# Algoritmos en álgebra lineal

Martín Sombra,
Universidad de Barcelona
España

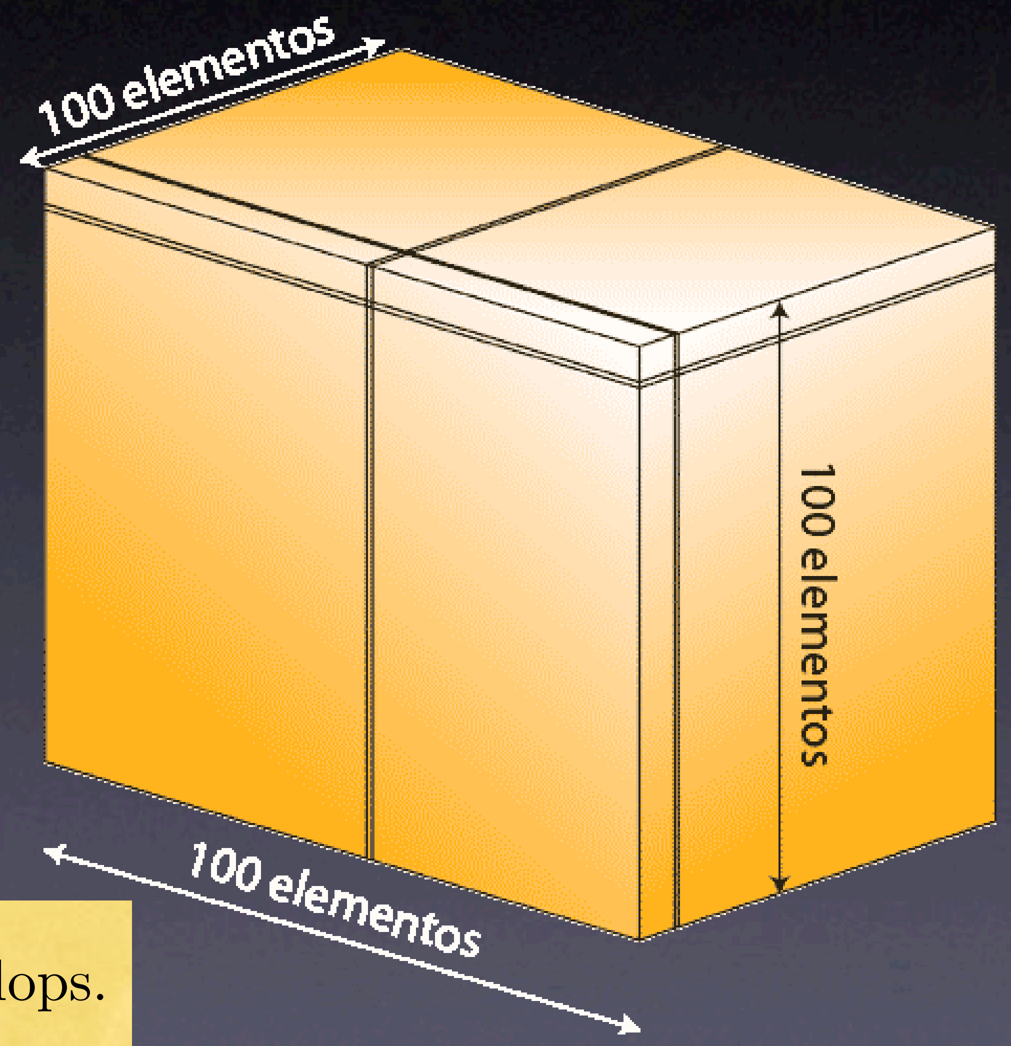
# Problema tipo

Sistema de *d* ecuaciones
lineal en *d* variables

$$Ax = b.$$

# Sistemas lineales

Gauss, caso general, $d \times d$: $2 \times d^3/3$ operaciones.




$d = 10^2 \times 10^2 \times 10^2 = 10^6$

$2 \times 10^{18}/3$ operaciones; 21 años a 1 Gflops.

# Luego hay estudiar estructuras especiales!

Ejemplo de estructura especial (Toeplitz)

$$A := \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_{d-1} \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{d-2} \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & \cdots & \ldots & a_{n-3} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{-(d-2)} & & & & a_0 & a_1 \\ a_{-(d-1)} & \ldots & \ldots & \cdots & a_{-1} & a_0 \end{bmatrix}$$

Algoritmo super-rápido en $O(d(\log d)^2)$. Utiliza profundamente la estructura algebraica **particular**. Mas rápido que escribir la matriz!

**Definición.** Rango de desplazamiento: $S$ y $T$ matrices dadas; es el rango de

$$\nabla_{S,T}(A) = SA - AT.$$

Una matriz es estructurada si para $S$ y $T$ simples (pero no triviales) su rango de desplazamiento es pequeño comparado con la dimensión.

Caso Toeplitz, $4 \times 4$, $S = T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\nabla_{S,S} A = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{-1} \\ 0 & 0 & 0 & a_{-2} \\ 0 & 0 & 0 & a_{-3} \end{bmatrix}$$

La inversa de una matrix de Toeplitz no es Toeplitz, pero su rango de desplazamiento es 2.

Construir algoritmos que trabajen directamente sobre $\nabla_{S,T}A$ que es mucho mas pequeño que $A$ .

Cursos: algoritmos adaptados a esta noción de estructura, generalizando el algoritmo super-rápido para Toeplitz.

Aplicaciones: códigos correctores de errores, análisi de imágenes, teoria de sistemas, interpolación.

Para las aplicaciones a las ecuaciones en derivadas parciales, otro tipo de estructura, reposando en la auto-similaridad local: multigrilla, matrices jerárchicas.

Multigrilla geométrica: buena resolución de los modos mas oscilatorios. Pasaje de los modos menos oscilatorios a une grilla mas gruesa, lo cual reduce la complejidad del problema. Recuperación de la aproximación de la solución en la grilla inicial.

# Matrices jerárquicas = abstracción de la multigrilla.