Optativa de Doctorado y Licenciatura en Cs. Matemáticas (or. pura y aplicada)

ALGORITMOS EN ÁLGEBRA LINEAL

Docente: Martín Sombra (Universidad de Barcelona, España)

Fecha de inicio: **3/10/2005**

Carga horaria: 4hs semanales

Correlativas: Álgebra lineal. Además es indispensable tener interés (pero no necesariamente conocimientos!) en los métodos numéricos y/o en el cálculo simbólico

Contacto antes de la fecha de inicio: *via* mail a sombra@ub.edu, o *via* el Prof. R. Durán y la Prof. T. Krick (Dto. Matemática, FCEyN)

Un número formidable de aplicaciones (por ejemplo la discretización de una EDP) se reduce a la resolución de un sistema lineal $A\,x = b$, donde A es una matriz inversible de orden n y $b \in \mathbb{R}^n$. Típicamente el número de variables n es del orden de miles o hasta cientos de miles.

En principio este problema podría resolverse mediante el algoritmo de eliminación de Gauss en $O(n^3)$ operaciones aritméticas, pero este costo es demasiado alto cuando n es grande. Resulta entonces importante identificar cuáles son las estructuras relevantes para las aplicaciones, para luego obtener algoritmos adaptados. Por ejemplo, para el caso de matrices de Toeplitz

$$A := (a_{i-j})_{1\le i,j\le n}$$

hay algoritmos estables que resuelven la ecuación $A\,x = b$ en $O(n\,\log^3(n))$ operaciones, mucho menos que el tiempo necesario para escribir la matriz completa!

Este curso se articularán los aspectos algebraicos y analíticos de la resolución de sistemas lineales, con el fin de presentar los distintos métodos (exactos y numéricos) para la resolución de sistemas asociados a matrices estructuradas.

(1) Generalidades sobre el cálculo flotante y el cálculo exacto. Transformada de Fourier rápida (FFT), multiplicación de enteros y de polinomios.
(2) Algoritmo de eliminación de Gauss: complejidad en cálculo flotante y en cálculo exacto. Estabilidad: análisis del error *a priori* y *a posteriori*.
(3) Rango de desplazamiento, algorithmo de descomposición LU de Schur. Algoritmos "rápidos" y "super-rápidos" para estructuras de Toeplitz, Hankel, Vandermonde y Cauchy. Aplicación a códigos correctores de Reed-Solomon.
(4) Condicionamiento de un sistema lineal. Distribución del número de condicionamiento (tesis de Edelman).
(5) Estabilidad de sistemas triangulares. Métodos iterativos. Gradiente y gradiente conjugado. Método GMRES. Gradiente conjugado precondicionado, GMRES precondicionado. Introducción al método multi-grilla geométrico.
(6) Introducción a las matrices jerárquicas. Definición y aritmética de matrices jerárquicas, aplicaciones a EDP's.

References

[1] S. Börm, L. Grasedyck, W. Hackbusch, Hierarchical Matrices. Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, 2003.
[2] A. Edelman, Eigenvalues and condition numbers of random matrices, MIT PhD Dissertation, 1989.
[3] G.H. Golub, C.F. Van Loan, Matrix computations. Johns Hopkins Univ. Press, 1996.
[4] T. Kailath, A.H. Sayed, *Displacement structure: theory and applications*, SIAM Rev. **37** (1995) 297-386.
[5] V. Olshevsky, M.A. Shokrollahi, *A displacement approach to decoding algebraic codes*, in Fast algorithms for structured matrices: theory and applications, Contemp. Math. **323** (2003) 265-292.
[6] V. Pan, Structured matrices and polynomials. Unified superfast algorithms, Birkhäuser, 2001.
[7] Y. Saad, Iterative methods for sparse linear systems, SIAM 2003.