Leer
- Estudiar
- Discutir
- Experimentar
- Pensar

2DA ETAPA

- Perseguir ideas
- Discutir
- Escribir
- Publicar
- Comunicar

pero no necesariamente en este orden!

¿Para qué sirve la investigación básica?



LA CARRERA

Estudios

- Grado de matemática (4 años)
- Master (1 año)
- Doctorado (4-5 años)

En Catalunya

- Universidad de Barcelona (UB)
- Universidad Autónoma de Barcelona (UAB)
- Universidad Politécnica de Catalunya (UPC)

Vida laboral

- Becario doctoral (e.g. MEC)
- Becario postdoctoral → al extranjero?

- Ayudante
 - Lector
 - Profesor
- } Universidades

- Investigador :

Consejo Superior de Investigaciones Científicas (CSIC)

Institució Catalana de Recerca (ICREA)