

ALGORITMOS EN ÁLGEBRA LINEAL
Notas de curso (UBA - 2do cuatrimestre de 2005)

<http://atlas.mat.ub.es/personals/sombra/curso.html>

Michelle Schatzman

Martín Sombra

INSTITUT CAMILLE JORDAN (MATHÉMATIQUES), UNIVERSITÉ DE LYON 1 ; 43 BD.
DU 11 NOVEMBRE 1918, 69622 VILLEURBANNE CEDEX, FRANCIA

UNIVERSITAT DE BARCELONA, DEPARTAMENT D'ÀLGEBRA I GEOMETRIA ; GRAN
VIA 585, 08007 BARCELONA, ESPAÑA

Méthodes multigrille

La méthode multigrille se propose de corriger les défauts des méthodes itératives classiques pour des systèmes provenant de la discrétisation d'équations aux dérivées partielles. C'est une méthode itérative récursive, la récurrence étant effectuée sur l'échelle de discrétisation spatiale.

Elle s'applique à la discrétisation d'équations aux dérivées partielles elliptiques, et plus généralement à des problèmes de réseau, des problèmes structurels et beaucoup d'autres. Ici nous nous restreindrons au problème modèle le plus simple, l'équation de Poisson en dimension 1 avec des conditions de Dirichlet nulles :

$$-u_{xx} = f \quad \text{pour } x \in \Omega = [0, 1] \text{ et } u(0) = u(1) = 0.$$

On discrétise cette équation avec des différences finies. Pour $N \in \mathbb{N}$ on considère la grille

$$\Omega_h := \{jh : j = 1, \dots, N-1\}$$

des nodes à l'intérieur de l'intervalle $[0, 1]$ divisé en N sous-intervalles, et on pose $\mathcal{G}(\Omega_h); \Omega_h \rightarrow \mathbb{R}$ pour l'ensemble des fonctions réelles de cet ensemble. L'opérateur discret qui en résulte est

$$L_h : \mathcal{G}(\Omega_h) \rightarrow \mathcal{G}(\Omega_h) \quad , \quad L_h(u)(x) = h^{-2} \left(u(x-h) - 2u(x) + u(x+h) \right)$$

avec la convention $u(0) = u(1) = 0$. Ceci est une approximation d'ordre 2 de l'opérateur laplacien

$$-u_{xx} - L_h(u) = O(h^2)$$

pour $h \rightarrow 0$ et des fonctions u suffisamment régulières (par exemple $u \in \mathcal{C}^4(\Omega)$). Alternativement on peut l'écrire en notation stencil comme

$$L_h = h^{-2} [-1 \quad 2 \quad -1]_h.$$

L'équation approchée $L_h u_h = f_h$ se traduit dans le système linéaire d'ordre $(N-1) \times (N-1)$

$$h^{-2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(h) \\ u(2h) \\ \vdots \\ u((N-2)h) \\ u((N-1)h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(h) \\ f(2h) \\ \vdots \\ f((N-2)h) \\ f((N-1)h) \end{bmatrix}.$$

Alternativement on écrira L_N, u_N, f_N pour L_h, u_h, f, h respectivement.

L'idée principale de la méthode multigrille est que certaines itérations classiques, telles les itérations de Jacobi amorties agissent comme des filtres passe-bas : elles amortissent beaucoup les hautes fréquences, alors que les basses fréquences changent peu en une itération ; donc, si nous voulons réduire efficacement le résidu, après l'avoir débarrassé de ses hautes fréquences, nous ferons une correction sur une grille plus grossière, ayant un pas d'espace deux fois plus grand.

Dans la méthode bigrille, nous supposons N pair ; nous effectuons une itération de Jacobi amortie avec un paramètre convenablement choisi sur la grille fine $h = 1/N$; nous relevons le résidu sur la grille grossière de pas $H = 2h = 2/N$,

nous résolvons l'équation sur la grille grossière, nous interpolons cette solution sur la grille fine pour obtenir une correction.

Le plus beau de la méthode bigrille est que le rayon spectral de la matrice des itérations ne dépend pas du pas d'espace. Cependant, ce n'est pas encore un schéma pratique puisque la résolution sur grille grossière reste coûteuse. La solution est d'approcher la solution sur la grille grossière, et la méthode de choix est encore la bigrille, appliquée sur la grille de pas H et $2H$.

Si nous supposons que N est une puissance de 2, le principe de la méthode multigrille est très simple : au lieu de résoudre sur la grille grossière, nous faisons un ou plusieurs balayages de Jacobi, et nous corrigeons sur une grille encore plus grossière sur laquelle nous exécutons un balayage, et ainsi de suite, jusqu'à atteindre une grille très simple, par exemple une grille à un point sur laquelle la résolution est triviale ; nous interpolons alors successivement les corrections sur toutes les grilles plus fines, tout en faisant éventuellement des balayages supplémentaires à chaque passage.

Diverses combinaisons sont possibles et les méthodes multigrille sont encore un sujet actif de recherche : ce sont des objets fascinants, dont les idées sont proche de celles de la transformation de Fourier rapide et des algorithmes d'ondelettes.

Plusieurs livres traitent la méthode multigrille ; une liste non exhaustive est [3, 5, 4, 1, 2].

Dans cette section nous introduirons les idées de base de cette méthode en utilisant le le problème modèle comme guide. Nous traiterons d'abord la description de la méthode bigrille et on démontrera son taux de convergence indépendant du pas de l'espace. Ensuite on décrira les méthodes multigrille et multigrille complète, dont on démontrera la propriété remarquable de calculer une approximation du même ordre que l'erreur de discrétisation en temps quasi-optimal $O(N \log(N))$.

1. Spectre d'une matrice de différences finies

On pose

$$L_N = h^{-2}(2\mathbf{1}_{N-1} - B_N) = N^2(2\mathbf{1}_{N-1} - B_N)$$

avec

$$B_N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}.$$

La détermination des vecteurs et valeurs propres de B_N équivaut à résoudre le système

$$\begin{aligned} v_2 &= \lambda v_1 \\ v_1 + v_3 &= \lambda v_2 \\ v_2 + v_4 &= \lambda v_3 \\ &\vdots \\ v_{N-3} + v_{N-4} &= \lambda v_{N-2} \\ v_{N-2} &= \lambda v_{N-1} \end{aligned}$$

pour $v = (v_1, \dots, v_{N-1}) \in \mathbb{C}^{N-1} \setminus \{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Ceci qui correspond à résoudre la récurrence linéaire

$$v_{j+1} - \lambda v_j + v_{j-1} = 0.$$

L'équation caractéristique est

$$z^2 - \lambda z + 1 = 0$$

et notons z_1, z_2 les racines de cette équation. Le discriminant est $\lambda^2 - 4$, donc si $\lambda = \pm 2$ alors $z_1 = z_2 = 1$ et donc

$$v_j = a + bj$$

pour des certains $a, b \in \mathbb{C}$. Or $v_0 = a = 0$ et $v_N = a + bN = 0$ entraînent $a = b = 0$ et par conséquent $v = 0$. Supposons alors $\lambda \neq \pm 2$, alors $z_1 \neq z_2$ et donc

$$v_j = az_1^j + bz_2^j$$

pour des certains $a, b \in \mathbb{C}$. La condition $v_0 = a + b = 0$ entraîne $b = -a$ et puisque on cherche des solutions non triviales, la deuxième condition

$$v_N = az_1^N + bz_2^N = a(z_1^N - z_2^N) = 0$$

entraîne $z_1^{2N} = 1$ (car $z_1 z_2 = 1$). On en déduit que les couples des différentes solutions possibles sont

$$(z_{1,\ell}, z_{2,\ell}) = (e^{\pi i \ell / N}, e^{-\pi i \ell / N}) \quad , \quad \ell = 0, \dots, N-1.$$

Le vecteur propre associé est (modulo la choix du facteur scalaire)

$$(v_\ell)_j = \frac{1}{2i}(z_1^j - z_2^j) = \sin\left(\frac{\pi \ell}{N} j\right), \quad , \quad j = 1, \dots, N-1.$$

pour $\ell = 1, \dots, N-1$, car $\ell = 0$ donne la solution triviale $v_\ell = 0$. On écrit cette vecteur comme une *fonction* propre

$$\varphi_\ell : \mathcal{G}(\Omega_N) \rightarrow \mathcal{G}(\Omega_h) \quad , \quad x \mapsto \sin(\pi \ell x).$$

La valeur propre correspondante est

$$\lambda_\ell(B_N) = z_1 + z_2 = 2 \cos\left(\frac{\pi \ell}{N}\right) \quad , \quad \ell = 1, \dots, N-1,$$

tandis que pour L_N

$$\lambda_\ell(L_N) = N^2(2 - \lambda_\ell(B_N)) = N^2 \left(2 - 2 \cos\left(\frac{\pi \ell}{N}\right)\right) = 4N^2 \sin^2\left(\frac{\pi \ell}{N}\right).$$

2. Itération de Jacobi amortie

Le système à résoudre est $N^2(2\mathbf{1}_{N-1} - B_N)u_N = f_N$. Posons

$$u' := \frac{1}{2}B_N u^m + \frac{1}{2N^2}f_N,$$

l'*itération de Jacobi* consiste à faire $u^{m+1} = u'$. L'*itération de Jacobi amortie* ou ω -*Jacobi* est la moyenne pondérée de l'itération de Jacobi standard avec l'approximation précédente :

$$(1) \quad u^{m+1} = (1 - \omega)u^m + \omega u' = \left((1 - \omega)\mathbf{1}_{N-1} + \frac{\omega}{2}B_N\right)u^m + \frac{\omega}{2N^2}f_N.$$

L'opérateur du ω -Jacobi est $J_{N,\omega} = (1 - \omega)\mathbf{1}_{N-1} + \frac{\omega}{2}B_N$ avec valeurs propres

$$\lambda_\ell(J_{N,\omega}) = 1 - \omega + \frac{\omega}{2}\lambda_\ell(B_N) = 1 - \omega \left(1 - \cos\left(\frac{\pi \ell}{N}\right)\right) = 1 - 2\omega \sin^2\left(\frac{\pi \ell}{2N}\right)$$

pour $\ell = 1, \dots, N-1$. Donc pour $0 < \omega \leq 1$ le rayon spectral est

$$\rho(J_{N,\omega}) = 1 - 2\omega \sin^2\left(\frac{\pi}{2N}\right) = 1 - O(h^2)$$

et de fait est minimal pour $\omega = 1$; par contre pour $\omega > 1$ on a $\rho(J_\omega) > 1$ pour $h \rightarrow 0$ et donc la méthode n'est pas convergente. Par contre le *facteur de lissage* est sensiblement meilleur. Posons

$$\mu(h; \omega) := \max\{\lambda_\ell(J_{N,\omega}) : \frac{N}{2} \leq \ell \leq N-1\},$$

$$\mu(\omega) := \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \mu(h; \omega).$$

On a

$$\mu(h; \omega) = \max\{|1 - \omega|, |1 - 2\omega \sin^2(\frac{\pi(N-1)}{2N})|\}$$

et donc

$$\mu(\omega) = \max\{|1 - \omega|, |1 - 2\omega|\}.$$

Le minimum se réalise en $\omega = 2/3$: $J_{N,2/3}$ est donc un filtre passe-bas qui amorti les hautes fréquences d'un facteur $1/3$.

3. Méthode bigrille

On introduit le schéma générale d'une itération basée sur la résolution approchée de l'équation du résidu. Pour une approximation u^m d'une équation linéaire $Lu = f$, l'*erreur* et le *résidu* sont respectivement

$$e^m = u - u^m, \quad r^m = f - Lu^m.$$

L'erreur est zéro si et seulement si le résidu l'est aussi (si L est inversible) mais par contre le résidu peut être petit sans que l'erreur le soit tellement. La relation entre erreur et résidu est quantifiée par la notion de nombre de conditionnement.

L'équation du résidu

$$Le^m = r^m,$$

est équivalente à l'équation originale puisque $u = u^m + e^m$. Le procédé est résumé par le diagramme

$$u^m \rightarrow r^m = f - Lu^m \rightarrow e^m = L^{-1}r^m \rightarrow u = u^m + e^m.$$

Bien entendu l'erreur est aussi inaccessible que la solution elle-même, et ce procédé n'est nullement un algorithme. Cependant, si l'on substitue L par un opérateur \hat{L} proche de L mais plus simple à inverser, alors

$$\hat{e}^m = \hat{L}r^m$$

fournira une nouvelle approximation

$$u^{m+1} = u^m + \hat{e}^m.$$

Cette modification donne une méthode itérative

$$u^m \rightarrow r^m = f - Lu^m \rightarrow \hat{e}^m = \hat{L}^{-1}r^m \rightarrow u^{m+1} = u^m + \hat{e}^m;$$

de façon plus compacte

$$u^{m+1} = (\mathbf{1} - \hat{L}^{-1}L)u^m + \hat{L}^{-1}f.$$

Une des idées de la méthode bigrille consiste à observer qu'après un ou plusieurs balayages des hautes fréquences *via* un certain opérateur de lissage \mathcal{S}_h , on sait que l'erreur devient assez régulier. La résolution de l'équation du résidu sur une grille plus grossière Ω_H sera alors une bonne approximation de l'erreur. Voici la description sommaire du *cycle bigrille* :

(1) Lissage :

(a) $\hat{u}_h^m \leftarrow \mathcal{S}_h^{(\nu)}(u_h^m, L_h, f_h)$;

(2) Correction *via* la grille grossière :

(a) Calcul du résidu : $d_h^m \leftarrow f_h - h^{-2}L_h\hat{u}_h^m$;

- (b) Restriction à Ω_H : $d_H^m \leftarrow R_h^H d_h^m$;
- (c) Résolution sur Ω_H : $e_H^m \leftarrow L_H^{-1} d_H^m$;
- (d) Interpolation sur Ω_h : $e_h^m \leftarrow P_H^h e_H^m$;
- (e) Correction de l'approximation : $u_h^{m+1} \leftarrow \widehat{u}_h^m + e_h^m$.

On pourra visualiser mieux la structure de ce cycle avec le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 u_h^m \rightarrow \widehat{u}_h^m \rightarrow d_h^m = f_h - h^{-2} L_h \widehat{u}_h^m & & e_h^m & \longrightarrow & u_h^{m+1} = \widehat{u}_h^m + e_h^m \\
 & \downarrow & \uparrow & & \\
 & d_H^m & \longrightarrow & e_H^m = (H^{-2} L_H)^{-1} d_H^m &
 \end{array}$$

dont le premier niveau correspond à la grille fine Ω_h et le deuxième à la grille grossière Ω_H ; les passages se font avec les opérateurs de restriction et d'interpolation. Le cycle bigrille dépend de plusieurs composantes :

- l'opérateur de lissage $\mathcal{S}_h : \mathcal{G}(\Omega_h) \rightarrow \mathcal{G}(\Omega_h)$;
- le nombre ν des pas de lissage ;
- la grille grossière Ω_H ;
- l'opérateur de restriction $R_h^H : \mathcal{G}(\Omega_h) \rightarrow \mathcal{G}(\Omega_H)$;
- l'opérateur L_H sur la grille grossière ;
- l'opérateur d'interpolation $P_H^h : \mathcal{G}(\Omega_H) \rightarrow \mathcal{G}(\Omega_h)$.

Pour notre petite équation de Poisson en dimension 1, le lissage sera fait par le 1/2-Jacobi

$$\mathcal{J}_N(u) = J_N u + \frac{1}{4N^2} f_N$$

dont l'opérateur est $J_N = \mathbf{1}_{N-1}/2 + B_N/4 \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$. Nous supposons dorénavant N pair, et nous posons $h = 1/N$ et $H = 2h = 2/N$.

L'opérateur d'*interpolation bilinéaire* ou de prolongation est

$$P_{N/2}(e)(x) = P_H^h(e)(x) = \begin{cases} e(x) & \text{si } x \in \Omega_H; \\ \frac{1}{2}(e(x-h) + e(x+h)) & \text{si } x \in \Omega_h \setminus \Omega_H \end{cases}$$

pour $e \in \mathcal{G}(\Omega_H)$ (on suppose $e(0) = e(1) = 0$). Pour l'*opérateur de restriction* on pourra choisir la restriction standard des fonctions puisque Ω_H est un sous-ensemble de Ω_h . Or, il s'avère plus convenable de prendre en compte les valeurs au points voisins ; pour $d \in \mathcal{G}(\Omega_h)$ on pose

$$(2) \quad R_N(d)(x) = R_h^{2h}(d)(x) = \frac{1}{4} \left(d(x-h) + 2d(x) + d(x+h) \right) \quad , \quad x \in \Omega_h$$

dans cette définition on suppose aussi $d(0) = d(1) = 0$. Ceci est dual de l'interpolation bilinéaire : $R_N = P_{N/2}^*/2$.

L'itération bigrille s'écrit de façon plus compacte comme

$$u_N^{m+1} = \mathcal{J}_N^{(\nu)}(u_N^m) + P_{N/2} L_{N/2}^{-1} R_N (f_N - L_N \mathcal{J}_N^{(\nu)})(u_N^m);$$

l'*opérateur bigrille* est donc

$$T_N = (\mathbf{1}_{N-1} - P_{N/2} L_{N/2}^{-1} R_N L_N) \mathcal{J}_N^{(\nu)} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}.$$

EXERCICE 1.1. ◁

- (1) Montrer que la composition de deux méthodes itératives consistantes pour un même système $Ax = b$, est aussi consistante.
- (2) Donner un exemple de deux itérations convergentes pour un même système, dont la composition ne l'est pas.

Remarque : Noter cependant que si les deux itérations sont de rayon spectrale < 1 , alors il est de même pour la composition, qui sera alors convergente.

▷

Le cycle bigrille est donc un schéma consistant puisque composition de deux schémas consistants : le lissage et la correction *via* la grille grossière.

4. Taux de convergence de la méthode bigrille

Ou ce qui est équivalent, on calcule le rayon spectral de T_N :

THÉORÈME 4.1. $\rho(T_{N-1}) = 1/2$.

EXERCICE 1.2. ◁ Montrer que

$$\sum_{j=1}^{N-1} \sin\left(\frac{\pi\ell}{N}j\right) \sin\left(\frac{\pi m}{N}j\right) = \begin{cases} N/2 & \text{si } \ell = m, \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

▷

On en déduit que

$$(2/N)^{1/2}\varphi_\ell \quad , \quad \ell = 1, \dots, N-1$$

est une base orthonormale de \mathbb{R}^{N-1} . La matrice Q faite des $(2/N)^{1/2}\varphi_\ell$ comme les colonnes, est unitaire et donc

$$\rho(T_N) = \rho(QT_NQ^*) \quad , \quad \|T_N\|_2 = \|QT_NQ^*\|_2.$$

Le reste de cette section est dédié à la démonstration de ce résultat. découpera l'espace dans des sous-espaces T_N -invariants

$$E_\ell = \text{Vect}(\varphi_\ell, \varphi_{N-\ell} \quad , \quad \ell = 1, \dots, N/2.$$

Pour $\ell = N/2$ on a $\dim(E_{N/2}) = 1$, autrement $\dim(E_\ell) = 2$.

Considérons d'abord l'action du 1/2-Jacobi $J_N = \mathbf{1}_{N-1}/2 + B_N/4 \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$; le valeur propre correspondant à φ_ℓ est

$$1 - \sin^2\left(\frac{\pi\ell}{2N}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi\ell}{2N}\right) \quad , \quad \ell = 1, \dots, N-1.$$

On se souvient que les valeurs propres de L_N sont

$$4N^2 \sin^2\left(\frac{\pi\ell}{2N}\right) \quad , \quad \ell = 1, \dots, N-1.$$

Considérons maintenant l'interpolation : soit $1 \leq \ell \leq N/2-1$ et posons $\alpha_\ell = \pi\ell/N$ et $\varphi_\ell^{N/2}$ pour les fonctions propres correspondant à la grille $\Omega_{N/2}$, alors

$$P_N(\varphi_\ell^{N/2}) = \left(\frac{1}{2} \sin(\alpha_\ell 0) + \frac{1}{2} \sin(\alpha_\ell 2), \sin(\alpha_\ell 2), \frac{1}{2} \sin(\alpha_\ell 2) + \frac{1}{2} \sin(\alpha_\ell 4), \dots, \right. \\ \left. \sin(\alpha_\ell(N-2)), \frac{1}{2} \sin(\alpha_\ell(N-2)) + \frac{1}{2} \sin(\alpha_\ell N) \right).$$

On a

$$\begin{aligned} \varphi_{N-\ell}(x) &= \sin\left(\frac{\pi(N-\ell)}{N}x\right) \\ &= \sin(\pi x - \alpha_\ell x) = \sin(\pi x) \cos(\alpha_\ell x) - \cos(\pi x) \sin(\alpha_\ell x) \end{aligned}$$

donc

$$\varphi_{N-\ell}(x) = \begin{cases} -\sin(\alpha_\ell) & \text{si } x \in \Omega_{N/2}, \\ \sin(\alpha_\ell) & \text{si } x \in \Omega_N \setminus \Omega_{N/2}. \end{cases}$$

On a aussi

$$\frac{1}{2} \sin(\alpha_\ell(2j)) + \frac{1}{2} \sin(\alpha_\ell(2j+2)) = \cos(\alpha_\ell) \sin(\alpha_\ell(2j+1)) = \cos(\alpha_\ell) \varphi_\ell((2j+1)h)$$

Les valeurs propres de la matrice au milieu sont 0 et 2, donc pour $\ell = 1, \dots, N/2 - 1$ les valeurs propres de $T_{N,\ell}$ sont

$$2 \sin^2(\alpha_\ell/2) \cos^2(\alpha_\ell/2) = \frac{1}{2} \sin^2(\alpha_\ell)$$

et 0. Les valeur propre le plus grand est pris pour $\ell = N/2$ et est égal à $1/2$.

Plus généralement, si on effectue ν pas de lissage dans chaque itération, la bloc correspondant sera

$$\begin{aligned} T_{N,\ell} &= \begin{bmatrix} \sin^2(\alpha_\ell/2) & \sin^2(\alpha_\ell/2) \\ \cos^2(\alpha_\ell/2) & \cos^2(\alpha_\ell/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha_\ell/2) & \\ & \sin^2(\alpha_\ell/2) \end{bmatrix}^\nu \\ &= \sin^2(\alpha_\ell/2) \cos^2(\alpha_\ell/2) \begin{bmatrix} \cos^{2\nu-2}(\alpha_\ell/2) & \sin^{2\nu-2}(\alpha_\ell/2) \\ \cos^{2\nu-2}(\alpha_\ell/2) & \sin^{2\nu-2}(\alpha_\ell/2) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Le rayon spectral et la norme sont

$$\rho(T_\ell) = F(\sin^2(\alpha_\ell/2)) \quad , \quad \|T_\ell\| = G(\sin^2(\alpha_\ell/2))$$

avec

$$F(x) = x(1-x)^\nu + (1-x)x^\nu \quad , \quad G(x) = \sqrt{2(x^2(1-x)^{2\nu} + (1-x^2)x^{2\nu})}.$$

Du fait que

$$0 < \sin^2(\alpha_\ell/2) < 1/2 < \cos^2(\alpha_\ell/2) < 1.$$

avec un peu d'analyse on déduit les estimations

$$\begin{aligned} \rho(T_N) &\leq \max\{F(x) : x \in [0, 1/2]\} = \frac{1}{e\nu} + O\left(\frac{1}{\nu^2}\right), \\ \|T_N\| &\leq \max\{G(x) : x \in [0, 1/2]\} = \frac{\sqrt{2}}{e\nu} + O\left(\frac{1}{\nu^2}\right). \end{aligned}$$

EXERCICE 1.3. < D'écrire un algorithme bigrille dans le cas des différences finies sur un rectangle et calculer le rayon spectral de la matrice correspondante d'itérations.
>

5. Méthode multigrille

Donc le taux de convergence de la méthode bigrille est indépendant du pas de discrétisation, donc elle converge très rapidement. Cependant, pour l'appliquer on est conduit à résoudre à chaque itération un système avec la moitié de variables, ce qui n'est pas efficace.

Cette désavantage est remédié par la méthode multigrille. Dans la méthode multigrille, on ne résout pas cette équation mais on l'approxime itérativement en utilisant la même méthode bigrille, cette fois appliquée aux grilles $\Omega_{N/2}$ et $\Omega_{N/4}$. Un nouveaux problème auxiliaire apparaît

$$L_{N/4}e_{N/4} = r_{N/4},$$

qu'on résout encore par un coup de bigrille appliqué aux niveaux $N/4$ et $N/8$, etc., jusque arriver à un niveau suffisamment bas pour que la résolution directe soit compétitive.

On suppose maintenant $N = 2^k$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$, et pour $0 \leq j \leq k$ on pose $\Omega_j, L_j, J_j, P_j, R_j, u_j, f_j$ pour les objets correspondant au niveau j . La récursion qui résulte de l'antérieur est le *cycle multigrille* Φ_k , dont on résume sa forme algorithmique :

$$\text{Cycle multigrille } u_k^{m+1} \leftarrow \Phi_k(\gamma, u_k^m, L_k, f_k, \nu_1, \nu_2) :$$

$$\text{Si } k = 0 \text{ alors } u_0 \leftarrow L_0^{-1} f_0, \text{ sinon}$$

(1) Prelissage :

- (a) $\widehat{u}_k^m \leftarrow \mathcal{S}_k^{(\nu_1)}(u_k^m, L_k, f_k)$;
- (2) Correction *via* la grille grossière (CGG) :
- (a) Calcul du résidu : $r_k^m \leftarrow f_k - L_k \widehat{u}_k^m$;
- (b) Restriction à Ω_{k-1} : $r_{k-1}^m \leftarrow R_k d_k^m$;
- (c) Résolution sur Ω_{k-1} par application de $\gamma \geq 1$ cycles multigrille d'ordre $k-1$, utilisant la fonction 0 comme première approximation :
- $$e_H^m \leftarrow \Phi_{\ell-1}^{(\gamma)}(\gamma, 0, L_{k-1}, r_{k-1}^m, \nu_1, \nu_2);$$
- (d) Interpolation sur Ω_k : $e_k^m \leftarrow P_k e_{k-1}^m$;
- (e) Correction de l'approximation : $\widehat{u}_k^{m+1} \leftarrow \widehat{u}_k^m + e_k^m$.
- (3) Post-lissage :
- (a) $\widehat{u}_k^m \leftarrow \mathcal{S}_k^{(\nu_2)}(\widehat{u}_k^m, L_k, f_k)$;

La procédure récursive fini après k pas, quand on atteint le niveau 0; l'algorithme est donc bien défini. Pour la CGG on applique γ pas de l'itération $\Phi_{\ell-1}$; dans la pratique $\gamma \leq 2$ suffit. Le multigrille avec $\gamma = 1$ est appelé *V-cycle* et celui avec $\gamma = 2$ est appelé *W-cycle*, pour des raisons évidentes, *voir* les figures ci-dessous.

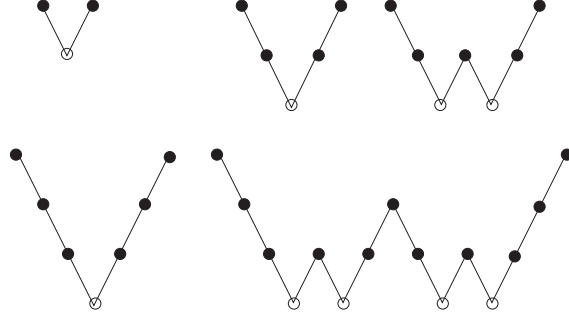


FIG. 1. Structure des cycles multigrille pour $k = 1, 2, 3$ et $\gamma = 1, 2$

6. Complexité du multigrille

Estimer la complexité de l'itération multigrille n'est pas immédiat, à cause de la nature récursive de sa définition. Posons $n_k := \#\Omega_k + 1 = 2^k$. Le coût de chaque étape est estimé en

- $C_L n_k$ opérations pour le *lissage* $\mathcal{S}(u_k, f_k)$,
- $C_C n_k$ opérations pour le *résidu* $R_k(f_k - L_k u_k)$,
- $C_P n_k$ opérations pour la *correction de l'approximation* $u_k - P_k e_k$.

La proportionnalité à la dimension est une conséquence de la esparsité de la matrice L_k . On a

$$n_k = 2n_{k-1}.$$

Soit $\nu = \nu_1 + \nu_2$; la complexité du *V-cycle* ($\gamma = 1$) est donc estimé par

$$C_V(k) \leq \sum_{j=0}^k (\nu C_L + C_R + C_P) 2^j \leq 2(\nu C_L + C_R + C_P) N = O(N).$$

La complexité du *W-cycle* ($\gamma = 2$) est estimé par

$$C_W(k) \leq \sum_{j=0}^j (\nu C_L + C_R + C_P) 2^k \leq (\nu C_L + C_R + C_P) N \log(N) = Os(N \log(N)).$$

Le 1/2-Jacobi d'ordre k est défini par

$$(\widehat{u}_k)_j = \frac{(u_k)_j}{2} + \frac{1}{4}((u_k)_{j-1} + (u_k)_{j+1}) + \frac{1}{4N^2}(f_k)_j,$$

donc

$$C_L = 5.$$

Des vérifications du même type pour le résidu et la correction donnent $C_R = 8$ et $C_P = 4$; le coût total est estimé en

$$C_V(k) = (10\nu + 24)N.$$

7. Méthode multigrille complet

La présence d'une hiérarchie d'équations $L_k u_k = f_k$ est nécessaire à la mise en œuvre du multigrille. Cette situation peut encore s'exploiter d'une autre façon.

Évidemment le résultat d'une itération est d'autant plus précis si le point de départ est mieux. Habituellement, la solutions u_k^∞ de $L_k u_k = f_k$ s'approche vers la solution continue u de $Lu = f$ avec un certain *ordre de consistance* $O(h^\kappa)$ ($h = 2^{-k}$). Par l'inégalité du triangle on a

$$\|u_k - \widetilde{P}_k u_{k-1}\| = O(h^\kappa);$$

\widetilde{P}_k étant un opérateur d'interpolation convenable, qui n'est pas forcément le même que celui qu'on utilise dans l'itération multigrille.

Cette observation suggère de commencer Φ_k avec le résultat de l'itération Φ_{k-1} . Soit $m \in \mathbb{N}$ un paramètre fixé; l'algorithme du *multigrille complet* est le suivant :

- (1) $\widetilde{u}_0 \leftarrow L_0^{-1} f_0$;
- (2) for $j = 1, \dots, k$ do begin $\widetilde{u}_j \leftarrow \widetilde{P}_j u_{j-1}$;
- (a) for $\ell = 1, \dots, m$ do $\widetilde{u}_j \leftarrow \Phi_j(\gamma, \widetilde{u}_j, L_j, f_j, \nu_1, \nu_2)$;
- (3) end.

Notons que ceci n'est pas une itération proprement dite, mais un processus *fini*.

Si l'on note $C_{MG,V}N$ la complexité de l'itération multigrille Φ_k correspondant au V -cycle, il en résulte une complexité

$$C_{MGC,V}(N) \leq m C_{MG,V}(n_0 + n_1 + \dots + n_k) = 2C_{MG,V}n_k \leq (20\nu + 48)N$$

pour le multigrille complet. Similairement la complexité du multigrille complet correspondant au W -cycle s'estime en

$$C_{MGC,W}(N) \leq (10\nu + 24)N \log(N).$$

8. Analyse de l'erreur

Pour notre problème modèle l'ordre de consistance est $\kappa = 2$, c'est-à-dire

$$\|u - u_k\| \leq Ch_k^2$$

pour une certaine constante $C > 0$. Pour le multigrille complet on utilisera aussi l'opérateur d'interpolation bilinéaire; on a donc

$$\begin{aligned} \|u_k^\infty - P_k u_{k-1}^\infty\| &\leq \|u_k^\infty - u\| + \|u - P_k u\| + \|P_k\| \cdot \|u - u_{k-1}^\infty\| \\ &\leq Ch_k^2 + \frac{\|u''\|}{2} h_k^2 + Ch_{k-1}^2 = \left(5C + \frac{\|u''\|}{2}\right) h_k^2. \end{aligned}$$

puisque

$$|u(x) - P_k(u)(x)| = \begin{cases} 0 & , \text{ pour } x \in \Omega_{k-1}; \\ \frac{1}{2} \left| -u(x-h) + 2u(x) - u(x+h) \right| & , \text{ pour } x \in \Omega_k \setminus \Omega_{k-1}; \end{cases}$$

$$\leq \frac{1}{2} \sup\{|u''(x)| : x \in [0, 1]\} h_k^2.$$

Écrivons M_k l'opérateur de l'itération multigrille. Comme on verra bientôt, ceci possède un taux de convergence qu'on peut estimer indépendamment du pas de discrétisation

$$\|M_k\| \leq \zeta < 1.$$

THÉORÈME 8.1. *Supposons $\zeta < 1/4$, alors le multigrille complet produit des approximations \tilde{u}_k tels que*

$$\|u_k - \tilde{u}_k\| \leq C_1 \zeta^m (1 - 4\zeta^m)^{-1} h_k^2$$

avec $C_1 = C_1(u) = 5C + \|u''\|/2$.

Pour des méthodes multigrille avec une taux de convergence $\zeta \leq 1/5 = 0.20$, on aura

$$\|u_k - \tilde{u}_k\| \leq C_1 h_k^2.$$

DÉMONSTRATION. On raisonne par récurrence sur k . Posons $\gamma(\zeta^m) = \zeta^m (1 - 4\zeta^m)^{-1}$ et $u_k^0 = P_k \tilde{u}_{k-1}$, alors

$$\begin{aligned} \|u_k^\infty - u_k^0\| &\leq \|u_k^\infty - P_k u_{k-1}^\infty\| + \|P_k\| \cdot \|u_{k-1}^\infty - \tilde{u}_{k-1}^m\| \\ &\leq C_1 h_k^2 + C_1 \gamma(\zeta^m) h_{k-1}^2 \\ &= C_1 h_k^2 (1 + 4\gamma(\zeta^m)). \end{aligned}$$

Après m itérations de la méthode multigrille on trouve

$$\|u_k^\infty - \tilde{u}_k^m\| \leq \zeta^m \|u_k^\infty - u_k^0\| \leq C_1 h_k^2 \zeta^m (1 + 4\gamma(\zeta^m)) = C_1 \gamma(\zeta^m) h_k^2.$$

□

EXERCICE 1.4. ◁ Comment doit-on choisir m variable dans le cas où le taux de convergence dépend du pas de discrétisation, par exemple quand $\zeta_k = 1 - O(h_k^\eta)$? ▷

9. Matrice de l'itération multigrille

Puisque l'itération est définie récursivement, il est de même pour la matrice :

THÉORÈME 9.1. *L'itération multigrille est consistante, et on a*

$$M_k = J_k^{\nu_2} \left(\mathbf{1} - P_k (\mathbf{1} - M_{k-1}^\gamma) (L_{k-1})^{-1} R_k L_k \right) J_k^{\nu_2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

DÉMONSTRATION. Notons d'abord que pour une itération consistante $u^{m+1} \leftarrow M u^m + v$ pour l'équation $L_k u = f_k$, le vecteur v est déterminé par

$$v = (\mathbf{1} - M) L_k^{-1} f_k.$$

Par la définition du multigrille

$$\Phi_k(u, L_k, f_k) = \mathcal{J}_k^{(\nu_2)} \left(\mathcal{J}^{(\nu_1)}(u) + P_k \circ \Phi_{k-1}^{(\gamma)}(0, L_{k-1}, R_k(f_k - L_k \mathcal{J}^{(\nu_1)}(u))) \right).$$

On a

$$\Phi_{k-1}^{(\gamma)}(0, L_{k-1}, R_k(f_k - L_k \mathcal{J}^{(\nu_1)}(u))) = M_{k-1} \cdot 0 + (\mathbf{1} - M_{k-1}^\gamma) (L_{k-1})^{-1} R_k((f_k - L_k \mathcal{J}^{(\nu_1)}(u))),$$

d'où l'on tire l'expression cherchée. □

10. Analyse du taux de convergence

Pour compléter l'analyse, il ne nous reste que d'établir le taux de convergence de l'opérateur multigrille M_k . Pour le W -cycle ($\gamma = 2$) l'indépendance du taux de convergence par rapport à h peut se déduire facilement de celui pour la méthode bigrille. Le V -cycle satisfait aussi une estimation du même tabac pour le taux de convergence, cependant l'analyse à faire est plus délicat, voir [3, § 10.7].

THÉORÈME 10.1. *Supposons $\|T_k\| \leq \tau$ pour un certain $\tau < 1$, alors*

$$\|M_k\| \leq \frac{2\sqrt{2}}{(1 - 2^{5/2}\tau)}.$$

DÉMONSTRATION. À l'aide des expressions matricielles pour les opérateur bigrille et multigrille on trouve

$$M_k = T_k + A_k M_{k-1}^2 B_k$$

avec

$$A_k = J^{\nu_2} P_k \quad , \quad B_k = L_{k-1}^{-1} R_k L_k J^{\nu_1}.$$

Pour l'équation de Poisson en dimension 1 on a (**vérifier**)

$$\|A_k\| \leq \|J\|^{\nu_2} \|P_k\| \leq 1,$$

$$\|B_k\| \leq \|L_{k-1}^{-1}\| \|R_k\| \|L_k\| \|J\|^{\nu_1} \leq \sqrt{2},$$

d'où par récurrence sur k

$$\|M_k\| \leq \tau + \sqrt{2} \|M_{k-1}\|^2 \leq \frac{2\sqrt{2}}{(1 - 2^{5/2}\tau)}.$$

□

Un calcul simple montre que pour $\nu = 4$ on a

$$\tau(\nu) \sim \frac{\sqrt{2}}{e\nu} = 0.13$$

et donc

$$\sigma(\nu) := \frac{2\sqrt{2}}{(1 - 2^{5/2}\tau(\nu))} = 0.171 < 1/5.$$

On conclut que la méthode multigrille complète associé au W -cycle produit des approximations \tilde{u}_k tels que

$$\|u_k - \tilde{u}_k\| \leq C_1 h_k^2$$

avec $C_1 = C_1(u) = 5C + \|u''\|/2$, avec complexité ($N = 2^k$)

$$C_{\text{MGC},W}(N) \leq (10\nu + 24)N \log(N) = 64N \log(N).$$

Bibliographie

- [1] William L. Briggs, Van Emden Henson, and Steve F. McCormick. *A multigrid tutorial*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, second edition, 2000.
- [2] James W. Demmel. *Applied numerical linear algebra*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1997.
- [3] Wolfgang Hackbusch. *Iterative solution of large sparse systems of equations*, volume 95 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1994. Translated and revised from the 1991 German original.
- [4] Rainer Kress. *Numerical analysis*, volume 181 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [5] U. Trottenberg, C. W. Oosterlee, and A. Schüller. *Multigrid*. Academic Press Inc., San Diego, CA, 2001. With contributions by A. Brandt, P. Oswald and K. Stüben.