Algoritmos en álgebra lineal (2do cuatrimestre de 2005)
Hoja de ejercicios n° 3

Aritmética flotante / Representación exacta de enteros y racionales

Ejercicio 1. ◁ Calcule fl$(1/3)$ en el sistema de flotantes $F(2,3,-1,2)$. ▷

Ejercicio 2. ◁ Calcule el resultado de las siguientes operaciones en el sistema $F(2,3,-1,2)$

$$\frac{5}{2} \oplus \frac{5}{2}, \quad \frac{5}{16} \ominus \frac{7}{16}, \quad \frac{5}{2} \otimes 3, \quad \frac{1}{4} \otimes \frac{3}{8}.$$

▷

Ejercicio 3. ◁ En el mismo sistema de flotantes, calcule

$$\left(3 \oplus \frac{5}{16}\right) \ominus \frac{3}{2} \quad , \quad 3 \oplus \left(\frac{5}{16} \ominus \frac{3}{2}\right),$$

$$\left(\frac{5}{16} \otimes 3\right) \otimes \frac{7}{8} \quad , \quad \frac{5}{16} \otimes \left(3 \otimes \frac{7}{8}\right).$$

▷

Ejercicio 4. ◁ Sea $(a_n)_n$ una sucesión de números reales y sea Σ_n la suma numérica de n términos de la serie, es decir

$$\Sigma_0 = \mathrm{fl}(a_0) \quad , \quad \Sigma_n := \Sigma_{n-1} \oplus a_n \quad (n \geq 1).$$

Mostrar que si $a_n \to 0$ y si la suma Σ_n no supera la capacidad de la máquina, entonces la sucesión $(\Sigma_n)_n$ es estacionaria a partir de un cierto punto. Luego estime el valor de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

en un sistema de flotantes dado $F(\beta, t, L, U)$. ▷

Ejercicio 5. ◁ Sea $a \geq 1$ un entero de longitud binaria $\tau(a) = N$, el objetivo de este ejercicio es mostrar un algoritmo que calcula

$$\lfloor 2^{2N-1}/a \rfloor \in \mathbb{N}$$

con complejidad $O(M(N))$. Esto es equivalente calcular el recíproco $1/a$ con precisión N: sea $p := a/2^{N-1}$, luego $1 < p < 2$ y

$$\lfloor 2^N/p \rfloor = \lfloor 2^{2N-1}/a \rfloor$$

nos da N bits de la mantisa de $1/a$. Vamos a suponer que $2M(n) \leq M(2n)$; es razonable suponer que el costo de dos multiplicaciones con N bits es menor que el de una multiplicación con $2N$ bits.

1. Sea $f(x) := \dfrac{1}{x} - p$. Calcule la expresión de la iteración de Newton

$$\mathcal{N}(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Verificar que $g([0,1]) \subset [0,1]$ y que si $\widetilde{x}, x \in [0,1]$ entonces

$$|\widetilde{x} - x| < 2^m \Longrightarrow |g(\widetilde{x}) - g(x)| < 2^{m+3}.$$

2. Verificar que
$$\mathcal{N}(x) - \frac{1}{p} = -p\left(x - \frac{1}{p}\right)^2.$$

   Iniciamos la iteración con 3 bits exactos (que obtenemos haciendo tres pasos de la división standard):
$$\left|x_0 - \frac{1}{p}\right| < \frac{1}{2^3}.$$

   Para $k \geq 1$ sea $b(k) := 2^k + 2$ y hacemos
$$x_{k+1} := \mathcal{N}(\widetilde{x}_k)$$
   donde $\widetilde{x}_k$ es una truncación de x_k tal que
$$|\widetilde{x}_k - x_k| < 2^{-2b(k)-2}.$$

3. Mostrar que para todo $k \geq 1$
$$|x_k - 1/p| < 2^{-b(k)}.$$

4. Deducir que alcanzará con hacer $n := \lceil \log_2 N \rceil$ iteraciones para calcular x_n tal que $|x_n - 1/p| < 2^{-N}$. Usar ésto para resolver el problema inicial. (**Sugerencia:** $|2^N x_n - \lfloor 2^{2N-1}/a \rfloor| < 2$).

5. Usando que la complejidad de la adición es M bits est de $2M$, mostrar que la complejidad final del algoritmos es
$$\sum_{k=1}^{n} (2 \cdot M(2b(k)+2) + 2 \cdot (2(2b(k)+2)))$$
   y mostrar que esta suma es un $O(M(n))$.

$\triangleright$

Ejercicio 6. $\triangleleft$ Usar el algoritmo del ejercicio anterior para calcular el "recíproco" de 14.293 (en base 10). $\triangleright$

Ejercicio 7. $\triangleleft$ Sean $a, b \geq 1$ enteros de longitud binaria $\leq N$; obtener como consecuencia del ejercicio 5, un algoritmo para el cálculo de la división con resto
$$b = c \cdot a + r \quad , \quad 0 \leq r \leq a - 1$$
de complejidad $M(N)$. (**Sugerencia:** sea $q := 2^{-N}\lfloor 2^N/a \rfloor$, usar que $|q \cdot b - c| < 1$). $\triangleright$

Ejercicio 8. $\triangleleft$ Sean $\xi, \eta \in \mathbb{Q}^\times$, demostrar las estimaciones sobre el comportamiento de la altura con respecto a las operaciones ariméticas:

1. $h(\xi + \eta) \leq h(\xi) + h(\eta) + \log(2)$.
   Si $\xi, \eta \in \mathbb{Z}$ entonces $h(\xi + \eta) \leq \max\{h(\xi), h(\eta)\} + 1$.
2. $h(\xi \cdot \eta^{\pm 1}) \leq h(\xi) + h(\eta)$.

▷

Ejercicio 9. ◁ Sean

$$\mathbb{Q}_{\leq H} := \{\xi \in \mathbb{Q} : \ H(\xi) \leq H\}$$

los racionales de altura exponencial acotada por H. Un conteo directo da la estimación

$$\#\mathbb{Q}_{\leq H} \leq (2H+1)H;$$

el objetivo de este ejercicio es mostrar la asintótica

$$\#\mathbb{Q}_{\leq H} = \frac{12}{\pi^2}H^2 + O(H\log(H)) = 1,216\, H^2 + O(H\log(H)). \tag{1}$$

Un par $z = (p,q) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0\}$ es *visible* si el interior del segmento $\overline{0\,z}$ no contiene ningún punto de $\mathbb{Z}^2$, lo cual equivale a que p, q sean primos entre sí.

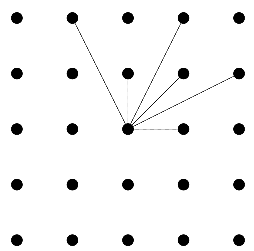

Figure 1: Puntos visibles desde el $(0,0)$

1. Mostrar que $\mathbb{Q}^\times$ se identifica con los puntos visibles desde el $(0,0)$ cuando uno "mira" hacia el norte. En este modelo, la altura corresponde a la norma ℓ^∞.

2. Sean

$$\begin{aligned} m(t) &:= \#\{(p,q) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\} : \ |p|, |q| \leq t\}, \\ n(t) &:= \#\{(p,q) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\} : \ \gcd(p,q) = 1, \ |p|, |q| \leq t\}. \end{aligned}$$

   Mostrar que $m(t) = (2t+1)^2 - 1$ y que

$$m(t) = \sum_{d \geq 1} n(t/d).$$

3. Sea $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la *función de Möbius*, definida como $\mu(d) = (-1)^k$ si $d = p_1 \cdots p_k$ con $p_1, \ldots, p_k$ primos distintos dos a dos, y $\mu(d) = 0$ si no. Probar la fórmula de inversión

$$n(t) = \sum_{d \geq 1} \mu(d)\, m(t/d).$$

4. Deducir la asintótica para $t \to \infty$

$$n(t) = 4\Big(\sum_{d\geq 1} \frac{\mu(d)}{d^2}\Big)\, t^2 + O(t\log(t)).$$

5. Sea

$$\zeta(s) := \sum_{n\geq 1} n^{-s} = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1-p^{-s}}, \quad (Re(s) > 1)$$

la función zeta de Riemann. Observar que

$$\sum_{d\geq 1} \frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{1}{\zeta(2)};$$

y que $\#\mathbb{Q}_{\leq H} = \frac{1}{2}\, n(t) - 1$; deducir de aquí (1), utilizando que $\zeta(2) = \pi^2/6$.

$\triangleright$

Ejercicio 10. $\triangleleft$ **. Considere la función

$$f(x) = \frac{1}{2\lfloor x\rfloor - x + 1};$$

mostrar que

$$g(n) = f^n(0) = \overbrace{f \circ \cdots \circ f}^{n}\,(0).$$

es una biyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}_{\geq 0}$. $\triangleright$