

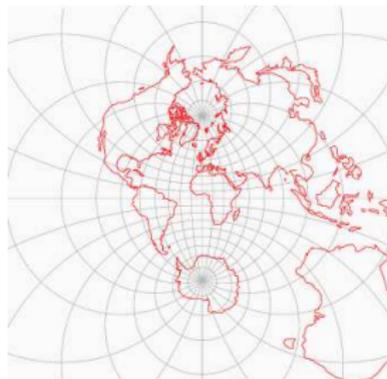
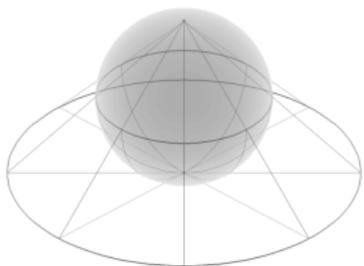
# Variedades algebraicas y polítopos de Newton

Carlos D'Andrea & Martín Sombra (UB)

SCM, 6 de junio de 2008

- 1 Parametrizaciones vs ecuaciones
- 2 Polítopos de Newton
- 3 El polígono de una curva racional
- 4 Geometría tropical y teoría de la intersección
- 5 Dimensión  $\geq 2$

# Parametrizaciones vs ecuaciones



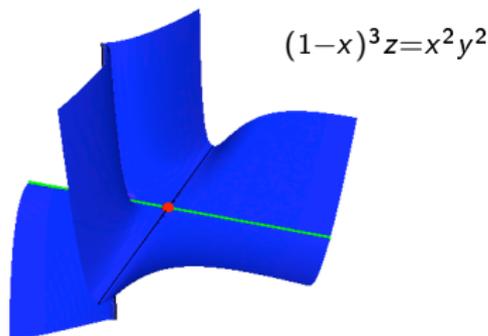
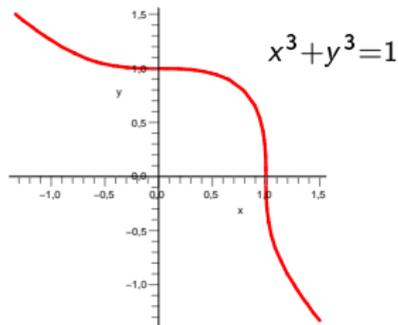
# Variedades algebraicas: definición & ejemplos

Un *conjunto algebraico* de  $\mathbb{C}^n$  es el conjunto de ceros

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n : f_1(\mathbf{x}) = \dots = f_s(\mathbf{x}) = 0\}$$

de polinomios  $f_i(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$

Una *Variedad algebraica (afín)* es un conjunto algebraico irreducible



# Parametrizaciones

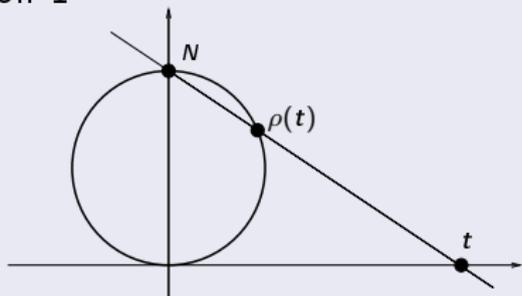
$\rho_1, \dots, \rho_n \in \mathbb{C}(t_1, \dots, t_m)$  definen un *mapa racional*

$$\rho : \mathbb{C}^m \dashrightarrow \mathbb{C}^n, \quad \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_m) \mapsto (\rho_1(\mathbf{t}), \dots, \rho_n(\mathbf{t})),$$

$\exists!$   $V$  que contiene a la imagen y tq  $\text{Im}(\rho)$  contiene un abierto denso de  $V$  ( $V$  es la *clausura de Zariski* de  $\text{Im}(\rho)$ )

## Ejemplo

$\mathbb{C} \dashrightarrow \mathbb{C}^2, t \mapsto \left( \frac{4t}{t^2+4}, \frac{2t^2}{t^2+4} \right)$  es la inversa de la proyección estereográfica de dimensión 1



# Variedades racionales

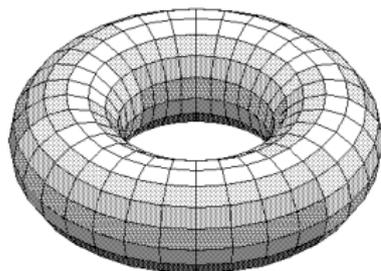
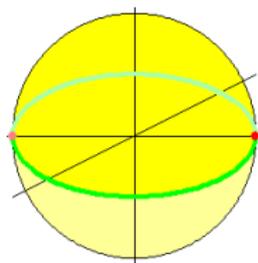
$V^{(r)} \subset \mathbb{C}^n$  es *uniracional* si  $\exists \rho : \mathbb{C}^r \dashrightarrow V$  mapa racional tq  $\text{Im}(\rho)$  contiene un abierto denso de  $V$

$V$  es *racional* si  $\rho$  es inversible sobre un abierto denso

Racional = uniracional en dimensión 1 (teorema de Lüroth, s.XIX) y en dimensión 2 (teorema de Castelnuovo)

$$\mathbb{C} \simeq S^2 \setminus \{q\}$$

$$F : (x^3 + y^3 = 1) \simeq T \setminus \{p_1, p_2, p_3\}$$



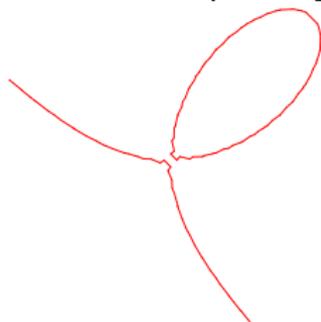
$F$  no es racional



## Ecuación & parametrización del folio de Descartes

$$C : x^3 + y^3 - 3xy = 0 \quad \rho : t \mapsto \left( \frac{3t^2}{t^3+1}, \frac{3t}{t^3+1} \right)$$

- El dibujo según el comando Maple `implicitplot`:



- $(-2, 1) \notin C$  evaluando:  $(-2)^3 + 1^3 - 3(-2) = -1 \neq 0$   
Para averiguarlo a partir de la parametrización hay que resolver el sistema de ecuaciones

$$\frac{3t}{1+t^3} = -2 \quad , \quad \frac{3t^2}{1+t^3} = 1$$

## El pb de la implicación

calcular ecuaciones de una variedad  $V$  a partir de  $\rho : \mathbb{C}^m \dashrightarrow \mathbb{C}^n$  tal que  $V = \overline{\text{Im}(\rho)}$

Caso típico:  $\text{codim}(V) = 1$ . En este caso  $V = V(E)$  para algún polinomio irreducible  $E \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  (ecuación “implícita” de  $V$ )

### Algoritmos de implicación

- bases de Gröbner
- resultantes
- moving planes
- interpolación numérica

# Polítopos de Newton

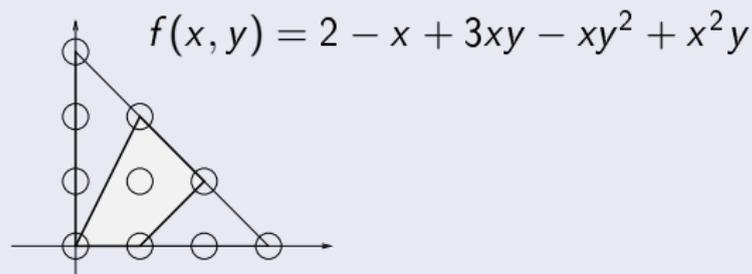
# Polígono de Newton

Álgebra de polinomios de Laurent  $\mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ : son las funciones regulares de  $(\mathbb{C}^\times)^n$

El *polígono de Newton* de  $f = \sum_{j=0}^N \alpha_j \mathbf{x}^{a_j} \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  es

$$\mathcal{N}(f) := \text{Conv}(a_0, \dots, a_N) \subset \mathbb{R}^n$$

## Ejemplo



Es un invariante más fino que el grado:  $f$  es un polinomio de grado  $\leq d$  sii  $\mathcal{N}(f) \subset dS$  donde  $S = \text{Conv}(\mathbf{0}, e_1, \dots, e_n)$

## Pb: implicación “tropical”

determinar el *polígono de Newton* de una hipersuperficie  $V \subset \mathbb{C}^n$  dada por una parametrización  $\rho : \mathbb{C}^{n-1} \dashrightarrow \mathbb{C}^n$ , i.e. calcular

$$\mathcal{N}(V) := \mathcal{N}(E_V) \subset \mathbb{R}^n$$

donde  $E_V \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  ecuación de definición de  $V$

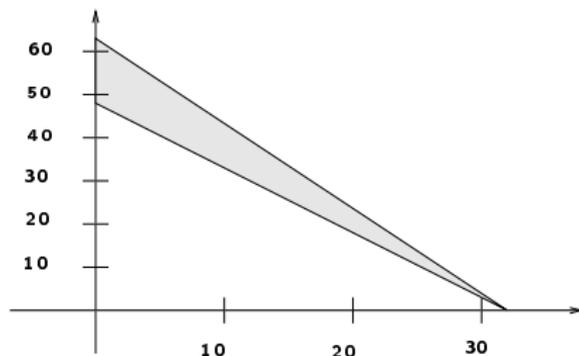
Relacionado con

- Geometría convexa
- Combinatoria
- Teoría de la intersección
- Geometría tropical

## Ejemplo [Dickenstein–Fröberg (1995)]

$$\rho : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2 \quad , \quad t \mapsto (\rho_1(t), \rho_2(t)) = (t^{48} - t^{56} - t^{60} - t^{62} - t^{63}, t^{32})$$

$$\mathcal{N}(\rho_1) = [48, 63] \quad \mathcal{N}(\rho_2) = \{32\}$$



El polígono de Newton de la ecuación implícita  $E_C$  es el triángulo con vértices  $(32, 0)$ ,  $(0, 48)$ ,  $(0, 63)$ .  $E_C$  tiene 257 coefs

# El polígono de una curva racional

Sea  $C$  curva dada por  $\rho : \mathbb{C}^\times \dashrightarrow (\mathbb{C}^\times)^2$ ,  $t \mapsto (\rho_1(t), \rho_2(t))$

- El *grado* o *índice de trazado*  $\text{ind}(\rho) \in \mathbb{N}$  es el cardinal de una fibra genérica
- Cada  $\rho_i \in \mathbb{C}(t)$  es una función racional sobre  $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$   
La *multiplicidad* de  $\rho$  en  $v \in \mathbb{P}^1$  es

$$\text{ord}_v(\rho) := (\text{ord}_v(\rho_1), \text{ord}_v(\rho_2)) \in \mathbb{Z}^2$$

$\text{ord}_v(\rho) = (0, 0)$  para casi todo  $v$ ;  $\sum_{v \in \mathbb{P}^1} \text{ord}_v(\rho) = (0, 0)$

**Teorema 1** [Dickenstein-Fleitchner-Sturmfels (2007)], [Sturmfels-Tevelev (2007)],  
[D'Andrea-S. (2007)]

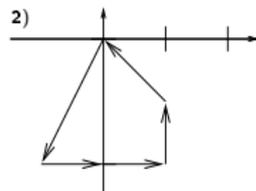
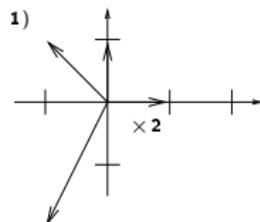
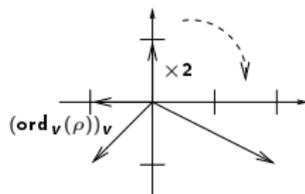
$\text{ind}(\rho)\mathcal{N}(C)$  se construye rotando  $-90^\circ$  los vectores no-nulos en  $(\text{ord}_v(\rho) : v \in \mathbb{P}^1)$  y concatenándolos siguiendo sus direcciones en sentido antihorario

## Ejemplo

$$\rho : t \mapsto \left( \frac{1}{t(t-1)}, \frac{t^2-5t+2}{t} \right)$$

Multiplicidades:  $\text{ord}_0(\rho) = (-1, -1)$ ,  $\text{ord}_1(\rho) = (-1, 0)$ ,  
 $\text{ord}_\infty(\rho) = (2, -1)$  y  $\text{ord}_{v_i}(\rho) = (0, 1)$  para los ceros  $v_1, v_2$  de  
 $t^2 - 5t + 2$

El polígono de  $C$  es

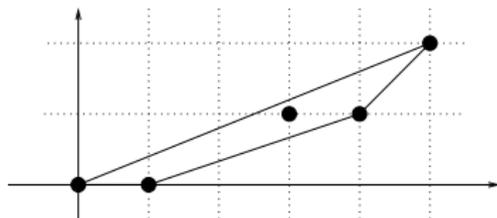
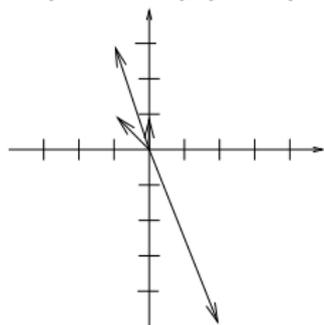


La ecuación es  $E(x, y) = 1 - 16x - 4x^2 - 9xy - 2x^2y - xy^2$

## Otro ejemplo

$$\rho : t \mapsto \left( \frac{(t+1)^2}{2t(t-1)}, \frac{4t(t-1)^3}{(t+1)^5} \right)$$

Se tiene  $\text{ord}_{-1}(\rho) = (2, -5)$ ,  $\text{ord}_0(\rho) = (-1, 1)$ ,  $\text{ord}_1(\rho) = (-1, 3)$ ,  $\text{ord}_\infty(\rho) = (0, 1)$  y  $\text{ord}_v(\rho) = (0, 0)$  para  $v \neq 0, \pm 1, \infty$



$\text{ind}(\rho)\mathcal{N}(C)$  es no-contráctil  $\Rightarrow \text{ind}(\rho) = 1$

La ecuación implícita es combinación lineal de los monomios

$$1, \quad x, \quad x^3y, \quad x^4y, \quad x^5y^2$$

$$\Rightarrow E_C(x, y) = 1 - 2x + 2x^4y - x^5y^2 + 5x^3y$$

## Para qué sirve el polígono de Newton? (I)

Sea  $C$  curva plana dada por  $\rho : \mathbb{C}^x \dashrightarrow (\mathbb{C}^x)^2$ . La ecuación de  $C$  es

$$E_C(x, y) = \sum_{j=0}^N \lambda_j x^{a_j} y^{b_j}$$

donde  $(a_j, b_j)$  son los puntos enteros en  $\mathcal{N}(C)$  y  $\lambda_j \in \mathbb{C}$

Evaluando  $\rho$  en  $N + 1$  puntos genéricos  $\tau_0, \dots, \tau_N \in \mathbb{C}$

$$E_C(\rho(\tau_k)) = \sum_{j=0}^N \lambda_j \rho_1(\tau_k)^{a_j} \rho_2(\tau_k)^{b_j} = 0 \quad (0 \leq k \leq N)$$

sistema lineal homogéneo  $(N + 1) \times (N + 1)$ :

$E_C$  es una solución (cualquiera) de este sistema



# Volumen mixto

El *volumen mixto* de dos convexos  $P, Q \subset \mathbb{R}^2$  es

$$MV_2(P, Q) := \text{Area}(P + Q) - \text{Area}(P) - \text{Area}(Q)$$

+ es la “suma de Minkowski”. En particular:  $MV(P, P) = 2 \text{Area}(P)$

Para  $n \geq 2$  cualquiera:

## Definición-propiedades

$Q_1, \dots, Q_n$  cuerpos convexos de  $\mathbb{R}^n$ , el *volumen mixto*

$$MV(Q_1, \dots, Q_n) \in \mathbb{R}$$

único funcional simétrico en  $Q_1, \dots, Q_n$ , multilineal cr a la suma de Minkowski y tq  $MV(Q, \dots, Q) = n! \text{Vol}(Q)$

## Teorema 2 [Bernšteín-Kušnirenko-Khovanskii 1975]

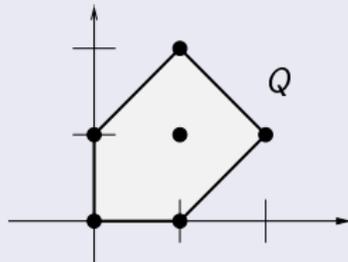
Sean  $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ , entonces

$$\#V_0((\mathbb{C}^\times)^n; f_1, \dots, f_n) \leq MV(\mathcal{N}(f_1), \dots, \mathcal{N}(f_n))$$

### Ejemplo

$$f = (s-1) + (s-1)^2 x - 3s x^2, \quad g = -7(s-1) + (s-1)^2 x + 3s x^2$$

$f = g = 0$  tiene dos soluciones:  $(4, 1)$  (simple) &  $(-\frac{1}{2}, -2)$  (doble)  
 $\implies \#V(f, g) = 3$



BKK predice  $\#V \leq 2!$  Vol(Q) = 5

## Para qué sirve el polígono de Newton? (II)

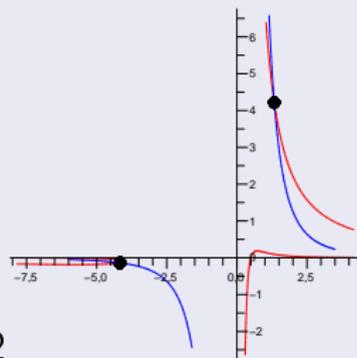
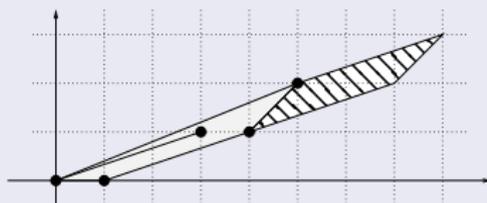
Permite estimar cuántos puntos en común tienen dos curvas racionales

### Ejemplo

Sean  $C, D \subset (\mathbb{C}^\times)^2$  parametrizadas por

$$t \mapsto \left( \frac{(t+1)^2}{2t(t-1)}, \frac{4t(t-1)^3}{(t+1)^5} \right), \quad t \mapsto \left( t, \frac{10}{t^3} \right)$$

Polígonos, sumas de Minkowski & curvas



$$MV(\mathcal{N}(C), \mathcal{N}(D)) = 2 \Rightarrow \text{Card}(C \cap D) \leq 2$$

# Parametrizaciones genéricas

Pb [Sturmfels-Yu (1994)]

Sean  $P_1, \dots, P_n \subset \mathbb{R}^{n-1}$  polítopos enteros y sean

$$\rho_i = \sum_{a \in P_i \cap \mathbb{Z}^{n-1}} \lambda_{i,a} t_1^{a_1} \cdots t_n^{a_n} \in \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_{n-1}^{\pm 1}]$$

para  $1 \leq i \leq n$  y  $\lambda_{i,a} \in \mathbb{C}$  genéricos. Determinar el polítopo de Newton de la imagen de  $\mathbf{t} \mapsto (\rho_1(\mathbf{t}), \dots, \rho_n(\mathbf{t}))$

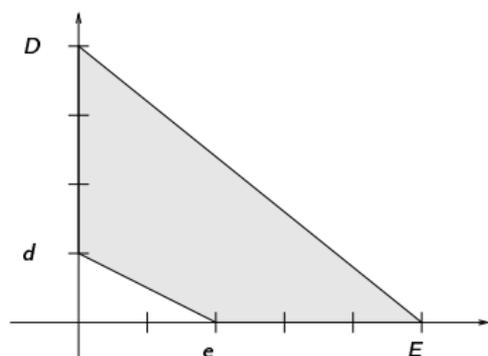
Dados  $D \geq d$ ,  $E \geq e$  sean

$$p(t) = \alpha_d t^d + \cdots + \alpha_D t^D \quad , \quad q(t) = \beta_e t^e + \cdots + \beta_E t^E \quad \in \mathbb{C}[t^{\pm 1}]$$

ta  $\alpha_d, \alpha_D, \beta_e, \beta_E \neq 0$  y  $\gcd(t^{-d}p(t), t^{-e}q(t)) = 1$ . entonces

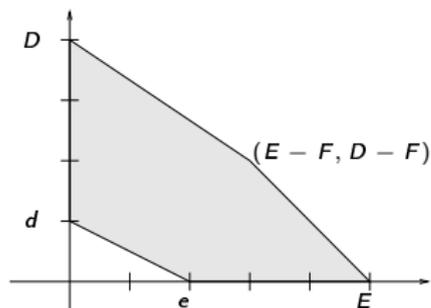
$$\mathcal{N}(C) = \frac{1}{\text{ind}(p, q)} \mathcal{P}((D-d, 0), (0, E-e), (-D, -E), (d, e))$$

El polígono es un cuadrilátero:

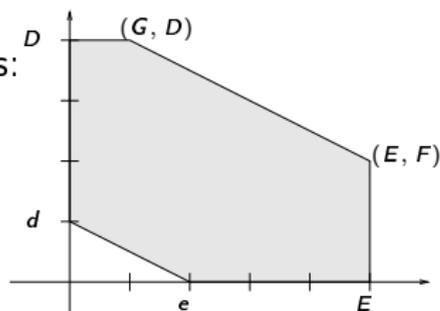


## Otras parametrizaciones “genéricas”

- $\rho = \left(\frac{p}{r}, \frac{q}{r}\right)$  con  $p, q, r$  genéricas:



- $\rho = \left(\frac{p}{r}, \frac{q}{s}\right)$  con  $p, q, r, s$  genéricas:



# El espacio de las variedades con con polítopo prefijado

## Teorema 3 [Khovanskii 1978]

Sea  $Q \subset \mathbb{R}^n$  polítopo entero y  $F \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$   $F$  genérico tq  $\mathcal{N}(F) = Q$ , entonces

$$g(V(F)) = \#(Q^\circ \cap \mathbb{Z}^2)$$

En el otro extremo: variedades racionales con polítopo  $Q$

- $Q \subset \mathbb{R}^2$  polígono entero
- $M_Q^\circ := \{F \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}] : V(F) \subset (\mathbb{C}^\times)^2 \text{ curva racional}$   
 $\text{y } \mathcal{N}(F) = Q\} \subset \mathbb{C}^{\#(Q \cap \mathbb{Z}^2)}$
- $M_Q := \overline{M_Q^\circ}$  clausura de Zariski

## Teorema 4

$M_Q$  es una variedad racional de dimensión  $\#(\partial Q \cap \mathbb{Z}^2) (\geq 3)$



# Geometría tropical y teoría de la intersección

# Geometría tropical de curvas planas

El semianillo de base es  $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$  con las ops

$$x \oplus y = \min(x, y) \quad , \quad x \odot y = x + y$$

La *tropicalización* de  $F = \sum_{j=0}^N \lambda_j x^{a_j} y^{b_j} \in \mathbb{C}[x, y]$  es

$$t_F(x, y) := \bigoplus_{j=0}^N x^{\odot a_j} y^{\odot b_j} = \min_j \langle (a_j, b_j), (x, y) \rangle$$

donde  $\bigoplus$  es la sumatoria tropical y  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  el producto escalar de  $\mathbb{R}^2$

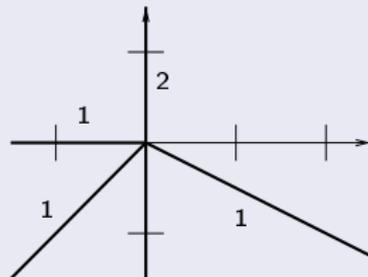
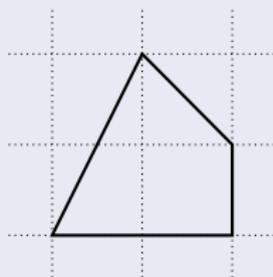
$t_F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  función convexa y afín a trozos

La *variedad tropical*  $\mathcal{T}_F \subset \mathbb{R}^2$  es el lugar donde  $t_F$  no es diferenciable

= reunión de las direcciones normales interiores a los lados de  $\mathcal{N}(F)$

Ejemplo: la variedad tropical asociada a una curva

$$\rho: t \mapsto \left( \frac{1}{t(t-1)}, \frac{t^2 - 5t + 2}{t} \right)$$



Sea  $\mathbb{K}$  cuerpo de series de Puiseux formales sobre  $\mathbb{C}$ :

$$\mathbb{K} := \left\{ \sum_{m \geq 0} \beta_m \varepsilon^{m/q} : q \geq 1, \beta_m \in \mathbb{C} \right\}$$

Consideramos la aplicación

$$\text{ord} : (\mathbb{K}^\times)^2 \rightarrow \mathbb{Q} \quad , \quad (\gamma(t), \delta(t)) \mapsto (\text{ord}(\gamma(t)), \text{ord}(\delta(t)))$$

### Teorema 5 [Eisendler-Kapranov-Lind 2005]

Sea  $F \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$  y sea  $V_{\mathbb{K}}(F) \subset (\mathbb{K}^\times)^2$  ceros de  $F$  sobre  $\mathbb{K}$ , entonces

$$\mathcal{T}_F = \overline{\text{ord}(V_{\mathbb{K}}(F))}$$

$\mathcal{T}_F$  es una ameba no-arquimediana  $\therefore$  el  $\mathcal{N}(F)$  se interpreta como una degeneración de la curva  $V(F)$

## Conexión con la teoría de intersección

La *función soporte* de  $Q \subset \mathbb{R}^2$  es

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \tau \mapsto h_Q(\tau) = \max\{\langle \tau, (x, y) \rangle : (x, y) \in Q\}$$

### Proposición

Dado  $\tau = (\tau_1, \tau_2) \in \mathbb{N}^2$ ,  $\deg(\rho)h_Q(\tau)$  es igual al número de soluciones  $(t, x, y) \in \mathbb{C}^3$  del sistema

$$x^{\tau_1} - \rho_1(t) = y^{\tau_2} - \rho_2(t) = \ell_0 + \ell_1 x + \ell_2 = 0$$

para  $\ell_i \in \mathbb{C}$  genérico

Este número de soluciones se calcula *exactamente* con un refinamiento del teorema BKK. El teorema 2 se demuestra alternativamente probando que  $\deg(\rho)\mathcal{N}(C)$  y la concatenación de las  $\text{ord}_V(\rho)_V$ 's tienen la misma función soporte

# Dimensión $\geq 2$

*Las curvas algebraicas fueron creadas por Dios y las superficies algebraicas, por el Diablo* — Max Noether (1884-1921)

- Curvas algebraicas: sea  $\rho(t) = (x(t), y(t))$  con

$$f(t, x(t)) = g(t, y(t)) = 0$$

dados. El polígono de la imagen de  $\rho$  se expresa en términos de los polítopos  $v$ -ádicos

$$\mathcal{N}_v(f), \mathcal{N}_v(g) \subset \mathbb{R}^2 \quad (v \in \mathbb{P}^1)$$

- Parametrizaciones por productos de formas lineales [Dickenstein-Feitchner-Sturmfels 2007]
- Implicación tropical en el caso genérico & polígono fibra mixto [Esterov-Khovanskiĭ 2007], [Sturmfels-Tevelev-Yu 2007]

Fin