Algoritmos en álgebra lineal (2do cuatrimestre de 2005)

Examen, 1ra fecha: 15 Dic/2005

Todas las respuestas tienen que estar debidamente justificadas. Se permite utilizar las notas del curso.

Ejercicio 1. ◁ El objetivo de este ejercicio es demostrar que la TFR es numéricamente estable. Sea $N = 2^k$, vamos a usar que la matriz $F_N \in \mathbb{C}^{N\times N}$ de la TFD de orden N se factoriza como

$$F_N = P \cdot \begin{bmatrix} F_{N/2} & \\ & F_{N/2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{N/2} & \\ & D_{N/2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{N/2} & \mathbf{1}_{N/2} \\ \mathbf{1}_{N/2} & -\mathbf{1}_{N/2} \end{bmatrix}$$

donde P es una matriz de permutaciones y $D_{N/2} = \mathrm{diag}(1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{N/2-1}) \in \mathbb{C}^{N/2\times N/2}$ con $\omega = e^{-2i\pi/N}$.

Sea $\mathcal{F}$ un sistema de flotantes con base 2 y precisión t. Para un input

$$u \in (\mathcal{F} + i\mathcal{F})^N,$$

notamos $TFR_{\mathcal{F}}(u)$ el resultado calculado de la TFR usando la aritmética de $\mathcal{F}$.

1. Mostrar que las matrices en la factorización de F_N son unitarias, salvo por un factor escalar; calcular su condicionamiento.
2. Sea $A \odot v$ el resultado calculado de una multiplicación matriz-vector $A \cdot v$ en la aritmética de A. Mostrar que si $A \cdot v$ consiste en *una sola* operación por línea, entonces
$$A \odot v = A \cdot (v + e)$$
con $|e|_2 \le 2^{-t}\kappa_2(A)|v|_2$.
3. Análisis *a posteriori*: sea $e_N \in \mathbb{C}^N$ tal que
$$TFR_{\mathcal{F}}(u) = F_N \cdot (u + e_N).$$
Mostrar que $e_1 = 0$, y que para $N = 2^k$ con $k \ge 1$ se tiene
$$|e_N|_2 + |u|_2 \le (1 + 2^{-t})^2 (|e_{N/2}|_2 + |u|_2).$$
Concluir que
$$|e_N|_2 \le ((1 + 2^{-t})^{2k} - 1)|u|_2.$$
4. Probar la desigualdad
$$(1 + 2^{-t})^{\ell} \le 1 + \ell 2^{1-t} \qquad \text{para } 0 \le \ell \le 2^{t-1}.$$
(*Indicación:* usar el desarrollo de Taylor $f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(\xi)x^2/2$ para $x > 0$ y algún $0 < \xi < x$, aplicado a $f(x) = (1 + x)^{\ell}$.) Deducir que
$$|e_N|_2 \le k 2^{2-t}|u|_2 \qquad \text{para } N \le 2^{2^{t-2}}.$$

5. Análisis *a priori*: mostrar que

$$\frac{|TFR_{\mathcal{F}}(u) - F_N \cdot u|_2}{|u|_2} \leq N \log_2(N) 2^{2-t}, \qquad \text{para } N \leq 2^{2^{t-2}};$$

en particular la pérdida de precisión es de $\log_2(N) + \log_2(\log_2(N)) + O(1)$ bits.

$\triangleright$

Ejercicio 2. $\triangleleft$ Para

$$d_0, \ldots, d_\ell; n \in \mathbb{N} \quad , \quad d := d_0 + \cdots + d_\ell \quad , \quad x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}^\times$$

sea

$$A := \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{d_0-1} & y_1 & y_1 x_1 & \cdots & y_1 x_1^{d_1-1} & \cdots & y_1^\ell & y_1^\ell x_1 & \cdots & y_1^\ell x_1^{d_\ell-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{d_0-1} & y_n & y_n x_n & \cdots & y_n x_n^{d_1-1} & \cdots & y_n^\ell & y_n^\ell x_n & \cdots & y_n^\ell x_n^{d_\ell-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times d}.$$

Encuentre desplazamientos $S \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $T \in \mathbb{K}^{d \times d}$ sin autovalores en común, tales que

$$\nabla_{S,T}(A) = S \cdot A - A \cdot T$$

sea de rango a lo sumo $\ell + 1$, y determine generadores para $\nabla_{S,T}(A)$. $\triangleright$

Ejercicio 3. $\triangleleft$

1. Sean $A, L \in \mathbb{R}^{N\times N}$ dos matrices simétricas definidas positivas, y sea

$$\langle x, y\rangle_L := x^T L y \quad , \quad |x|_L := (x^T L x)^{1/2}.$$

   Mostrar que $L^{-1}A$ es autoadjunta con respecto al producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$.

2. Calcular $\|B\|_L$ para $B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ en términos de la norma de operadores $\| \ \|_2$ aplicada a combinaciones convenientes de B y de potencias adecuadas de L (se recuerda que toda matriz positiva M admite para cada $s \in \mathbb{R}$ una única potencia M^s). Calcular en términos de $\| \ \|_2$

$$\kappa_L(L^{-1}A) = \|L^{-1}A\|_L \cdot \|A^{-1}L\|_L.$$

3. Recordamos el algoritmo de gradiente conjugado:

$$\begin{aligned}
&x_0 \text{ dado}, \\
&r_0 \leftarrow b - Ax_0, \\
&d_0 \leftarrow r_0, \\
&\text{mientras } r_j \neq 0, \\
&\quad \alpha_j \leftarrow \frac{\langle r_j, r_j\rangle}{\langle d_j, Ad_j\rangle}, \\
&\quad x_{j+1} \leftarrow x_j + \alpha_j d_j, \\
&\quad r_{j+1} \leftarrow r_j - \alpha_j A d_j, \\
&\quad \beta_{j+1} \leftarrow \frac{\langle r_{j+1}, r_{j+1}\rangle}{\langle r_j, r_j\rangle}, \\
&\quad d_{j+1} \leftarrow r_{j+1} + \beta_{j+1} d_j.
\end{aligned} \tag{1}$$

Aplicar este algoritmo a la ecuación

$$L^{-1}Ax = L^{-1}b,$$

reemplazando los productos escalares canónicos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$; escribirlo en términos del verdadero residuo

$$r_j = b - Ax_j.$$

Mostrar que este algoritmo coincide con el gradiente conjugado precondicionado, equivalente (módulo cambios de variables convenientes) a aplicar el gradiente conjugado ordinario al operador $L^{-1/2}AL^{-1/2}$.

4. Mostrar que el gradiente conjugado precondicionado necesita sólo dos multiplicaciones matriz-vector por ciclo, una por A y otra por L^{-1}.

   Suponiendo que la multiplicación matriz-vector por A (resp. L^{-1}) se hace en kN ops (resp. $k'N$ ops), evaluar el número de operaciones por ciclo.

5. Recordamos el resultado de convergencia del gradiente conjugado:

$$\|e_i\|_A \leq \left[\left(\frac{\sqrt{\kappa_2(A)}+1}{\sqrt{\kappa_2(A)-1}} \right)^i + \left(\frac{\sqrt{\kappa_2(A)}-1}{\sqrt{\kappa_2(A)+1}} \right)^i \right]^{-1} \|e_0\|_A.$$

   Enunciar la convergencia del gradiente conjugado precondicionado en términos de $\|e_i\|_A$ y de $\kappa_2(L^{-1/2}AL^{-1/2})$.

6. Cuántas operaciones hacen falta para dividir el error por 10^{10} bajo las hipótesis de los ítems anteriores?

▷