Algoritmos en álgebra lineal (2do cuatrimestre de 2005)
Hoja de ejercicios n° 4

Resolución de sistemas de ecuaciones generales

Ejercicio 1. ◁ Calcule el condicionamiento $\kappa_\infty(A)$ de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Compare las soluciones de los sistemas

$$Ax = \begin{bmatrix} 100 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad Ax = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Cuál es el factor de amplificación del error, y cómo se relaciona con $\kappa_\infty(A)$? ▷

Ejercicio 2. ◁ Sea $A \in \mathbb{F}^{N\times N}$, demuestre las comparaciones:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{N}\kappa_2(A) \le \kappa_1(A) \le N\kappa_2(A); \\ &\frac{1}{N}\kappa_\infty(A) \le \kappa_2(A) \le N\kappa_\infty(A); \\ &\frac{1}{N^2}\kappa_2(A) \le \kappa_\infty(A) \le N^2\kappa_1(A). \end{aligned}$$

▷

Ejercicio 3. ◁ Programar el algoritmo de eliminación de Gauss, por ejemplo en `Matlab`, `Scilab` o `Maple`. El pseudo-código se encuentra en el capítulo 4 de las notas del curso.

Experimente con matrices generadas aleatoreamente, para determinar cuál es el tamaño de matrices que puede resolver en su máquina en un tiempo razonable (por ejemplo 10') y testee la estabilidad de las versiones sin pivotaje, con pivotaje parcial, y con pivotaje total. ▷

Ejercicio 4. ◁ Sea

$$\begin{array}{ccc} A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} i \\ N-i \end{array} \\ \begin{array}{cc} \quad\quad i & \quad N-i \end{array} & \in \mathbb{F}^{N\times N} \end{array}$$

una matriz fuertemente inversible. En particular $A_{1,1}$ es inversible; consideramos su *i-ésimo complemento de Schur*

$$S_i := A_{2,2} - A_{2,1} \cdot A_{1,1}^{-1} \cdot A_{1,2} \in \mathbb{F}^{(N-i)\times(N-i)}$$

Mostrar que S_i coincide con el bloque correspondiente en la matriz A, después de i pasos del algoritmo de eliminación de Gauss. ▷

Ejercicio 5. ◁ Sean $\sigma, \tau \in S_N$ permutaciones y $P_\sigma, P_\tau \in \mathbb{R}^{N\times N}$ las matrices correspondientes, y $A \in \mathbb{F}^{N\times N}$ una matriz cualquiera. Mostrar que

1. $P_\sigma \cdot A$ es la matriz A con las lineas permutadas según σ;

2. $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}} = P_\sigma^*$;

3. $P_\sigma \cdot P_\tau = P_{\sigma\circ\tau}$.

▷

Ejercicio 6. ◁ Sea $A \in \mathbb{F}^{N\times N}$ una matriz fuertemente no singular con descomposición LU

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,N} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \cdots & a_{N,N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{2,1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_{N,1} & \ell_{N,2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & \cdots & s_{1,N} \\ 0 & s_{2,2} & \cdots & s_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_{N,N} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Para $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq N$ y $1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq N$ sea

$$A(i_1, \ldots, i_p; j_1, \ldots, j_p) := [a_{i_k, j_\ell}]_{1\leq k,\ell\leq p} \ \in \mathbb{F}^{p\times p}$$

la sub-matriz de A correspondiente a las líneas $i_1, \ldots, i_p$ y a las columnas $j_1, \ldots, j_p$. Mostrar que

$$\ell_{i,j} = \frac{\det(A(1,2,\ldots,j-1,i;1,2,\ldots,j-1,j))}{\det(A(1,2,\ldots,j-1,j;1,2,\ldots,j-1,j))} \qquad (i > j)$$

y

$$s_{i,j} = \frac{\det(A(1,2,\ldots,i-1,i;1,2,\ldots,i-1,j))}{\det(A(1,2,\ldots,i-2,i-1;1,2,\ldots,i-2,i-1))} \qquad (i \leq j).$$

Indicación: borrar de forma conveniente líneas y columnas en la factorización (1).
▷

Ejercicio 7. ◁ Considere la matriz

$$A_N := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Muestre que usando pivotaje parcial, el factor de crecimiento de pivots es de

$$\rho_{EGPP}(A_N) = 2^{N-1}.$$

▷

Ejercicio 8. ◁ Sea $A \in \mathbb{F}^{N\times N}$ una matriz fuertemente inversible con ancho de banda superior q e inferior p.

1. Muestre que la descomposición LU respecta la estructura banda: L es triangular inferior con ancho de banda p, y U triangular superior con ancho de banda q.

2. Muestre que la versión banda del algoritmo de eliminación son pivotaje cuesta sólo $2pqN$ ops.

▷