Algoritmos en álgebra lineal (2do cuatrimestre de 2005)
Hoja de ejercicios n° 1

Repaso de álgebra lineal / Valores singulares de matrices

Ejercicio 1. ◁ Sea A una matriz cuadrada de orden n, y supongamos dada una descomposición en bloques de tamaño $n_i \times n_j$ para $1 \leq i, j \leq N$.

1. Se dice que A es *triangular inferior por bloques* si $A_{i,j} = 0$ para $i > j$. Mostrar que en este caso

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{N} \det(A_{i,i}).$$

Sugerencia: Comience con una matriz descompuesta en 2×2 bloques. Hay al menos dos demostraciones:

(a) por inducción en la dimensión de los bloques en la diagonal;

(b) o mostrando que A es similar a una matriz triangular, con una similaridad que respeta la estructura de bloques.

2. Muestre con un contraejemplo, que en general

$$\det \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} \neq \det(A_{1,1}) \det(A_{2,2}) - \det(A_{1,2}) \det(A_{2,1}).$$

▷

Ejercicio 2. ◁ Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matriz Hermítica semi-definida positiva. Usando la diagonalización de A, mostrar que existe una matriz B Hermítica semi-definida positiva tal que

$$A = B^2.$$

Nota: se puede demostrar que B es la *única* raíz cuadrada ≥ 0 de A. ▷

Ejercicio 3. ◁ Sea $1 < p < \infty$ y sea q definido por

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

1. Mostrar que para todo $\alpha, \beta > 0$

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}.$$

2. Consideremos la *norma* ℓ^p de $x \in \mathbb{K}^n$

$$|x|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Usando lo anterior, deducir la *desigualdad de Hölder* para $x, y \in \mathbb{K}^n$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq |x|_p \cdot |y|_q.$$

3. Mostrar que para $1 \leq p \leq \infty$ la norma ℓ^p *es* una norma, la parte "difícil" es demostrar la desigualdad triangular

$$|x|_p + |y|_p \leq |x+y|_p.$$

$\triangleright$

Ejercicio 4. $\triangleleft$ Sea $\mathbb{C}[x]_{\leq n}$ el espacio vectorial de los polinomios de grado a lo sumo n a coeficientes complejos. Dados $m \geq n+1$ puntos distintos $(\xi_j)_{1 \leq j \leq m}$ de $\mathbb{C}$, mostrar que

$$|f|_{\text{inter}} := \max\{|f(\xi_j)| : 1 \leq j \leq m\}$$

define una norma sobre $\mathbb{C}[x]_{\leq n}$. $\triangleright$

Ejercicio 5. $\triangleleft$ Demostrar las estimaciones para $x \in \mathbb{K}^n$

$$\begin{aligned} ||x||_2 \leq ||x||_1 &\leq \sqrt{n}||x||_2, \\ ||x||_\infty \leq ||x||_2 &\leq \sqrt{n}||x||_\infty, \\ ||x||_\infty \leq ||x||_1 &\leq n||x||_\infty. \end{aligned}$$

$\triangleright$

Ejercicio 6. $\triangleleft$

1. Sean M, N dos normas sobre $\mathbb{K}^n$, mostrar que la norma de operadores asociada $|| \cdot ||_{M,N}$ es una norma matricial.
2. Mostrar que la norma de Frobenius $||\cdot||_F$ es una norma matricial, pero que no es asociada a ninguna norma vectorial. (**Sugerencia:** Considerar $||\mathsf{Id}_n||_F$).

$\triangleright$

Ejercicio 7. $\triangleleft$ Sean $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$; mostrar que

$$||Q \cdot A \cdot R||_2 = ||A||_2$$

para cualesquiera matrices unitarias Q, R. $\triangleright$

Ejercicio 8. $\triangleleft$ Sea $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in \mathbb{C}^{m \times n}$; mostrar que

$$\begin{aligned} ||A||_1 &= \max\left\{\sum_{i=1}^{m} |a_{i,j}| : 1 \leq j \leq n\right\}, \\ ||A||_\infty &= \max\left\{\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| : 1 \leq i \leq m\right\}. \end{aligned}$$

$\triangleright$

Ejercicio 9. $\triangleleft$ Mostrar que

$$||A||_2 \leq ||A||_F \leq \sqrt{n}||A||_2.$$

$\triangleright$

Ejercicio 10. ◁ Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ $(n \leq m)$ con DVS

$$A = U\Sigma V^*.$$

Calcular la DVS de las siguientes matrices, en términos de U, Σ y V:

1. $(A^*A)^{-1}$;
2. $(A^*A)^{-1}$;
3. $A(A^*A)^{-1}$;
4. $A(A^*A)^{-1}A^*$.

▷

Ejercicio 11. ◁ Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ $(n \leq m)$ una matriz con valores singulares σ_i $(1 \leq i \leq n)$ y sea $0 \leq k \leq n$. Mostrar que si $\sigma_k > \sigma_{k+1}$ entonces la matriz de rango k que mejor aproxima a A en norma 2, es única e igual a

$$A_k = U \cdot \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, 0, \ldots, 0) \cdot V^*.$$

▷

Ejercicio 12. ◁ Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ $(n \leq m)$ una matriz matriz de rango maximal n y $b \in \mathbb{K}^m$; mostrar que la solución al problema de mínimos cuadrados

$$\min\{|Ax - b|_2 : x \in \mathbb{K}^n\}$$

está dada por la inversa de Moore-Penrose: $x = A^+b = (A^*A)^{-1}A^*x$. ▷

Ejercicio 13. ◁ Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, mostrar que

$$\sigma_i(A) = \min\{||A\,|_{E^\perp}\,||_2 : \; E \subset \mathbb{K}^n \text{ de dimensión } i-1\}.$$

Mostrar que este mínimo se realiza tomando a E como el espacio engendrado por los $i-1$ primeros valores singulares de A. ▷

Ejercicio 14. ◁ Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz cuadrada y no singular, mostrar que $||A^{-1}||_2 = \sigma_n^{-1}$ y que por lo tanto

$$||A||_2 \cdot ||A^{-1}||_2 = \sigma_1/\sigma_n.$$

▷