

TRABAJO DE FIN DE GRADO

GRADO DE
MATEMÁTICAS

Facultad de Matemáticas
Universidad de Barcelona

ANÁLISIS ARMÓNICO

AXEL THOMAS LEONHARDT

Director: Javier Soria
Realizado en: Departamento de Matemática
Aplicada y Análisis. UB.
Barcelona, 24 de junio de 2013

Índice general

1. Introducción	1
2. Series de Fourier	5
2.1. Series ortogonales	5
2.2. El sistema trigonométrico	6
2.3. Completitud	9
2.4. Desigualdad de Bessel y fórmula de Parseval	11
2.5. Operaciones formales de la serie de Fourier	13
2.6. Orden de magnitud de los coeficientes de Fourier	16
2.7. Aplicaciones con Mathematica	19
3. Convergencia de la serie de Fourier	23
3.1. Fórmulas para las sumas parciales	23
3.2. Algunos criterios de convergencia	27
3.3. El fenómeno de Gibbs	41
3.4. Constantes de Lebesgue	45
4. Métodos de sumabilidad	47
4.1. Sumabilidad de series numéricas	47
4.2. Sumabilidad (C, k)	49
4.3. Sumabilidad Abel	56
4.4. Teoremas Tauberianos	57

4.5. Sumabilidad de $S[f]$ y de $\tilde{S}[f]$	59
4.6. Medias $(C, 1)$ de $S[f]$ y de $\tilde{S}[f]$	63
4.7. Sumabilidad Abel de $S[f]$ y de $\tilde{S}[f]$	66
4.8. Convergencia en norma	70
4.9. Funciones trigonométricas especiales	73
5. Transformada de Fourier	77
5.1. Teoría básica en $L^1(\mathbb{R}^n)$	77
5.2. Problema de inversión	81
5.3. Teoría en $L^2(\mathbb{R}^n)$	92
Bibliografía	95

Capítulo 1

Introducción

El siguiente proyecto es el resultado de varios meses de trabajo duro, intensas lecturas, y un esfuerzo por escribir demostraciones claras de los teoremas fundamentales del análisis de Fourier. Cuando comencé solo quería profundizar en mis conocimientos sobre el análisis matemático, pero no tenía objetivos específicos. Al poco tiempo supe que finalmente podría ver qué hacen los matemáticos, cómo eligen sus temas de investigación, y prepararme así para un posible futuro en el mundo científico. Ha sido también una fascinante aventura por la teoría del análisis armónico, una aventura que no ha terminado todavía para mí. A pesar de que este no ha sido un proyecto de investigación - no he incluido material original aquí-, los obstáculos que uno debe superar para finalmente comprender una larga y tediosa demostración me han hecho comprender las viscosidades que los matemáticos enfrentan cada día en su trabajo. He buscado ayuda de profesores, amigos, libros e internet; he tenido problemas que pude resolver después de varios días de pensarlos y ha habido otros en los que no he tenido la misma suerte; me he encontrado tan inmerso en este trabajo que he adquirido la costumbre de leer las *Series Trigonómicas* de Zygmund en el Metro, haciendo caso omiso de su ingente peso y tamaño. La totalidad de la experiencia, incluyendo tanto los momentos frustrantes como los más gratificantes, es lo que le ha dado el mayor sentido a este trabajo, más aún que el producto final que aquí presento. Ha sido un proceso excepcional, en donde mis habilidades para resolver y detectar problemas nuevos, mi conocimiento del análisis armónico, y mi interés por las matemáticas y la ciencia han adquirido una profundidad sustancial. Todo esto no habría sido posible sin el apoyo de mi familia y mis amigos que, aunque muy lejos, siempre han estado en los momentos difíciles - Mamá y Papá, los quiero mucho!!!-. A lo largo de estos años ha habido varios profesores a quienes también quisiera agradecer: María Jesús Carro y Joan Cerdà son dos de los que más me han marcado en este sendero del análisis, y que me han dado innumerables consejos para enfrentar muchos de los problemas que han surgido en mis lecturas. Mi tutor, Javier Soria, ha sido el *deus ex machina* de las interminables dificultades que he tenido que superar: cuando no podía resolver un problema, él me daba una nueva idea sobre la cual reflexionar; cuando había alguna falla en un libro, él rápidamente detectaba el error; pero por sobre todo, me explicó muchos de los conceptos esenciales y motivaciones que se esconden detrás de los teoremas y demostraciones de carácter más técnico.

Este trabajo consiste de cuatro capítulos. El primero presenta los conceptos básicos que luego serán estudiados en mayor profundidad: el sistema trigonométrico y sus propiedades elementales. Algunos de los conceptos más importantes son la conexión con espacios de Hilbert - la demostración de completitud es una sencilla consecuencia de los resultados del análisis funcional-, la manipulación formal de las series de Fourier y el teorema de Riemann-Lebesgue, el cual será esencial para

probar resultados de los siguientes capítulos. Uno de los problemas más importantes del análisis armónico se expone aquí: ¿Existen condiciones necesarias y suficientes sobre una función para asegurar que su serie de Fourier converge? Esta es una pregunta abierta a día de hoy, aunque se han hecho avances significativos en el último siglo. El siguiente capítulo trata sobre la convergencia de la serie: estudiamos el núcleo de Dirichlet, la convolución, y algunos criterios que nos dan condiciones suficientes para la convergencia. Uno de los problemas que he encontrado aquí, ha sido el teorema de Dirichlet-Jordan. No quería dejar el teorema sin demostración (hasta desarrollar técnicas posteriores), y he tenido que recorrer un camino largo para hacerlo, teniendo que recordar propiedades de las funciones de variación acotada, una versión poco común del teorema del valor medio, y un estudio más profundo del comportamiento del núcleo de Dirichlet. Aunque fue un camino tedioso, esta demostración ha sido un punto de inflexión: el esfuerzo para llevarla a cabo ha hecho que todas las demostraciones difíciles de los siguientes capítulos parezcan más accesibles. Hacia el final del capítulo encontramos una sección sobre el fenómeno de Gibbs, el cual explica el comportamiento de las sumas parciales de la serie de Fourier cerca de los puntos de discontinuidad. En el capítulo 4 nos centramos en los *métodos de sumabilidad*, lo cual nos da generalizaciones del concepto de convergencia. Una de las ideas que observaremos es que a pesar de que éstas convergencias no implican la convergencia ordinaria, a menudo podemos encontrar una hipótesis extra que sí nos proveerá de este tipo de resultados: los teoremas Tauberianos. Presentamos también varios núcleos de sumabilidad, como el de Fejér, que nos proveen de herramientas extremadamente útiles para estudiar la convergencia de la serie de Fourier. Un ejemplo interesante de esto es el teorema de Dirichlet-Jordan: ahora podemos probarlo en solo tres líneas. El capítulo termina con un pequeño estudio de la convergencia en norma y algunas funciones trigonométricas especiales. El último capítulo trata sobre la transformada de Fourier en espacios euclídeos. Se estudia el teorema de Riemann-Lebesgue, se presenta el método de sumabilidad Abel, y procedemos a resolver el *problema de inversión* tanto en el espacio L^1 , como en el L^2 . El capítulo concluye extendiendo el espacio sobre el cual el problema de inversión tiene solución.

The following project is the outcome of several months of hard work, thorough reading, and an honest attempt to write clear proofs of some of the fundamental theorems in Fourier analysis. I had no specific objectives when I started writing other than learning more within the mathematical analysis area. Nevertheless, it soon became clear that I could finally peek at what mathematicians do, how and why they choose certain research topics, and start preparing myself for a possible research career. It has also come to be a fascinating journey through the wonderful theory of harmonic analysis, and for my part, it is certainly not over. Even though this was not a research project in itself -no original material is presented here- the dead ends that one needs to overcome to finally understand a long proof have made me grasp the feeling of research oriented work. I have sought for specific advice from teachers, friends, books and the Internet; I have had problems which I could finally solve after many days of serious thinking and I have had problems which I could *not* solve after successive failed attempts; I even became so involved in the project that I acquired the habit of reading Zygmund's *Trigonometric series* on the subway, and that's a heavy book to carry around! The whole experience altogether, including both the frustrating moments and the more rewarding ones, is what I take home at the end of the day, even more than the final written output. It has been an exceptional process, where my skills for solving unexpected problems, my knowledge of harmonic analysis and my passion for mathematics have acquired a substantial depth. Of course, all of this wouldn't have been possible without the support of my family and friends, who although far away, have always been there for me -Mamá y Papá, los quiero mucho!!!-. There have been several professors that helped me along these years that I would like to thank as well: María Jesús Carro and Joan Cerdà are for certain two of the most inspiring teachers I have had, and needless to say, they have given me great suggestions to solve some of the problems I have encountered in my readings. My tutor, Javier Soria, has been the *deus ex machina* of my seemingly endless struggles: whenever I couldn't solve a problem, he would give me a new insight to think about; whenever there was a mistake in a book, he would quickly spot out the flaw; but above all he explained me many of the concepts and motivations behind the more analytical nature of some theorems and proofs, and that's priceless advice.

As to the project itself, it consists of four chapters. The first one concerns the basic concepts which will be later studied in more detail: the trigonometric system is presented and the elementary properties are proven. Some of the key concepts here are the relation to Hilbert spaces -the proof of completeness of the system becomes an easy consequence of functional analysis results-, the formal manipulation of Fourier series, and the Riemann-Lebesgue theorem, which is essential to prove several theorems in latter chapters. One of the main problems of harmonic analysis is presented as well: are there necessary and sufficient conditions to impose on a function so that its Fourier series converges? This question is still unresolved, but many important results, such as Carleson's theorem, have been discovered in the last century. The next chapter deals with the convergence problem: we study properties of the Dirichlet kernel, the convolution, and a few criteria that provide us with sufficient conditions for convergence. One of the problems I came up with in this chapter was the Dirichlet-Jordan theorem. I didn't want to leave the theorem unproven until the summability techniques were developed, so I went on an extremely long way to prove it, having to use properties of bounded variation functions, a rare version of the mean value theorem, and a further study of Dirichlet kernel's behaviour. Although I became quite frustrated at times, this proof was a turning point: the effort invested in the process had a remarkable effect on my confidence for reading further complicated theorems. Towards the end of the chapter we find a section on Gibb's phenomenon, which explains the behaviour of Fourier series near isolated discontinuity points. In Chapter 4 we focus on the so-called *summability methods*. This is basically a generalization of the notion of convergence. One of the main ideas is that even though these kind of more general convergences

do not imply the ordinary one, we can often find an extra hypothesis that will do so, giving rise to the *Tauberian theorems*. We introduce some summability kernels such as the Fejér kernel, which provide us with remarkable tools for proving convergence results of Fourier series. A neat example of this is, of course, the Dirichlet-Jordan theorem: we now have a three-line proof for it. The chapter ends with a small study of convergence in norm and some special trigonometric functions. The last chapter deals with the Fourier transform on euclidean spaces. We revisit basic results such as the Riemann-Lebesgue theorem, introduce the Abel summability method, and proceed to solve the *inversion problem* both in L^1 and L^2 spaces. We conclude the chapter showing that the inversion problem can be extended to other spaces.

Capítulo 2

Series de Fourier

1. *Series ortogonales.* Coeficientes asociados a un sistema ortogonal.
2. *El sistema trigonométrico.* Definición y propiedades elementales.
3. *Completitud.* Unicidad de los coeficientes de Fourier.
4. *Desigualdad de Bessel y fórmula de Parseval.*
5. *Operaciones formales de la serie de Fourier.* Diferenciación e integración.
6. *Orden de magnitud de los coeficientes de Fourier.* Teorema de Riemann-Lebesgue. Funciones Lipschitz.
7. *Aplicaciones con Mathematica.*

2.1. Series ortogonales

La principal fuente bibliográfica de esta sección será [16].

Definición 2.1. *Un sistema de funciones no nulas en casi todo punto, reales o complejas, $\{\Phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definidas sobre un intervalo (a, b) se dice ortogonal si, para todo $n, m \in \mathbb{N}$:*

$$\int_a^b \Phi_m(x) \overline{\Phi_n(x)} dx = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n \\ \lambda_m > 0, & \text{si } m = n. \end{cases}$$

En particular se tiene que $\Phi_n \in L^2(a, b)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definición 2.2. *Un sistema ortogonal se dice ortonormal si $\lambda_i = 1$, para todo $i \in \mathbb{N}$.*

Observación 2.3. *Dado $\{\Phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ortogonal, obtenemos el sistema ortonormal $\{\frac{\Phi_n}{\sqrt{\lambda_n}}\}_{n \in \mathbb{N}}$.*

Un aspecto importante a tener en cuenta es el siguiente argumento informal. Supongamos que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \Phi_k(x)$ converge a una función $f(x)$ en (a, b) para ciertas constantes c_k , $k \in \mathbb{N}$. Si a la ecuación

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \Phi_k(x) = f(x),$$

la multiplicamos por $\bar{\Phi}_k(x)$ e integramos sobre (a, b) , término por término, obtendremos, gracias a la ortogonalidad

$$c_k = \frac{1}{\lambda_k} \int_a^b f(x) \bar{\Phi}_k(x) dx. \quad (2.1)$$

Este argumento se puede justificar en el caso en que la serie converge en casi todo punto, las sumas parciales están dominadas por una función integrable y cada Φ_k es acotada (aplicando el teorema de la convergencia dominada). En este caso, podemos calcular las constantes c_k , o al menos disponer de esta representación relativamente sencilla. Pero también es natural considerar el problema desde el ángulo opuesto. Supongamos dado el sistema ortogonal, y una función $f(x)$ definida sobre (a, b) . Calculamos entonces las constantes c_k utilizando la expresión anterior. La pregunta entonces es:

¿En qué sentido, y bajo qué condiciones la serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \Phi_k(x)$ representa a nuestra función $f(x)$?

Definición 2.4. *Dado un sistema ortogonal $\{\Phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y una función $f(x)$ definidas sobre un intervalo (a, b) llamamos coeficientes de Fourier a las constantes c_k dadas por la fórmula (2.1), y llamamos serie de Fourier de f a la serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \Phi_k(x)$ asociada.*

A menos que se diga lo contrario, las integrales siempre serán en el sentido de Lebesgue.

Definición 2.5. *Un sistema ortogonal $\{\Phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se dice completo si para cualquier función no nula $\Psi \neq \Phi_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, el sistema $\{\Psi\} \cup \{\Phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ deja de ser ortogonal.*

Observación 2.6. *En un sistema no completo podemos encontrar una función no nula (c.p.t.) Ψ tal que sus coeficientes de Fourier son todos nulos.*

2.2. El sistema trigonométrico

Definición 2.7. [11] *Denotamos por \mathbb{T} al cociente $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, donde $2\pi\mathbb{Z}$ es el grupo de múltiplos enteros de 2π .*

Observemos que hay una identificación natural entre las funciones definidas sobre \mathbb{T} y las funciones 2π -periódicas definidas sobre \mathbb{R} , lo cual nos permite definir las nociones de continuidad, diferenciación, etc., a las cuales estamos habituados. Decimos, por ejemplo, que una función f es integrable sobre \mathbb{T} si la correspondiente función 2π -periódica es integrable sobre el intervalo $(-\pi, \pi)$, y ponemos:

$$\int_{\mathbb{T}} f(t) dt := \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt.$$

2.2. EL SISTEMA TRIGONOMÉTRICO

En otras palabras, consideramos al intervalo $(-\pi, \pi)$ como un modelo de \mathbb{T} y la medida de Lebesgue sobre \mathbb{T} es la restricción de la medida de Lebesgue en \mathbb{R} al intervalo $(-\pi, \pi)$.

Definición 2.8. [11] Denotamos por $L^1(\mathbb{T})$ al espacio de funciones con valores complejos, integrables sobre \mathbb{T} .

Observación 2.9. [11] Si dotamos a $L^1(\mathbb{T})$ con la norma

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)| dt,$$

obtenemos un espacio de Banach. Además podemos definir, como estamos acostumbrados, los correspondientes espacios $L^p(\mathbb{T})$.

Proposición 2.10. [11] Para toda $f \in L^1(\mathbb{T})$ y, para todo $t_0 \in \mathbb{T}$, se tiene que

$$\int_{\mathbb{T}} f(t - t_0) dt = \int_{\mathbb{T}} f(t) dt.$$

Definición 2.11. [16] Definimos el sistema trigonométrico como: $\{e^{ikx}\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

Observación 2.12. [16] Sobre cualquier intervalo de longitud 2π el sistema es ortogonal ya que para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} e^{imx} e^{-inx} dx = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n \\ 2\pi, & \text{si } m = n. \end{cases}$$

Supongamos que tenemos una función $f(x)$ definida sobre el intervalo $(-\pi, \pi)$. Su serie de Fourier será entonces $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$, donde

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt.$$

Para denotar al coeficiente de Fourier c_k a menudo utilizaremos la notación $\hat{f}(k)$, y para denotar la serie de Fourier de f emplearemos $S[f]$, o bien escribiremos $f \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$.

Definición 2.13. [11] Un polinomio trigonométrico sobre \mathbb{T} es una función de la forma

$$P(x) = \sum_{n=-N}^{n=N} a_n e^{inx}.$$

Teorema 2.14. [11] Sean $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Entonces

- (i) $(\widehat{f+g})(n) = \hat{f}(n) + \hat{g}(n)$;
- (ii) $(\widehat{\alpha f})(n) = \alpha \hat{f}(n)$, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$;
- (iii) $\hat{f}(n) = \overline{\hat{f}(-n)}$;
- (iv) si escribimos $f_{\tau}(t) = f(t - \tau)$, $\tau \in \mathbb{T}$, se tiene que $\hat{f}_{\tau}(n) = \hat{f}(n) e^{-in\tau}$;

$$(v) \quad |\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt = \|f\|_{L^1}.$$

Demostración. Para probar (iv), observamos que

$$\hat{f}_\tau(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t - \tau) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi - \tau}^{\pi - \tau} f(t) e^{-in(t + \tau)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} e^{-in\tau} dt = \hat{f}(n) e^{-in\tau}.$$

Las demás se desprenden inmediatamente de la definición de \hat{f} . □

Corolario 2.15. [11] *Supongamos que $f_j \in L^1(\mathbb{T})$, para todo $j \in \mathbb{N}_0$ y que $\lim_{j \rightarrow \infty} \|f_j - f_0\|_{L^1(\mathbb{T})} = 0$. Entonces $\hat{f}_j(n) \rightarrow \hat{f}_0(n)$ uniformemente, para todo $n \in \mathbb{N}_0$.*

Demostración. Utilizando los apartados (i), (ii) y luego (v), del Teorema 2.14, tenemos que

$$|\hat{f}_j(n) - \hat{f}_0(n)| = |\hat{f}_j(n) + \widehat{(-f_0)}(n)| = |(\widehat{f_j - f_0})(n)| \leq \|f_j - f_0\|_{L^1(\mathbb{T})},$$

de lo cual se desprende la convergencia buscada. □

Ejemplo 2.16. [16] *Sean*

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen}(kt) dt, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0,$$

de manera que

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \quad \hat{f}(-k) = \frac{1}{2}(a_k + ib_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (2.2)$$

Ahora reescribimos su serie de Fourier:

$$S[f](x) = \hat{f}(0) + \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{f}(k) e^{ikx} + \hat{f}(-k) e^{-ikx}).$$

Teniendo en cuenta (2.2) y que $b_0 = 0$, reescribimos la serie de la siguiente manera:

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)).$$

Supongamos cierto que si un par de funciones Φ_i, Φ_j son ortonormales entre sí, entonces el par $\Phi_i + \Phi_j, \Phi_i - \Phi_j$ son ortogonales. Entonces es fácil ver que el sistema

$$\left\{ \frac{1}{2}, \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} : k \in \mathbb{N}_0 \right\},$$

es ortogonal (sobre \mathbb{T}). Este último sistema no es otro que

$$\left\{ \frac{1}{2}, \cos(kx), \operatorname{sen}(kx) : k \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Veamos ahora que, efectivamente, $\Phi_i + \Phi_j, \Phi_i - \Phi_j$ son ortogonales, dada la ortonormalidad de Φ_i, Φ_j . Un simple cálculo lo verifica:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\Phi_i(x) + \Phi_j(x))(\bar{\Phi}_i(x) - \bar{\Phi}_j(x)) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_i(x) \bar{\Phi}_i(x) dx - \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_j(x) \bar{\Phi}_j(x) dx = 1 - 1 = 0.$$

El ejemplo anterior nos dice que podemos trabajar tanto en un sistema como en el otro, ya que dados los coeficientes de Fourier en un sistema, obtendremos los del otro mediante un simple cálculo. El sistema que hemos visto aquí se denomina *sistema trigonométrico real*. Si trabajamos con funciones que toman valores reales, será más natural utilizar este sistema ya que los coeficientes serán valores reales, mientras que en el anterior éstos pueden tener parte imaginaria. De aquí en adelante, quedará implícito qué sistema estamos utilizando según la notación de los coeficientes c_k o a_k, b_k .

2.3. Completitud

Teorema 2.17. [16] *El sistema trigonométrico es completo.*

Demostración. Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ tal que sus coeficientes de Fourier a_k, b_k son todos nulos, de manera que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)T(x)dx = 0 \tag{2.3}$$

para todo polinomio trigonométrico $T(x)$. Debemos probar que $f(x) = 0$ (c.p.t.).

En primer lugar supongamos que f es continua y no idénticamente nula. En consecuencia se tiene que existe $x_0 \in (-\pi, \pi)$ y existen $\epsilon, \delta > 0$ tales que $|f(x)| > \epsilon$, para todo $x \in I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. En virtud de la continuidad podemos suponer $f(x) > \epsilon$ en este intervalo, y no nos preocupamos por el caso en que f sea negativa, ya que el razonamiento será análogo. Será suficiente demostrar que existe una sucesión $\{T_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ de polinomios trigonométricos tales que

- (i) $T_n(x) \geq 0$, para todo $x \in I$;
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = \infty$ uniformemente en todo intervalo I' interior a I ;
- (iii) los T_n están uniformemente acotados fuera de I .

Si suponemos que existe $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ con estas propiedades, entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)T_n(x)dx = \int_{(-\pi, \pi) - I} f(x)T_n(x)dx + \int_I f(x)T_n(x)dx,$$

y por la condición (i) obtenemos

$$\int_I f(x)T_n(x)dx \geq \epsilon |I'| \min_{x \in I'} T_n(x).$$

Ahora, por la condición (ii),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon |I'| \min_{x \in I'} T_n(x) = \infty.$$

Como la integral $\int_{(-\pi, \pi) - I} f(x)T_n(x)dx$ es acotada en virtud de (iii), tenemos que (2.3) es falso con $T = T_n$, para n suficientemente grande.

Veamos que efectivamente existe una sucesión de este tipo, y tendremos el resultado para f continua. Sean

- $t(x) = 1 + \cos(x - x_0) - \cos(\delta)$;
- $T_n(x) = t(x)^n$.

Tenemos que

- si $x \in I \Rightarrow 1 + \cos(x - x_0) - \cos(\delta) > 1 + \cos(\delta) - \cos(\delta) = 1$;
- si $x \notin I \Rightarrow 1 + \cos(x - x_0) - \cos(\delta) \leq 1 + \cos(\delta) - \cos(\delta) = 1$.

Es claro entonces que las condiciones (i), (ii) y (iii) se cumplen, utilizando en la segunda que el intervalo es interior para conseguir la uniformidad.

Supongamos ahora que f es integrable, no necesariamente continua, y sea $F(x) = \int_{-\pi}^x f(t)dt$. La condición $a_0 = 0$ implica que $F(x)$ es 2π -periódica ya que

$$F(x + 2\pi) - F(x) = \int_x^{x+2\pi} f(t)dt = 0.$$

Sean ahora A_0, A_1, B_1, \dots los coeficientes de F e integremos por partes las integrales

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos(nx) dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \operatorname{sen}(nx) dx,$$

para cada $n \in \mathbb{N}_0$. Debido a la periodicidad de F , los términos integrados nos quedan iguales a cero. Veámoslo para la primera integral:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos(nx) dx &= F(x) \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} F'(x) \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} dx \\ &= 0 - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} dx = -\frac{2\pi b_n}{n} = 0. \end{aligned}$$

Así, deducimos que $A_k = B_k = 0$, para todo $k \geq 1$. Si, por otro lado, ponemos $\{A'_0, A'_k, B'_k : k \geq 1\}$ los coeficientes de $F(x) - A_0$, obtenemos que, claramente, $A'_k = B'_k = 0$, para todo $k \geq 1$, ya que si $k \geq 1$, se tiene:

- $A'_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (F - A_0) \cos(kx) dx = -\frac{A_0}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx = -\frac{A_0}{2k\pi} (\operatorname{sen}(k\pi) + \operatorname{sen}(k\pi)) = 0$;
- $B'_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (F - A_0) \operatorname{sen}(kx) dx = -\frac{A_0}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(kx) dx = -\frac{A_0}{2k\pi} (\cos(k\pi) - \cos(k\pi)) = 0$.

Por último concluimos que $F(x) - A_0 = 0$ (c.p.t.) ya que esta función es continua y sus coeficientes son nulos. De esta manera, $F(x)$ es constante y nuestra función f ha de ser nula. \square

Este razonamiento nos permite deducir dos corolarios importantes.

Corolario 2.18. [16] Si f_1 y f_2 tienen la misma serie de Fourier, entonces $f_1 = f_2$ (c.p.t.).

Corolario 2.19. [16] Si $f(x)$ es continua y $S[f]$ converge uniformemente, su suma es $f(x)$.

2.4. Desigualdad de Bessel y fórmula de Parseval

Observamos que $L^2(\mathbb{T})$ es un espacio de Hilbert con

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\bar{g}(t)dt,$$

y por lo tanto podemos aplicar resultados elementales del análisis funcional. Es claro que las definiciones de ortogonalidad definidas en este capítulo coinciden con la ortogonalidad de este último producto interno.

Proposición 2.20. [11] Sea $\{\Phi_n\}$ un sistema ortogonal en un espacio de Hilbert H , y sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ una sucesión de números complejos tales que $\sum_{n=1}^N |a_n|^2 < \infty$. Entonces $\sum_{n=1}^N a_n \Phi_n$ converge en H .

Demostración. Como H es completo, es suficiente verificar que la sucesión de sumas parciales $S_N = \sum_{n=1}^N a_n \Phi_n$ es de Cauchy. Sea $N > M$, entonces

$$\|S_N - S_M\|^2 = \left\| \sum_{n=M+1}^N a_n \Phi_n \right\|^2 = \sum_{n=M+1}^N |a_n|^2.$$

Esta última suma ha de tender a cero en virtud de la convergencia de $\sum_{n=1}^N |a_n|^2$. □

Proposición 2.21. [11] Sea H un espacio de Hilbert. Sea $\{\phi_n\}_{n=1}^N$ un sistema ortonormal en H . Para toda $f \in H$ escribimos $a_n = \langle f, \phi_n \rangle$. Entonces se tiene que

$$0 \leq \left\| f - \sum_{n=1}^N a_n \phi_n \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^N |a_n|^2.$$

Demostración. La desigualdad se desprende de lo siguiente:

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{n=1}^N a_n \Phi_n \right\|^2 &= \left\langle f - \sum_{n=1}^N a_n \Phi_n, f - \sum_{n=1}^N a_n \Phi_n \right\rangle \\ &= \|f\|^2 - \sum_{n=1}^N \bar{a}_n \langle f, \Phi_n \rangle - \sum_{n=1}^N a_n \langle \Phi_n, f \rangle + \sum_{n=1}^N |a_n|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^N |a_n|^2. \end{aligned}$$

□

Corolario 2.22 (Desigualdad de Bessel [11]). *Sea H un espacio de Hilbert y $\{\Phi_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ un sistema ortonormal en H . Si para todo $f \in H$ ponemos $a_n = \langle f, \Phi_n \rangle$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \leq \|f\|^2$.*

Proposición 2.23. [11] *Sea $\{\Phi_n\}$ un sistema ortonormal en H . Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\{\Phi_n\}$ es completo;

(ii) para toda $f \in H$, se tiene $\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \Phi_n \rangle|^2$;

(iii) $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \Phi_n \rangle \Phi_n$.

Demostración. Que (ii) y (iii) son equivalentes se sigue de la proposición anterior. Para ver (ii) \Rightarrow (i) supongamos que f es ortogonal a $\{\Phi_n\}$. Por el apartado (ii), tenemos que $\|f\| = 0$, y por lo tanto, $f = 0$. Por último demostramos (i) \Rightarrow (iii). De la Proposición 2.20 y la desigualdad de Bessel se sigue que $\sum_{n=1}^N \langle f, \Phi_n \rangle \Phi_n$ converge en H . Si denotamos $g = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \Phi_n \rangle \Phi_n$, tenemos que $\langle f, \Phi_n \rangle = \langle g, \Phi_n \rangle$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, con lo cual $f - g$ es ortogonal al sistema $\{\Phi_n\}$. Como el sistema es completo concluimos que $f = g$. \square

El apartado (iii) se conoce como la fórmula de Parseval, y nos indica que en el caso $H = L^2(\mathbb{T})$, considerando el sistema trigonométrico, la serie de Fourier de una función en este espacio converge a ella, ya que hemos probado la completitud del sistema.

Ejemplo 2.24. *Sea $\phi_0(x)$ la función de periodo 1 igual a 1 en $(0, 1/2)$ y a -1 en $(1/2, 1)$, y sea $\phi_0(0) = \phi_0(1/2) = 0$. Sea $\phi_n(x) = \phi_0(2^n x)$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$.*

Supongamos que $n \neq m$. Entonces el dominio de la función $\phi_n(x)\phi_m(x)$ estará dividida en 2^{n+m} intervalos de igual longitud y tomará el valor 1 en la mitad de ellos, y el valor -1 en la otra mitad. Se deduce entonces que

$$\int_0^1 \phi_n(x)\phi_m(x)dx = 0.$$

Por otro lado, si $n = m$, es inmediato que

$$\int_0^1 \phi_n(x)\phi_m(x)dx = 1.$$

Esto nos dice que el sistema es ortonormal. Sin embargo no es completo. Para verlo utilizamos el apartado (ii) de la Proposición 2.23. Considerando la función constante $f = 1$, tenemos que

$$\|f\|^2 = 1 \neq 0 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^1 \phi_k(x)dx \right|^2.$$

2.5. Operaciones formales de la serie de Fourier

Teorema 2.25. [16] Sean $n \in \mathbb{N}_0$, $t \in \mathbb{R}$ y $S[f] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$. Entonces:

$$(i) \overline{f(x)} \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{c}_k e^{-ikx} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{c}_{-k} e^{ikx};$$

$$(ii) f(nx) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{iknx}, \quad \forall n \neq 0;$$

$$(iii) e^{inx} f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{i(n+k)x} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{k-n} e^{ikx};$$

$$(iv) f(x+t) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikt} e^{ikx};$$

$$(v) \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{n-1} f\left(\frac{x}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{kn} e^{ikx}, \quad \forall n \neq 0.$$

Demostración. (i) y (iii) Son inmediatos utilizando la definición.

Para ver (ii), primero supongamos que $n > 0$. Observamos que si $\mu \in \mathbb{Z}$

$$\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} e^{2\pi\mu mi/n} = \begin{cases} 1, & \text{si } \frac{\mu}{n} \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{si no.} \end{cases} \quad (2.4)$$

En el caso $\frac{\mu}{n} \in \mathbb{Z}$ se verifica observando que $e^{2\pi\mu mi/n} = \cos(2k_0\pi) + i \sin(2k_0\pi) = 1$, con $k_0 = \frac{m\mu}{n} \in \mathbb{Z}$. En caso contrario, utilizamos la expresión de la serie geométrica correspondiente para verificar la igualdad. Ahora podemos razonar de la siguiente manera:

$$\int_0^{2\pi} f(nt) e^{-i\mu t} dt = \frac{1}{n} \int_0^{2\pi n} f(t) e^{-i\mu t/n} dt = \int_0^{2\pi} f(t) e^{-i\mu t/n} \left(\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} e^{-2\pi i m \mu/n} \right) dt.$$

En la primer igualdad hemos hecho un sencillo cambio de variables. En la segunda utilizamos la linealidad de la integral, sucesivos cambios de variables para trasladar el intervalo de las integrales al $(0, 2\pi)$, y el hecho de que f es 2π -periódica. Notando que la última expresión es $2\pi c_k$ si $\frac{\mu}{n} = k \in \mathbb{Z}$ y 0 en caso contrario, obtenemos el resultado buscado. El caso $n < 0$ se reduce al anterior ya que

$$f(-x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-ikx}.$$

Tenemos que (iv) sigue de lo siguiente:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t+u) e^{-ikt} dt = e^{iku} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+u) e^{-ik(t+u)} dt = 2\pi e^{iku} c_k.$$

Por último, (v) se deduce de (iv) y de (2.4). □

Definición 2.26. [11] Sean $f, g \in L^1(\mathbb{T})$, definimos la convolución $f * g$ de estas funciones:

$$(f * g)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t - \tau)g(\tau)d\tau. \quad (2.5)$$

La expresión está bien definida para casi todo t , como veremos a continuación:

Teorema 2.27. [11] Sean $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Para casi todo t la función $f(t - \tau)g(\tau)$ es integrable (como función de τ) en \mathbb{T} , y $(f * g) \in L^1(\mathbb{T})$. Por otro lado tenemos que

$$\|(f * g)\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1. \quad (2.6)$$

Además,

$$\widehat{f * g}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \quad (2.7)$$

Demostración. Observemos que $f_\tau(t)$ y $g(t)$, consideradas como funciones de dos variables (t, τ) , son claramente medibles, y por lo tanto también lo es la función $F(t, \tau) = f(t - \tau)g(\tau)$.

Para casi todo τ , $F(t, \tau)$ es un múltiplo constante de f_τ , por ende integrable, y se tiene

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(t, \tau)| dt \right) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(\tau)| \cdot \|f\|_1 d\tau = \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Por el teorema de Fubini, $f(t - \tau)g(\tau)$ es integrable ($\tau - c.p.t.$) como función de t , y tenemos

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |(f * g)(t)| dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t, \tau) d\tau \right| dt \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(t, \tau)| dt d\tau = \|f\|_1 \|g\|_1,$$

con lo que se prueba (2.6). Para ver (2.7) escribimos

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f * g)(t) e^{-int} dt = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t - \tau) e^{-in(t - \tau)} g(\tau) e^{-in\tau} dt d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\tau) e^{-in\tau} d\tau = \hat{f}(n)\hat{g}(n). \end{aligned}$$

Hemos utilizado el teorema de Fubini para cambiar el orden de las integrales, y un sencillo cambio de variables en la tercera igualdad. □

Teorema 2.28. [11] Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ y supongamos que $\hat{f}(0) = 0$. Si definimos

$$F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau,$$

tenemos que F es continua, 2π -periódica, y que

$$\hat{F}(n) = \frac{1}{in} \hat{f}(n), \quad \text{para todo } n > 0.$$

2.5. OPERACIONES FORMALES DE LA SERIE DE FOURIER

Demostración. La continuidad de F es inmediata de la definición, mientras que la periodicidad sigue de:

$$F(t) - F(t + 2\pi) = \int_t^{t+2\pi} f(\tau) d\tau = 2\pi \hat{f}(0) = 0.$$

Por otro lado,

$$\hat{F}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t) e^{-int} dt = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F'(t) \frac{e^{-int}}{-in} dt = \frac{1}{in} \hat{f}(n).$$

Obsérvese que en la segunda igualdad hemos hecho integración por partes, y hemos utilizado que

$$u(t)v(t) \Big|_{-\pi}^{\pi} = F(t) \frac{e^{-int}}{-int} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

debido a la periodicidad de ambas funciones. □

A continuación deducimos dos corolarios útiles.

Corolario 2.29. [16] Denotamos por $S'[f]$ al resultado de derivar término a término $S[f]$. Si $f(x)$ es una k -ésima integral, entonces $S^{(k)}[f] = S[f^{(k)}]$

Demostración. En primer lugar, como f es periódica, tenemos que

$$0 = f(t) - f(t + 2\pi) = \int_t^{t+2\pi} f'(\tau) d\tau = 2\pi c'_0,$$

con lo cual $c'_0 = 0$, donde c'_k son los coeficientes de f' . Aplicando el Teorema 2.28, obtenemos $c_k = \frac{c'_k}{ik}$, y lo que se tiene es que $S'[f] = S[f']$. Es inmediato obtener el enunciado del corolario a partir de esta igualdad. □

Corolario 2.30. [16] Si $S[f] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ y F es una primitiva de f , entonces

$$F(x) - c_0 x \sim C + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{c_k}{ik} e^{ikx},$$

donde C es una constante de integración.

Demostración. Como f es periódica, es claro que F es periódica si, y sólo si, $c_0 = 0$.

Si $c_0 = 0$, $S[f]$ se obtiene integrando término a término y tenemos

$$F(x) \sim C + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{c_k}{ik} e^{ikx}, \tag{2.8}$$

donde C es una constante de integración.

Por otro lado, si $c_0 \neq 0$, observamos que

$$(\widehat{f - c_0})(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - c_0) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c_0 dx = c_0 - c_0 = 0,$$

y como $(\widehat{f - c_0})(k) = c_k$ para $k \neq 0$, se tiene que $S[f - c_0](x) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} c_k e^{ikx}$. Aplicando (2.8) a $f - c_0$, obtenemos

$$F(x) - c_0 x \sim C + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{c_k}{ik} e^{ikx}.$$

□

2.6. Orden de magnitud de los coeficientes de Fourier

Definición 2.31. [16] Sea f definida sobre un intervalo cerrado I . Definimos el módulo de continuidad de f de la siguiente manera:

$$w(\delta) := \sup\{|f(x_1) - f(x_2)| : x_1, x_2 \in I, |x_1 - x_2| < \delta\}.$$

Definición 2.32. [16] Si $w(\delta) \leq C\delta^\alpha$ para alguna constante C , diremos que f satisface la condición de Lipschitz de orden α y lo denotaremos por $f \in \Lambda_\alpha$.

Observación 2.33. [16] Sólo nos interesará el caso en el que $0 < \alpha \leq 1$. Si $\alpha > 1$, entonces

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{w(\delta)}{\delta} = 0.$$

Por lo tanto, $f'(x) = 0$ y la función es constante.

Definición 2.34. [16] Definimos el módulo de continuidad de orden p como

$$w_p(f; \delta) = w_p(\delta) = \sup_{0 \leq s \leq \delta} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+s) - f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Proposición 2.35. [16] Los coeficientes de Fourier c_k con $k \neq 0$ de una función f satisfacen la desigualdad siguiente:

$$|c_k| \leq \frac{1}{2} w_1 \left(\frac{\pi}{|k|} \right).$$

Demostración. Tenemos que

$$2\pi c_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = - \int_{-\pi}^{\pi} f \left(x + \frac{\pi}{k} \right) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f(x) - f \left(x + \frac{\pi}{k} \right) \right\} e^{-ikx} dx. \quad (2.9)$$

En la segunda igualdad hemos utilizado la identidad de Euler $e^{i\pi} = -1$, un sencillo cambio de variables y la periodicidad del producto de las funciones. En la tercera igualdad hemos tomado la media de las dos integrales anteriores. De (2.9) deducimos

$$|c_k| \leq \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - f \left(x + \frac{\pi}{k} \right) \right| dx.$$

Como la parte derecha de la desigualdad no excede $\frac{1}{2}w_1\left(\frac{\pi}{|k|}\right)$, concluimos la demostración. \square

Será útil disponer del resultado de densidad de las continuas en $L^p(\mathbb{T})$. Esto se sigue del siguiente Lema.

Lema 2.36. [10] $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, el espacio de las funciones continuas con soporte compacto, es denso en $L^1(\mathbb{R}^n)$. Esto es, si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces para todo $\epsilon > 0$, existe $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|f - g\|_1 < \epsilon.$$

Demostración. En primer lugar observamos que

$$|f - f\chi_{B_R(0)}| \leq |f|,$$

y que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} f\chi_{B_R(0)} = f.$$

Por el teorema de la convergencia dominada obtenemos

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \|f - f\chi_{B_R(0)}\|_1 = 0.$$

De esta manera, nos basta probar el resultado para f con soporte compacto, ya que si

$$\|f - f\chi_{B_R(0)}\|_1 < \epsilon/2,$$

y

$$\|f\chi_{B_R(0)} - g\|_1 < \epsilon/2,$$

entonces tendríamos que

$$\|f - g\|_1 \leq \|f - f\chi_{B_R(0)}\|_1 + \|f\chi_{B_R(0)} - g\|_1 < \epsilon.$$

Descomponiendo $f = f^+ - f^-$, también podemos suponer que f es positiva. Sea entonces S_n una sucesión creciente de funciones simples, positivas, de soporte compacto, y que converge puntualmente a f . Es claro que, por el Teorema de la convergencia dominada, esta sucesión converge en la norma L^1 . Observando que para todo $n \in \mathbb{N}_0$, S_n es una combinación lineal finita de funciones características, será suficiente probar el resultado para χ_A , con $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible y acotado.

Dado $\epsilon > 0$, por la regularidad de la medida de Lebesgue, existen un conjunto abierto G y uno compacto K , tales que $K \subset A \subset G$ y $|G \setminus K| < \epsilon$. Sea $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ la siguiente función de Urysohn:

$$g(x) = \frac{d(x, G^c)}{d(x, K) + d(x, G^c)},$$

donde $d(\cdot, F) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es la función distancia al conjunto F . Es claro que si F es cerrado, $d(\cdot, F)$ es continua, por lo cual g es continua. Además, $g = 1$ en K , $g = 0$ en G^c , y $0 \leq g \leq 1$. Debido a esta construcción obtenemos

$$\|\chi_A - g\|_1 = \int_{G \setminus K} |\chi_A - g| dx \leq |G \setminus K| < \epsilon,$$

lo cual prueba el resultado. \square

La siguiente proposición también será de utilidad para probar el resultado fundamental de esta sección.

Proposición 2.37. [16] *Si $f \in L^p(\mathbb{T})$, con $1 \leq p < \infty$, entonces*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} = 0.$$

Demostración. Utilizamos la notación $f_{-t}(x) := f(x+t)$. Dado $\epsilon > 0$ tomamos una función continua g como en el Lema 2.36 y aplicando la desigualdad de Minkowski se tiene

$$\|f_{-t} - f\|_p \leq \|f_{-t} - g_{-t}\|_p + \|g - g_{-t}\|_p + \|g - f\|_p \leq 3\epsilon,$$

para t suficientemente pequeño. □

Esta proposición nos dice que la traslación es continua, en el sentido que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|\tau_t f - f\|_p = 0.$$

Además de ser importante para demostrar el último teorema de esta sección (Riemann-Lebesgue), la continuidad de la traslación nos permite demostrar de manera sencilla el siguiente resultado.

Corolario 2.38. *Sean $f \in L^p(\mathbb{T})$, $g \in L^{p'}(\mathbb{T})$, con $1/p + 1/p' = 1$, y $1 \leq p < \infty$. Entonces $f * g$ es una función continua.*

Demostración. Para probar la continuidad debemos verificar que

$$\lim_{t \rightarrow 0} |f * g(x+t) - f * g(x)| = 0.$$

En primer lugar,

$$\begin{aligned} |f * g(x+t) - f * g(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(y) f(x+t-y) dy - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(y) f(x-y) dy \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(y) (f(x+t-y) - f(x-y)) dy \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |g(y)| |f(x+t-y) - f(x-y)| dy. \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Hölder, obtenemos

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |g(y)| |f(x+t-y) - f(x-y)| dy \leq \|g\|_{p'} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(x-y+t) - f(x-y)|^p dy \right)^{1/p}. \quad (2.10)$$

Haciendo un sencillo cambio de variables, es claro que

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(x-y+t) - f(x-y)|^p dy\right)^{1/p} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(z+t) - f(z)|^p dz\right)^{1/p} = \|\tau_t f - f\|_p,$$

y el resultado es inmediato aplicando la continuidad de la traslación. \square

Teorema 2.39 (Riemann-Lebesgue [16]). *Los coeficientes de Fourier $\hat{f}(k)$ de una función integrable f cumplen lo siguiente:*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{f}(k) = 0.$$

Demostración. El resultado se deduce de la Proposición 2.35 y del hecho de que, en virtud de la proposición anterior,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} w_1(\delta) = 0.$$

\square

Ejemplo 2.40. *Sea E un conjunto medible de $(0, 2\pi)$ y sea $\{\alpha_n\}_n$ cualquier sucesión de números reales. Probaremos a continuación que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \cos^2(nx + \alpha_n) dx = \frac{1}{2}|E|.$$

Aplicando identidades trigonométricas elementales se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \cos^2(nx + \alpha_n) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2nx) \cos(2\alpha_n) - \frac{1}{2} \sin(2nx) \sin(2\alpha_n) \right) dx.$$

Ahora, aplicando el teorema de Riemann-Lebesgue, cuando pasamos al límite, obtenemos $\frac{1}{2}|E|$.

2.7. Aplicaciones con Mathematica

Definamos la función `Fourierseriesnorma` que nos calculará los coeficientes a_k y b_k , de la función f , hasta $k = n$. También nos dará la norma de la aproximación, la norma de f , y un gráfico de ambas.

```
Fourierseriesnorma[f_, n_, c_, d_] :=
Module[{a, b, C, g},
a[j_] := a[j] =
Simplify[Integrate[f Cos[j t], {t, c, d}],
Assumptions ->Element[j, Integers]]/Pi;
b[j_] :=
b[j] = Simplify[Integrate[f Sin[j t], {t, c, d}],
Assumptions ->Element[j, Integers]]/Pi;
C[0] = a[0]/2; C[j_] := (I a[j] + b[j])/(2 I);
Print["a[j] = ", Table[a[j], {j, 0, n}], "; a[j]= ", a[j]];
Print["b[j] = ", Table[b[j], {j, 1, n}], "; b[j]= ", b[j]];
Print["Norm coefficients = ",
Simplify[N[Sqrt[Sum[Abs[C[j]] ^ 2, {j, -n, n}]]], "; L2-norm = ",
```

```
Sqrt[Integrate[f ^ 2, {t, c, d}]/(2 Pi)], "= " ,
N[Sqrt[Integrate[f ^ 2, {t, c, d}]/(2 Pi)]];
g = a[0]/2 + Sum[a[j] Cos[j t] + b[j] Sin[j t], {j, 1, n}];
Print["Fourier series = ", g];
Plot[{f, g}, {t, c, d}]
]
```

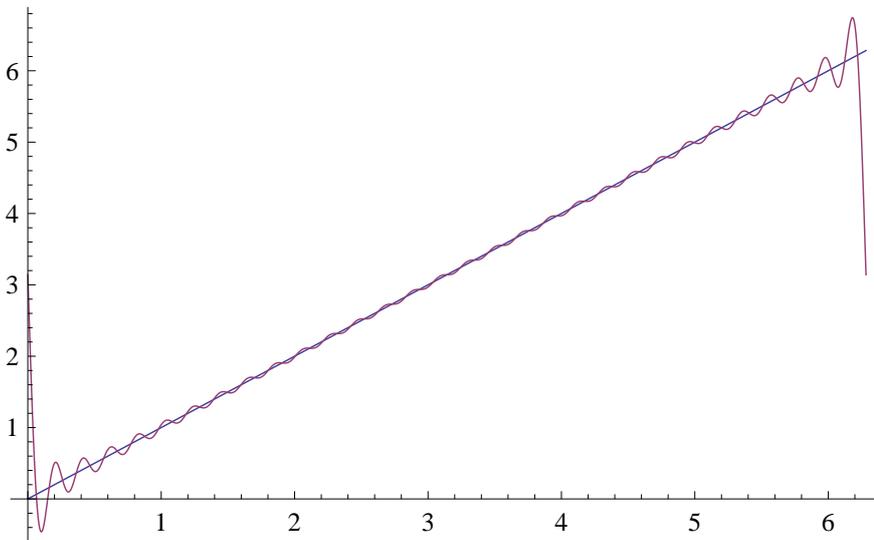
Ilustramos la utilidad de `Fourierseriesnorma` con unos ejemplos básicos.

Ejemplo 2.41. *Calculamos los coeficientes de $f(t) = t$, hasta $n = 30$, en el intervalo $(0, 2\pi)$.*

```
Fourierseriesnorma[t, 30, 0, 2 Pi]
```

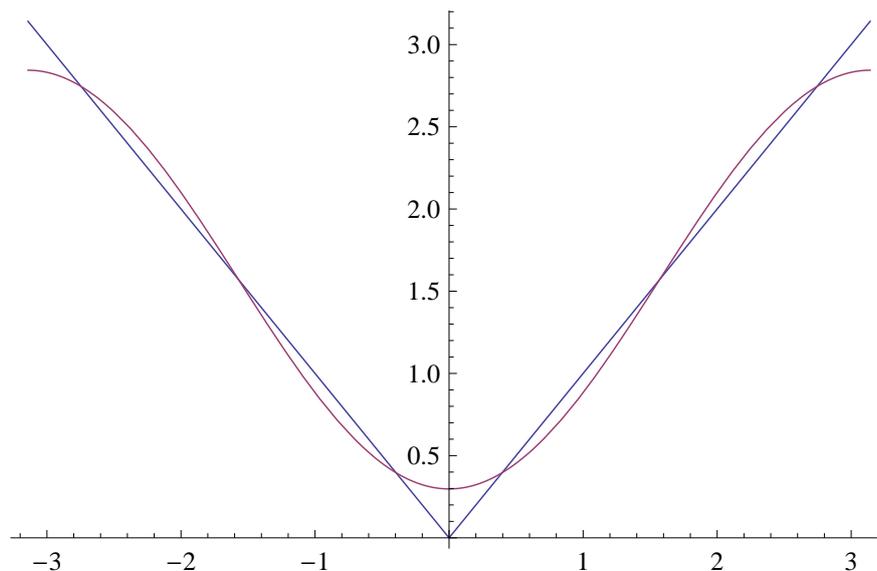
```
a[j] = {2 Pi, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0};
b[j] = {-2, -1, -(2/3), -(1/2), -(2/5), -(1/3), -(2/7), -(1/4), -(2/9), -(1/5), -(2/11),
-(1/6), -(2/13), -(1/7), -(2/15), -(1/8), -(2/17), -(1/9), -(2/19), -(1/10), -(2/21),
-(1/11), -(2/23), -(1/12), -(2/25), -(1/13), -(2/27), -(1/14), -(2/29), -(1/15)};
```

```
Norm coefficients = 3.61855; L2-norm = (2π)/√3 = 3.6276
```



Observamos que la función no es continua en los extremos. Esto da lugar a lo que se llama fenómeno de Gibbs, que estudiaremos con más detalle en el capítulo 3. Lo que sucede en los entornos de los puntos de discontinuidad, como podemos observar en el gráfico, es que la aproximación no será buena. Se puede verificar que, a pesar de hacer crecer n , se seguirán observando oscilaciones grandes cerca del salto.

Ejemplo 2.42. *Trabajamos ahora con $f(t) = |t|$, $n = 2$, en el dominio $(-\pi, \pi)$:*



En este caso, a pesar de que f no es diferenciable en $t = 0$, la continuidad será suficiente para que la aproximación cerca de $t = 0$ sea buena.

```
Fourierseriesnorma[Abs[t], 2, -Pi, Pi]
```

```
a[j] = { $\pi$ ,  $-(4/\pi)$ , 0}; a[j] =  $(2(-1 + (-1)^j))/(j^2\pi)$ 
```

```
b[j] = {0, 0};
```

```
Norm coefficients = 1.81052; L2-norm =  $\pi/\sqrt{3} = 1.8138$ 
```

```
Fourier series =  $\pi/2 - (4 \cos t)/\pi$ 
```


Capítulo 3

Convergencia de la serie de Fourier

1. *Fórmulas para las sumas parciales.* Núcleo de Dirichlet. Sumas parciales modificadas. Representación integral.
2. *Algunos criterios de convergencia.* El test de Dini. Principio de localización. Funciones de variación acotada. Criterio de Dirichlet-Jordan. Criterio de Dini-Lipschitz.
3. *Fenómeno de Gibbs.*
4. *Constantes de Lebesgue.* Criterio de Lebesgue.
5. *Aplicaciones con Mathematica.*

3.1. Fórmulas para las sumas parciales

Consideremos, como antes,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen}(kt) dt, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0,$$

donde \mathbb{N}_0 denota $\mathbb{N} \cup \{0\}$, de manera que

$$S[f](x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)),$$

y, similarmente, su serie conjugada,

$$\tilde{S}[f](x) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) - b_k \operatorname{sen}(kx)).$$

Trabajaremos ahora con las sumas parciales de estas series. No haremos referencia a la función f , cuando el contexto lo permita, y escribiremos $S_n(x)$ y $\tilde{S}_n(x)$, para denotar la n -ésima suma parcial.

Definición 3.1. [16] *Llamamos núcleo de Dirichlet y núcleo de Dirichlet conjugado a los polinomios*

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt), \quad \tilde{D}_n(x) = \sum_{k=1}^n \operatorname{sen}(kt),$$

respectivamente.

Observación 3.2. Utilizando identidades trigonométricas, podemos reescribir los núcleos de Dirichlet de la siguiente manera:

$$D_n(t) = \frac{\operatorname{sen}((n + 1/2)t)}{2 \operatorname{sen}(t/2)},$$

$$\tilde{D}_n(t) = \frac{\{\cos(t/2) - \cos((n + 1/2)t)\}}{2 \operatorname{sen}(t/2)}.$$

Para ver la primer igualdad, multiplicamos por $2 \operatorname{sen}(t/2)$ a la ecuación

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt),$$

y aplicando la identidad $\cos(x) \operatorname{sen}(y) = (\operatorname{sen}(x + y) - \operatorname{sen}(x - y))/2$, la igualdad buscada es inmediata. Para el caso del núcleo conjugado, procedemos de manera similar, aplicando la identidad $\operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y) = (\cos(x - y) - \cos(x + y))/2$.

Proposición 3.3. [16] Las sumas parciales $S_n(x)$ y $\tilde{S}_n(x)$ se escriben en términos de sus respectivos núcleos de Dirichlet:

$$S_n(x) = 2(D_n * f)(x), \quad \tilde{S}_n = -2(\tilde{D}_n * f)(x).$$

Demostración. Unos simples cálculos nos dan la igualdad:

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)) \\ &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n \left(\cos(kx) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt + \operatorname{sen}(kx) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen}(kt) dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^n \left(\cos(kx) f(t) \cos(kt) + \operatorname{sen}(kx) f(t) \operatorname{sen}(kt) \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\sum_{k=1}^n \cos(kx) \cos(kt) + \operatorname{sen}(kx) \operatorname{sen}(kt) \right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k(t - x)) \right) dt \\ &= 2(D_n * f)(x). \end{aligned}$$

El caso conjugado es análogo. □

Si hacemos un sencillo cambio de variable, podemos representar las sumas parciales de la siguiente manera:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + t) D_n(t) dt, \tag{3.1}$$

$$\tilde{S}_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + t) \tilde{D}_n(t) dt. \tag{3.2}$$

3.1. FÓRMULAS PARA LAS SUMAS PARCIALES

Puede resultar útil que el último termino de la suma parcial vaya multiplicado por $1/2$, como veremos a continuación.

Definición 3.4. [16] Las sumas parciales modificadas S_n^* vienen dadas por:

$$S_n^*(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos(kx) + b_k \sen(kx)) + \frac{1}{2}(a_n \cos(nx) + b_n \sen(nx)) = \frac{1}{2}(S_n(x) + S_{n-1}(x)).$$

Análogamente, podemos definir \tilde{S}_n^* .

Definición 3.5. [16] El núcleo de Dirichlet modificado y el núcleo de Dirichlet conjugado modificado, vienen dados por

$$D_n^*(t) = D_n(t) - \frac{1}{2} \cos(nt) = \frac{\sen(nt)}{2 \tan(t/2)},$$

$$\tilde{D}_n^*(t) = \tilde{D}_n(t) - \frac{1}{2} \sen(nt) = \frac{(1 - \cos(nt))}{2 \tan(t/2)},$$

respectivamente.

Si razonamos como en la Proposición 3.3, obtenemos

$$S_n^*(x) = 2(D_n^* * f)(x), \quad \tilde{S}_n^* = -2(\tilde{D}_n^* * f)(x). \quad (3.3)$$

Observación 3.6. Por el Teorema 2.39 (Riemann-Lebesgue), sabemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n - S_n^* = 0,$$

por lo cual ambas versiones de las sumas parciales son equivalentes, en cuanto a convergencia. Lo mismo ocurre con \tilde{S}_n y \tilde{S}_n^* .

Fijadas una función f y un punto x , definimos las siguientes aplicaciones:

$$\varphi(t) = \varphi_x(t) = \varphi_x(t; f) = \frac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)),$$

$$\psi(t) = \psi_x(t) = \psi_x(t; f) = \frac{1}{2}(f(x+t) - f(x-t)).$$

Proposición 3.7. [16] Utilizando las notaciones anteriores, se tienen las igualdades:

$$S_n^*(x) - f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\varphi_x(t) \sen(nt)}{2 \tan(t/2)} dt, \quad (3.4)$$

$$\tilde{S}_n^*(x) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\psi_x(t)(1 - \cos(nt))}{2 \tan(t/2)} dt. \quad (3.5)$$

Demostración. Haciendo uso de (3.1) y (3.2), y del hecho de que $D_n^*(t)$ es una función par que, a su vez, cumple

$$\int_{-\pi}^\pi D_n^*(t) dt = \pi,$$

tenemos que:

$$\begin{aligned}
 S_n^* - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n^*(t) dt - \frac{f(x)}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n^*(t) dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x)) D_n^*(t) dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) - f(x)) D_n^*(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x-t) - f(x)) D_n^*(-t) dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi_x(t) D_n^*(t) dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\varphi_x(t) \operatorname{sen}(nt) / 2 \tan(t/2) \right) dt.
 \end{aligned}$$

Similarmente, utilizando que $\tilde{D}_n^*(t)$ es una función impar,

$$\begin{aligned}
 \tilde{S}_n^*(x) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \tilde{D}_n^*(t) dt \\
 &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x+t) \tilde{D}_n^*(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x-t) \tilde{D}_n^*(-t) dt \\
 &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \psi_x(t) \tilde{D}_n^*(t) dt \\
 &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\psi_x(t) (1 - \cos(nt)) / 2 \tan(t/2) \right) dt.
 \end{aligned}$$

□

El estudio de la convergencia de $\tilde{S}[f]$ nos lleva a estudiar la siguiente función.

Definición 3.8. [16] *Decimos que*

$$\tilde{f}(x) := -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\psi_x(t)}{2 \tan(t/2)} dt = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \tan(t/2)} dt,$$

es conjugada de f , siempre que la integral exista, es decir, siempre que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{\pi} \frac{\psi_x(t)}{2 \tan(t/2)} dt,$$

sea finito.

Proposición 3.9. *Utilizando las notaciones anteriores, se tiene que*

$$\tilde{S}_n^*(x) - \tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\psi_x(t)}{2 \tan t/2} \cos nt dt.$$

Demostración. Es inmediato de las definiciones. □

3.2. Algunos criterios de convergencia

A continuación veremos que como las expresiones (3.4) y (3.5) no son más que coeficientes de Fourier de ciertas funciones, podremos aplicar el Teorema de Riemann-Lebesgue para obtener criterios de convergencia puntual:

Teorema 3.10 (Test de Dini [16]). *Si la integral*

$$\int_0^\pi \frac{|\varphi_x(t)|}{2 \tan t/2} dt \quad (3.6)$$

es finita, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x).$$

Demostración. Sea

$$F(t) := \frac{|\varphi_x(t)|}{2 \tan t/2}.$$

Utilizando las paridades de la función tangente y de $\varphi_x(t)$, es inmediato que

$$\int_{-\pi}^\pi |F(t)| dt = 2 \int_0^\pi \frac{|\varphi_x(t)|}{|2 \tan t/2|} dt.$$

Esta última expresión es finita por hipótesis. Por lo tanto F es integrable, y podemos aplicar el Teorema de Riemann-Lebesgue, junto a (3.4), para obtener:

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^\pi F(t) \operatorname{sen}(nt) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^\pi \frac{|\varphi_x(t)|}{2 \tan t/2} \operatorname{sen}(nt) dt = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^*(x) - f(x).$$

□

Para el caso conjugado, tenemos un poco más de trabajo por delante.

Teorema 3.11 (Test de Pringsheim [16]). *Si la integral*

$$\int_0^\pi \frac{|\psi(x)|}{2 \tan(t/2)} dt \quad (3.7)$$

es finita, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{S}_n(x) = \tilde{f}(x).$$

Demostración. En primer lugar recordamos que

$$\tilde{S}_n^*(x) - \tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\psi_x(t)}{2 \tan t/2} \cos nt dt.$$

Si tomamos

$$F(t) := \frac{\psi_x(t)}{2 \tan t/2},$$

es sencillo ver que F es integrable ya que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F(t)| dt = 2 \int_0^{\pi} |F(t)| dt = \int_0^{\pi} \frac{|\psi_x(t)|}{2 \tan t/2} dt.$$

Por lo tanto, observando que ψ es una función impar,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos nt dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\psi_x(t)}{2 \tan t/2} \cos nt dt = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{\psi_x(t)}{2 \tan t/2} \cos nt dt = 0.$$

□

La siguiente propiedad es importante, ya que simplifica estos criterios.

Proposición 3.12. [16] *Las integrales*

$$\int_0^{\pi} \frac{|\varphi_x(t)|}{t} dt, \quad \int_0^{\pi} \frac{|\psi(t)|}{t} dt,$$

son finitas si, y solo si, las integrales (3.6) y (3.7) también lo son.

Demostración. Es sencillo ver que $2 \tan t/2 \cong t$ para $t \rightarrow 0$, es decir,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \tan t/2}{t} = 1.$$

Por lo tanto se tiene que $2 \tan t/2 = O(t)$, y que $t = O(2 \tan t/2)$, y el resultado es inmediato. □

Utilizando esta formulación equivalente de los tests de Dini y Pringsheim, se deducen las siguientes observaciones.

Observación 3.13. Si $f(x+t) - f(x) = O(|t|^\alpha)$, donde $\alpha > 0$, entonces las integrales (3.6) y (3.7) son finitas. En particular, si existe $f'(x)$, dichas integrales son finitas.

Observación 3.14. La integral (3.6) converge aun en el caso en que f es discontinua en x , siempre y cuando $\varphi_x(t)$ tienda a cero suficientemente rápido. Por otro lado, la integral (3.7) diverge en el caso en que los límites laterales de $f(x)$ sean diferentes.

Una consecuencia importante de estos resultados es el principio de localización, el cual nos asegura la convergencia de S_n a cero en todo intervalo interior a un intervalo fijado I en el cual la función de partida f se anula. Antes de pasar a la demostración debemos utilizar el siguiente lema.

Lema 3.15. [16] *Sea f integrable, g acotada, y ambas periódicas. Entonces los coeficientes de Fourier de la función $\chi(t) = f(x+t)g(t)$ tienden a cero uniformemente con respecto al parámetro x .*

Demostración. Por la Proposición 2.35, será suficiente demostrar que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} w_1(\delta, \chi) = 0,$$

uniformemente sobre x . Sumando y restando $f(x+t)g(t+h)$, y aplicando la desigualdad triangular se tiene

$$\begin{aligned}
 w_1(\delta, \chi) &= \int_{-\pi}^{\pi} |\chi(t+h) - \chi(t)| dt \\
 &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+h) - f(x+t)| |g(t+h)| dt + \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)| |g(t+h) - g(t)| dt \\
 &= P + Q.
 \end{aligned}$$

Supongamos que $|g(t)| < M$ para todo $t \in (-\pi, \pi)$, y $|h| < \delta$. Es inmediato que $P \leq Mw_1(\delta; f)$. Como f es integrable, esta última expresión tiende a cero por el teorema de Riemann-Lebesgue. Por otro lado, dado $\epsilon > 0$, podemos suponer que $f = f_1 + f_2$, con f_1 acotada por $B > 0$, y $\int_{-\pi}^{\pi} |f_2| dt < \epsilon/4M$. Así, tenemos que

$$Q \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f_1(x+t)| |g(t+h) - g(t)| dt + \int_{-\pi}^{\pi} |f_2(x+t)| |g(t+h) - g(t)| dt \leq Bw_1(\delta; g) + \epsilon/2,$$

de manera que, tomando δ suficientemente pequeño, la expresión es menor que ϵ . Esto prueba la convergencia uniforme. \square

Teorema 3.16. [16] *Si f se anula en un intervalo I , entonces $S[f]$ y $\tilde{S}[f]$ convergen uniformemente en todo intervalo I' interior a I . Además, $S[f] = 0$ sobre I' .*

Demostración. Sea $x \in I'$. Sabemos que existe $\eta > 0$ tal que $f(x+t) = 0$ para todo $|t| < \eta$. Sea ahora $\lambda(t)$ la función periódica sobre el intervalo $[-\pi, \pi)$

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } |t| < \eta \\ 1, & \text{si } |t| \geq \eta. \end{cases}$$

Haciendo uso de (3.3) tenemos que

$$S_n^*(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\lambda(t)}{2 \tan(t/2)} \operatorname{sen} nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) g(t) \operatorname{sen} nt \, dt.$$

Podemos aplicar el lema anterior, ya que $g(t) = \lambda(t)/2 \tan(t/2)$ es acotada, y obtener que $S_n^*(x)$ converge uniformemente sobre I' . \square

Similarmente podemos demostrar que $\tilde{S}_n^*(x)$ converge uniformemente a $\tilde{f}(x)$.

El resultado puede enunciarse de otra manera, para lo cual necesitamos las siguientes definiciones.

Definición 3.17. [16] *Decimos que dos series $\sum_{n=1}^{\infty} k_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$, convergentes o no, son equiconvergentes si $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n - h_n) = 0$. Si esta suma existe, pero es diferente de cero, decimos que las series son equiconvergentes en el sentido amplio. Se define, análogamente, la equiconvergencia uniforme para sucesiones de funciones.*

Teorema 3.18. [16] *Si dos funciones f_1 y f_2 coinciden sobre un intervalo I , entonces $S[f_1]$ y $S[f_2]$ son uniformemente equiconvergentes sobre todo intervalo I' interior a I . Por otro lado, $\tilde{S}[f_1]$ y $\tilde{S}[f_2]$ son uniformemente equiconvergentes en el sentido amplio sobre I' .*

Demostración. Basta tomar $f = f_1 - f_2$ y aplicar el Teorema 3.16. □

Antes de pasar al Test de Dirichlet-Jordan, tendremos que desarrollar las propiedades básicas de las funciones de variación acotada, repasar el segundo teorema de valor medio para integrales, y demostrar algunos lemas preliminares, entre los cuales veremos una versión uniforme del Teorema de Riemann-Lebesgue.

Definición 3.19. [8] *Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función, y sea $[c, d]$ un subintervalo cualquiera de $[a, b]$. Si el conjunto*

$$S = \left\{ \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| : \{x_k : 1 \leq k \leq n\} \text{ es una partición de } [c, d] \right\}$$

es acotado, entonces definimos la variación de f sobre $[c, d]$ como $V(f, [c, d]) = \sup S$. Si S es no acotado, entonces decimos que la variación de f es ∞ . Una función se dice de variación acotada si $V(f, [c, d])$ es finito.

Los siguientes lemas nos ayudarán a demostrar que una función de variación acotada es diferencia de dos funciones crecientes.

Lema 3.20. [8] *Si una función f es creciente en $[a, b]$, entonces es de variación acotada, y $V(f, [a, b]) = f(b) - f(a)$.*

Demostración. Sea $\{x_k : 1 \leq k \leq n\}$ una partición de $[a, b]$. Consideremos

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = f(b) - f(a).$$

Por la naturaleza telescópica de esta suma, ésta será la misma para toda partición de $[a, b]$. Así, tenemos que $V(f, [a, b]) = f(b) - f(a) < \infty$, con lo cual f es de variación acotada. □

De manera análoga también podemos demostrar que si f es decreciente, entonces es de variación acotada con $V(f, [a, b]) = f(a) - f(b)$.

Lema 3.21. [9] *Si f es de variación acotada en $[a, b]$, entonces es de variación acotada en $[a, c]$ y en $[c, b]$, para todo $c \in (a, b)$. El recíproco también es cierto, y además,*

$$V(f, [a, b]) = V(f, [a, c]) + V(f, [c, b]).$$

Demostración. Sea f de variación acotada sobre $[a, b]$. Tomemos $P_1 = \{a = x_0, x_1, \dots, x_m = c\}$ y $P_2 = \{c = y_0, y_1, \dots, y_n = b\}$, dos particiones de $[a, c]$ y $[c, b]$ respectivamente. Evidentemente, $P = P_1 \cup P_2$ es una partición de $[a, b]$. Además,

$$\sum_{k=1}^m |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sum_{k=1}^n |f(y_k) - f(y_{k-1})| \leq V(f, [a, b]).$$

Por lo tanto, $V(f, [a, c]) \leq V(f, [a, b])$, y f es de variación acotada sobre $[a, c]$. Similarmente, f es de variación acotada sobre $[c, b]$.

3.2. ALGUNOS CRITERIOS DE CONVERGENCIA

Para ver la otra implicación, supongamos que f es de variación acotada sobre $[a, c]$ y $[c, b]$, y sea $P = \{a = z_0, z_1, \dots, z_n = b\}$ una partición de $[a, b]$. Sea $c \in [z_{r-1}, z_r]$, con $r < n$. Entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |f(z_k) - f(z_{k-1})| &= \sum_{k=1}^{r-1} |f(z_k) - f(z_{k-1})| + |f(z_r) - f(z_{r-1})| + \sum_{k=r+1}^n |f(z_k) - f(z_{k-1})| \\ &\leq \sum_{k=1}^{r-1} |f(z_k) - f(z_{k-1})| + |f(z_r) - f(c)| + |f(c) - f(z_{r-1})| \\ &\quad + \sum_{k=r+1}^n |f(z_k) - f(z_{k-1})| \\ &\leq V(f, [a, c]) + V(f, [c, b]). \end{aligned}$$

De esta manera, obtenemos que $V(f, [a, b]) \leq V(f, [a, c]) + V(f, [c, b])$. Sea $\epsilon > 0$. Sabemos, por definición, que existen particiones $P_1 = \{a = x_0, x_1, \dots, x_m = c\}$ y $P_2 = \{c = y_0, y_1, \dots, y_n = b\}$ de $[a, c]$ y $[c, b]$, respectivamente, tales que

- (i) $\sum_{k=1}^m |f(x_k) - f(x_{k-1})| > V(f, [a, c]) - \epsilon/2$.
- (ii) $\sum_{k=1}^n |f(y_k) - f(y_{k-1})| > V(f, [c, b]) - \epsilon/2$.

Sumando (i) y (ii), obtenemos

$$\sum_{k=1}^m |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sum_{k=1}^n |f(y_k) - f(y_{k-1})| > V(f, [a, c]) + V(f, [c, b]) - \epsilon.$$

Por lo tanto, $V(f, [a, b]) \geq V(f, [a, c]) + V(f, [c, b])$. Esto concluye la demostración. \square

Lema 3.22. [8] *Una función f cumple que $V(f, [a, b]) = 0$ si, y sólo si, f es constante en $[a, b]$.*

Demostración. Supongamos que f es constante. Entonces f es monótona, y por el lema anterior, $V(f, [a, b]) = 0$. Para ver la otra implicación, suponemos que f no es constante en $[a, b]$. Queremos ver entonces que $V(f, [a, b]) \neq 0$. Como f no es constante, existen $x_1, x_2 \in [a, b]$ tales que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Si tomamos ahora la partición dada por estos dos puntos, tenemos

$$V(f, [a, b]) \geq |f(x_1) - f(a)| + |f(x_2) - f(x_1)| + |f(b) - f(x_2)| > 0.$$

\square

Lema 3.23. [8] *Si f es de variación acotada en $[a, b]$, y $x \in [a, b]$, entonces la función $g(x) = V(f, [a, x])$ es creciente.*

Demostración. Sean $x_1 < x_2$. Veamos que $g(x_1) < g(x_2)$. Como f es de variación acotada en $[a, b]$, es claro que es de variación acotada en $[a, x_1]$. Por el Lema 3.21, tenemos

$$V(f, [a, x_2]) = V(f, [a, x_1]) + V(f, [x_1, x_2]),$$

es decir,

$$V(f, [a, x_2]) - V(f, [a, x_1]) = V(f, [x_1, x_2]).$$

De aquí, que

$$g(x_2) - g(x_1) = V(f, [x_1, x_2]) \geq 0,$$

con lo cual g es creciente. Además, por el Lema 3.22, tenemos la igualdad sólo si f es constante en $[x_1, x_2]$. \square

Ya estamos en condiciones de demostrar el teorema.

Teorema 3.24. [8] *Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de variación acotada, entonces existen dos funciones crecientes, f_1 y f_2 , tales que $f = f_1 - f_2$.*

Demostración. Comenzamos definiendo $f_1(x) := V(f, [a, x])$ para $x \in (a, b]$ y $f_1(a) = 0$. Sabemos, por el lema anterior, que f_1 es creciente. Definimos ahora $f_2(x) := f_1(x) - f(x)$. Como $f = f_1 - f_2$, sólo hace falta ver que f_2 es creciente. Supongamos que $a \leq x < y \leq b$. Por el Lema 3.21, podemos escribir

$$f_1(y) - f_1(x) = V(f, [x, y]) \geq |f(y) - f(x)| \geq f(y) - f(x).$$

De aquí deducimos que

$$f_1(y) - f(y) \geq f_1(x) - f(x),$$

con lo cual, $f_2(y) \geq f_2(x)$. \square

Para probar los resultados que siguen a continuación, utilizaremos que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable Riemann, entonces es acotada. Por integrable Riemann nos referimos a cualquiera de las dos definiciones habituales de esta integral. En un caso se trabaja con las sumas de Riemann, y en el otro con las sumas inferior y superior de Darboux. Ambas definiciones son equivalentes. Sin embargo, para evitar confusiones, observamos lo siguiente: en el caso de Darboux se supone que la función es acotada (si no lo fuera, no podríamos tomar máximos o mínimos) mientras que con las sumas de Riemann podemos verificar que f es acotada. Es suficiente observar que si no lo fuera, para cualquier partición habría un subintervalo no acotado. Escogiendo un punto arbitrariamente grande en este intervalo, se tendría que la sumas de Riemann no convergen.

Teorema 3.25. [13] *Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función monótona. Entonces f es integrable Riemann.*

Demostración. Sea $X = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$, y sea

$$V_k(f) = \sup_{s, t \in [x_{k-1}, x_k]} \{f(t) - f(s)\}.$$

Denotando por $U(f, X)$ y $L(f, X)$ a las sumas superior e inferior respectivamente, tenemos que

$$U(f, X) - L(f, X) = \sum_{k=1}^n V_k(f) \Delta x_k \leq \left(\sum_{k=1}^n V_k(f) \right) \|X\|,$$

donde $\|X\| = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$ es la longitud máxima de los intervalos que forman la partición. Supongamos que f es monótona creciente. Por el Lema 3.20, tenemos que

$$V_k(f) = f(x_k) - f(x_{k-1}), \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

3.2. ALGUNOS CRITERIOS DE CONVERGENCIA

Por lo tanto, la suma de las variaciones sobre todos los intervalos es simplemente la variación sobre $[a, b]$:

$$\sum_{k=1}^n V_k(f) = V(f, [a, b]).$$

Lo mismo sucede si f es monótona decreciente. En cualquiera de los dos casos se obtiene:

$$U(f, X) - L(f, X) \leq V(f, [a, b])\|X\|.$$

Por lo tanto, para ver que f es integrable Riemann, dado $\epsilon > 0$, basta tomar particiones con intervalos de tamaño menor que $\epsilon/(1 + V(f, [a, b]))$. \square

Probamos ahora una versión del segundo teorema de valor medio para integrales.

Teorema 3.26. [7] Sean f, g funciones integrables Riemann sobre $[a, b]$. Supongamos además que f es creciente y positiva, y denotemos por M y m respectivamente, al máximo y mínimo de la función $T(x) = \int_x^b g(t)dt$, $x \in [a, b]$. Entonces se tiene que

$$mf(b) \leq \int_a^b f(t)g(t) dt \leq Mf(b).$$

En particular, existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c) \int_c^b g(t)dt.$$

Demostración. Como hemos observado anteriormente, g ha de ser acotada, y por tanto existe $d \in \mathbb{R}$ tal que $g(t) + d > 0$ en $[a, b]$. Sea $\sigma = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ una partición de $[a, b]$, y llamemos $\sigma_n := \sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - x_{k-1})$. Utilizando que f es creciente y que $T(b) = 0$, tenemos:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)(g(t) + d) dt &= \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)(g(t) + d) dt \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k)(g(t) + d) dt \\ &= \sum_{k=1}^n f(x_k)(T(x_{k-1}) - T(x_k)) + d\sigma_n \\ &= f(x_1)T(x_0) - f(x_1)T(x_1) + \sum_{k=2}^n f(x_k)T(x_{k-1}) - \sum_{k=2}^n f(x_k)T(x_k) + d\sigma_n \\ &= f(x_1)T(x_0) - f(x_1)T(x_1) + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_{k+1})T(x_k) - \sum_{k=2}^{n-1} f(x_k)T(x_k) + d\sigma_n \\ &= f(x_1)T(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} T(x_k)(f(x_{k+1}) - f(x_k)) + d\sigma_n \\ &\leq M \left(f(x_1) + \sum_{k=1}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) \right) + d\sigma_n \\ &= Mf(b) + d\sigma_n. \end{aligned}$$

Observando que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \int_a^b f(t) dt,$$

concluimos que

$$\int_a^b f(t)g(t) dt \leq Mf(b).$$

De manera análoga se demuestra que $\int_a^b f(t)g(t) dt \geq mf(b)$. La segunda parte del teorema se sigue del teorema del valor medio, ya que $T(x)$ es continua. \square

Podemos repetir el procedimiento de esta demostración para conseguir un resultado similar para funciones decrecientes. Lo enunciaremos a continuación, a modo de corolario, ya que haremos uso de ello más adelante.

Corolario 3.27. [7] Sean f, g funciones integrables Riemann sobre $[a, b]$. Supongamos además que f es decreciente y positiva, y denotemos por M y m respectivamente, al máximo y mínimo de la función $T(x) = \int_a^x g(t) dt$, $x \in [a, b]$. Entonces se tiene que

$$mf(a) \leq \int_a^b f(t)g(t) dt \leq Mf(a).$$

En particular, existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = f(c) \int_a^b g(t) dt.$$

Volvemos ahora a nuestras series trigonométricas y probamos unos lemas preliminares que nos permitirán demostrar el Teorema de Dirichlet-Jordan.

Lema 3.28. [7] Sea f integrable y 2π -periódica. Entonces:

$$S_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t)) D_n(t) dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Observamos que podemos expresar el núcleo de Dirichlet como $D_n(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$.

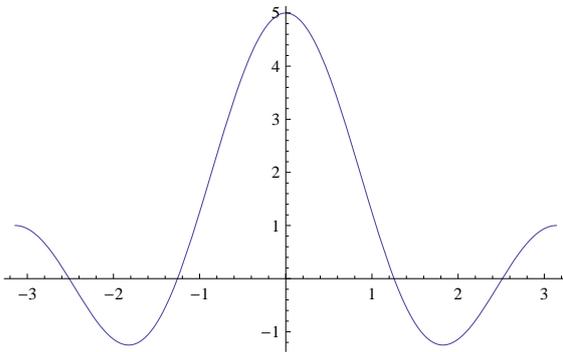
Teniendo en cuenta la periodicidad de f , y que D_n son funciones pares, obtenemos:

$$\begin{aligned} S_n f(x) &= \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi f(t) e^{ik(x-t)} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(t) D_n(x-t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(t) D_n(t-x) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t) D_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(t+x) D_n(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t)) D_n(t) dt. \end{aligned}$$

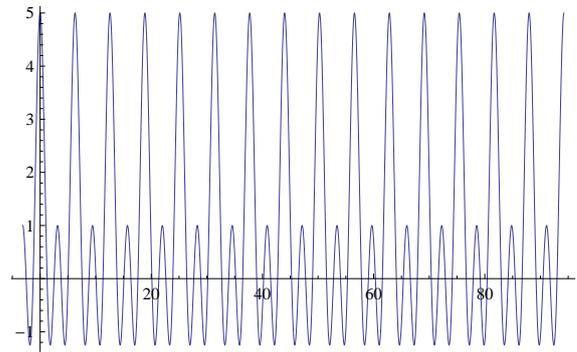
\square

3.2. ALGUNOS CRITERIOS DE CONVERGENCIA

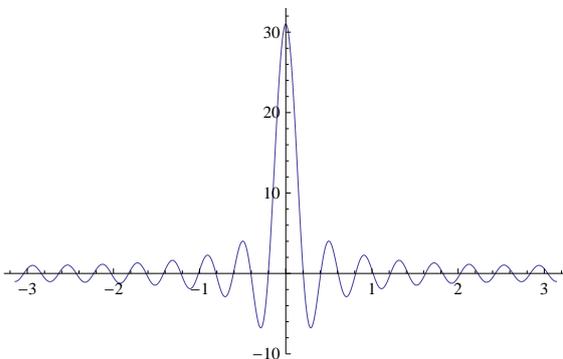
Las siguientes ilustraciones nos dan una idea de cómo se comporta el núcleo de Dirichlet. Observar que es una función periódica, y que cerca del origen la función crece con n .



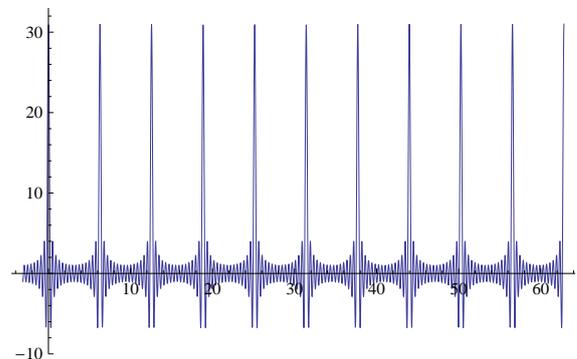
$D_n(x)$ para $n = 2$



$D_n(x)$ para $n = 2$



$D_n(x)$ para $n = 15$



$D_n(x)$ para $n = 15$

Lema 3.29. [7] Sean $c, d \in [0, \pi]$. Entonces,

$$\left| \int_c^d D_n(t) dt \right| \leq \pi.$$

Demostración. Sea $G_n(x) := \int_0^x D_n(t) dt$. Un pequeño estudio de la función nos permite observar que $G_n(x)$ es positiva en $[0, \pi]$ y alcanza su máximo en $2\pi/(2n+1)$. Es fácil probar que es positiva calculando explícitamente esta integral, utilizando la expresión del núcleo de Dirichlet como suma de cosenos, y evaluando en los ceros de D_n (es decir, evaluando en $2k\pi/(2n+1)$), entre los cuales se encontrarán los mínimos locales, ya que $D_n(x)$ es precisamente la derivada de $G_n(x)$. Como todos serán positivos, la función será positiva. Similarmente, para ver que $2\pi/(2n+1)$ es un máximo global, podemos verificar que $G_n(2\pi/(2n+1)) - G_n(2k\pi/(2n+1)) > 0$, para $k \geq 2$. Utilizando esto último obtenemos,

$$\begin{aligned} \|G_n\|_{\infty, [0, \pi]} &= G_n\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right) = \int_0^{2\pi/(2n+1)} \frac{\text{sen}((n+1/2)s)}{2 \text{sen}(s/2)} ds \\ &= \int_0^\pi \frac{2}{(2n+1) 2 \text{sen}(s/(2n+1))} ds \leq \frac{2(2n+1)}{2(2n+1)} \pi = \pi. \end{aligned}$$

En la última desigualdad utilizamos el hecho de que $h(s) = \frac{\text{sen } s}{\text{sen}(s/(2n+1))}$ es una función decre-

ciente, y que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} h(t) = 2n + 1.$$

En particular, utilizando que $G_n(x)$ es positiva, obtenemos

$$\left| \int_c^d D_n(t) dt \right| \leq \pi,$$

independientemente de n . □

Lema 3.30. [7] *Dado $\delta > 0$, existe una constante C que depende de δ tal que*

$$\left| \int_\delta^\pi D_n(t) dt \right| \leq C/n.$$

Demostración. Integrando por partes, se obtiene que

$$\int_\delta^\pi \frac{\operatorname{sen}[(n + 1/2)t]}{\operatorname{sen}[t/2]} dt = -\frac{\cos[(n + 1/2)t]}{(n + 1/2) \operatorname{sen}[t/2]} \Big|_\delta^\pi + \int_\delta^\pi \frac{\cos[(n + 1/2)t] \cos[t/2]}{2(n + 1/2) \operatorname{sen}^2[t/2]} dt.$$

De esta expresión es fácil deducir que, para un cierto C (que depende de δ),

$$\left| \int_\delta^\pi D_n(t) dt \right| \leq C/n.$$

□

El siguiente resultado es una versión del Teorema de Riemann-Lebesgue:

Teorema 3.31. [7] *Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable Riemann. Entonces, para cada intervalo $(c, d) \subseteq (a, b)$, se tiene que*

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \int_c^d f(t) e^{i\lambda t} dt = 0,$$

uniformemente con respecto a (c, d) .

Demostración. Sea f una función escalonada, y sea $\sigma := \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$ una subdivisión de (a, b) tal que $f(x) = a_k$ en $[x_{k-1}, x_k)$. Entonces

$$\left| \int_c^d f(t) e^{i\lambda t} dt \right| = \left| \sum_{k=1}^n a_k \frac{e^{i\lambda t}}{i\lambda} \Big|_c^d \right| \leq \frac{2}{|\lambda|} \sum_{k=1}^n |a_k|.$$

Esto prueba el teorema para funciones escalonadas. Si suponemos que f es integrable Riemann en (a, b) , y consideramos $\epsilon > 0$, sabemos que existe una función escalonada g_ϵ de manera que $\int_a^b |f(t) - g_\epsilon(t)| dt < \epsilon$. Por lo tanto, se tiene

$$\int_c^d f(t) e^{i\lambda t} dt = \int_c^d g_\epsilon(t) e^{i\lambda t} dt + \int_c^d (f(t) - g_\epsilon(t)) e^{i\lambda t} dt,$$

3.2. ALGUNOS CRITERIOS DE CONVERGENCIA

de lo cual se deduce que

$$\begin{aligned} \left| \int_c^d f(t)e^{i\lambda t} dt \right| &\leq \left| \int_c^d g_\epsilon(t)e^{i\lambda t} dt \right| + \int_a^b |f(t) - g_\epsilon(t)| dt \\ &\leq \left| \int_c^d g_\epsilon(t)e^{i\lambda t} dt \right| + \epsilon. \end{aligned}$$

Aplicando el resultado para funciones escalonadas se concluye el resultado. \square

Será necesario disponer del siguiente lema.

Lema 3.32. [7] *Sea f integrable y 2π -periódica, y sea $\delta > 0$. Entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_\delta^\pi f(x+t)D_n(t) dt = 0,$$

uniformemente con respecto a $x \in \mathbb{R}$.

Demostración. Como $1/\sin(t/2)$ es decreciente en $(0, \pi]$, sabemos que, por el Teorema 3.26, existe $\xi = \xi(x) \in [\delta, \pi]$, tal que

$$\int_\delta^\pi f(x+t)D_n(t) dt = \frac{1}{\sin \delta/2} \int_\delta^\xi f(x+t) \sin[(n+1/2)t] dt$$

Por otro lado, utilizando la identidad trigonométrica $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$,

$$\begin{aligned} \int_\delta^\xi f(x+t) \sin[(n+1/2)t] dt &= \int_{\delta+x}^{\xi+x} f(t) \sin[(n+1/2)(t-x)] dt \\ &= \cos[(n+1/2)x] \int_{\delta+x}^{\xi+x} f(t) \sin[(n+1/2)t] dt \\ &\quad - \sin[(n+1/2)x] \int_{\delta+x}^{\xi+x} f(t) \cos[(n+1/2)t] dt. \end{aligned}$$

Estas últimas dos integrales convergen uniformemente a cero en $[-\pi, \pi]$, por el Teorema 3.31. Tenemos entonces que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_\delta^\pi f(x+t)D_n(t) dt = 0$ uniformemente en $[-\pi, \pi]$, y por tanto en \mathbb{R} . \square

Volvemos ahora a tratar la convergencia de la serie de Fourier. Para enunciar el siguiente teorema, utilizaremos la notación $f(x \pm 0)$ para denotar los límites laterales por izquierda y por derecha de f alrededor de x .

Teorema 3.33 (Test de Dirichlet-Jordan [7]). *Supongamos que f es 2π -periódica y de variación acotada sobre $[a, b]$. Entonces:*

- (i) *para todo $x \in (a, b)$, $S_n[f](x)$ converge al valor $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$; en particular, $S_n[f](x)$ converge a $f(x)$ en todo punto de continuidad de f ;*
- (ii) *si, además, f es continua en todo punto de (a, b) , entonces $S_n[f](x)$ converge uniformemente sobre cualquier subintervalo cerrado contenido en (a, b) .*

Demostración. Sea $[a, b]$ un intervalo con $b - a < 2\pi$. Como toda función de variación acotada sobre $[a, b]$ es la diferencia de dos funciones crecientes, bastará demostrar el resultado para f creciente. Para probar (i), supongamos que $x \in (a, b)$, y sea $g_x(t) := f(x+t) - f(x+0) + f(x-t) - f(x-0)$. Dado $\epsilon > 0$, sea $\delta > 0$ tal que

$$|f(x+\delta) - f(x+0)| + |f(x-\delta) - f(x-0)| < \epsilon.$$

Aplicando el Lema 3.28 en la primera igualdad, y que $\int_0^\pi D_n(t) dt = \pi/2$, obtenemos

$$\begin{aligned} S_n f(x) - \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+t) - f(x+0) + f(x-t) - f(x-0)) D_n(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\delta g_x(t) D_n(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi g_x(s) D_n(s) ds \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Como $f(x+t) - f(x+0)$ y $-(f(x-t) - f(x-0))$ son crecientes, utilizando el Lema 3.29, junto al Teorema 3.26 con $g(t) = D_n(t)$, se deduce que

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\delta (f(x+t) - f(x+0)) D_n(t) dt \right| + \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\delta (f(x-t) - f(x-0)) D_n(t) dt \right| \\ &\leq 2(|f(x+\delta) - f(x+0)| + |f(x-\delta) - f(x-0)|) \\ &\leq 2\epsilon. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Por otro lado, utilizando el Lema 3.30,

$$\begin{aligned} |I_2| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi g_x(s) D_n(s) ds \right| \\ &= \left| \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi (f(x+t) - f(x+0) + f(x-t) - f(x-0)) D_n(t) dt \right| \\ &\leq C/n. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Hemos obtenido entonces que,

$$\left| S_n f(x) - \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] \right| \leq 2\epsilon + C/n.$$

lo cual prueba la convergencia puntual.

Para ver (ii), notamos en primer lugar que para todo $x \in [a, b]$, $f(x+0) = f(x-0) = f(x)$. Será suficiente estimar I_1 e I_2 uniformemente en $[a + \sigma, b - \sigma]$, con $0 < \sigma < (b - a)/2$. Como f es uniformemente continua en $[a, b]$, dado $\epsilon > 0$, escogemos $0 < \delta < \sigma$ tal que

$$|f(x+\delta) - f(x)| + |f(x-\delta) - f(x)| < \epsilon,$$

uniformemente respecto a x en $[a + \sigma, b - \sigma]$. Por lo tanto, de (3.8), se obtiene que $|I_1| \leq 2\epsilon$ uniformemente en $[a + \sigma, b - \sigma]$. Por otro lado,

$$|I_2| \leq \frac{1}{\pi} \left| \int_\delta^\pi f(x+t) D_n(t) dt \right| + \frac{1}{\pi} \left| \int_\delta^\pi f(x-t) D_n(t) dt \right| + \frac{2}{\pi} \left| \int_\delta^\pi f(x) D_n(t) dt \right|,$$

con lo cual la acotación uniforme es consecuencia del Lema 3.32 y del Lema 3.30. \square

3.2. ALGUNOS CRITERIOS DE CONVERGENCIA

Estudiamos a continuación un análogo de este teorema para $\tilde{S}[f]$.

Teorema 3.34. [16] *Si f es de variación acotada, una condición necesaria y suficiente para la convergencia de $\tilde{S}[f](x)$ es la existencia de la integral*

$$\tilde{f}(x) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\psi_x(t)}{2 \tan t/2} dt = \lim_{h \rightarrow +0} -\frac{2}{\pi} \int_h^\pi \frac{\psi_x(t)}{2 \tan t/2} dt = \lim_{h \rightarrow +0} \tilde{f}(x; h),$$

que representa entonces la suma de $\tilde{S}[f]$.

Demostración. Sea $\psi(t) = \frac{1}{2}[f(x_0 + t) - f(x_0 - t)]$. Como $\tilde{S}[f](x_0) = \tilde{S}[\psi](0)$, podemos suponer que $x_0 = 0$ y que f es impar. Tenemos entonces que $\psi_{x_0}(t) = f(t)$. Supongamos, por el momento, que f es positiva y creciente en $(0, \pi)$. Entonces

$$\begin{aligned} \tilde{S}_n^*(0) - \tilde{f}(0; \pi/n) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(t)}{2 \tan t/2} (1 - \cos nt) dt - \frac{2}{\pi} \int_{\pi/n}^\pi \frac{f(t)}{2 \tan t/2} dt \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/n} f(t) \tilde{D}_n^* dt + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/n}^\pi \frac{f(t)}{2 \tan t/2} \cos nt dt \\ &= A + B. \end{aligned}$$

Supongamos que f es continua en $t = 0$, es decir, $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 0$. Como $|\tilde{D}_n^*| \leq n$,

$$|A| \leq \frac{2n}{\pi} \int_0^{\pi/n} f(t) dt \leq 2f(\pi/n) = o(1).$$

Dado $\epsilon > 0$, sea $\eta > 0$ tal que $f(\eta) < \epsilon$, y ponemos

$$B = \frac{2}{\pi} \int_{\pi/n}^\eta \frac{f(t)}{2 \tan t/2} \cos nt dt + \frac{2}{\pi} \int_\eta^\pi \frac{f(t)}{2 \tan t/2} \cos nt dt = B' + B''.$$

Aplicando el Teorema 3.26 dos veces (la primera es en realidad el Corolario 3.27), tenemos

$$|B'| = \left| \frac{1}{\pi} \cot[\pi/2n] \int_{\pi/n}^{\eta'} f(t) \cos nt dt \right| = \left| \frac{1}{\pi} \cot[\pi/2n] f(\eta') \int_{\eta''}^{\eta'} \cos nt dt \right| < \frac{1}{\pi} \frac{2n}{\pi} \epsilon \frac{2}{n},$$

de manera que $|B'| < \epsilon$. Por otro lado, $\lim_{n \rightarrow \infty} |B''| = 0$ por el Teorema 3.31. Hemos probado que

$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{S}_n^*(0) - \tilde{f}(0; \pi/n) = 0$. De manera análoga, no es difícil mostrar que este límite es finito cuando $f(0+) \neq 0$. En el caso en que f no sea ni positiva ni creciente, bastará descomponerla en sus partes negativa y positiva, y al ser de variación acotada, podremos además descomponerla como en el Teorema 3.24, para luego efectuar las acotaciones. Las funciones en las que se descompone f serán continuas en $t = 0$ cuando f lo sea. Sea $\pi/(n+1) \leq h \leq \pi/n$. En el caso general de una función f de variación acotada tenemos

$$\left| \tilde{f}\left(0; \frac{\pi}{n}\right) - \tilde{f}(0; h) \right| \leq \frac{2}{\pi} \int_{\pi/(n+1)}^{\pi/n} \frac{|f(t)|}{2 \tan t/2} dt \leq \frac{2(n+1)}{\pi^2} \left(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n+1} \right) \sup |f(t)| = o(1),$$

con lo cual hemos finalizado el argumento. \square

En el siguiente capítulo veremos que la continuidad de una función no es suficiente para asegurar su convergencia puntual. Sin embargo, el Teorema de Dini-Lipschitz, que veremos a continuación, nos aporta un resultado valioso para funciones continuas. Vale la pena mencionar que el problema de la convergencia de la serie de Fourier no es en absoluto trivial: condiciones necesarias y suficientes para la convergencia puntual no son conocidas.

Teorema 3.35 (Dini-Lipschitz [16]). *Supongamos que f es una función continua tal que su módulo de continuidad satisface $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta) \log \delta = 0$. Entonces $S[f]$ converge uniformemente.*

Demostración. Utilizaremos (3.4), fijando x , y tomando

$$\varphi(t) = \varphi_x(t), \quad \chi(t) = \varphi(t) \frac{\cot t/2}{2}, \quad \eta = \pi/n.$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \pi[S_n^*(x) - f(x)] &= 2 \int_{-\pi}^{\pi} \chi(t) \operatorname{sen} nt \, dt = -2 \int_{-\eta}^{\pi-\eta} \chi(t+\eta) \operatorname{sen} nt \, dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \chi(t) \operatorname{sen}(nt) \, dt - \int_{-\eta}^{\pi-\eta} \chi(t+\eta) \operatorname{sen} nt \, dt \\ &= \int_{\eta}^{\pi-\eta} (\chi(t) - \chi(t+\eta)) \operatorname{sen} nt \, dt + \int_{\pi-\eta}^{\pi} \chi(t) \operatorname{sen} nt \, dt \\ &\quad + \int_0^{\eta} \chi(t) \operatorname{sen} nt \, dt - \int_{-\eta}^{\eta} \chi(t+\eta) \operatorname{sen} nt \, dt \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

Como $|\frac{1}{2} \operatorname{sen} nt \cot [t/2]| = |D_n^*| \leq n$ (y $\operatorname{sen}(nt + \pi) = -\operatorname{sen} nt$),

$$|I_3| + |I_4| \leq n \int_0^{\eta} |\varphi(t)| \, dt + n \int_{-\eta}^{\eta} |\varphi(t+\eta)| \, dt \leq 2n \int_0^{2\eta} |\varphi(t)| \, dt.$$

Por otro lado, para $n \geq 2$ y $t \in (\pi - \eta, \pi)$,

$$|\chi(t) \operatorname{sen} nt| \leq |\varphi(t)| \leq \frac{1}{2} \{|f(x+t) + |f(x-t)| + 2|f(x)|\}, \quad (3.10)$$

y como la integral indefinida define una función continua (en particular continua por la izquierda en π), tenemos que $I_2 = o(1)$ uniformemente. Por otro lado, sumando y restando $\varphi(t) \cot [(t+\eta)/2]$,

$$|I_1| \leq \int_{\eta}^{\pi-\eta} |\varphi(t)| \left\{ \frac{1}{2 \tan [t/2]} - \frac{1}{2 \tan [(t+\eta)/2]} \right\} dt + \int_{\eta}^{\pi-\eta} \frac{|\varphi(t) - \varphi(t+\eta)|}{2 \tan [(t+\eta)/2]} dt.$$

Utilizando la identidad $\operatorname{sen} \frac{\eta}{2} = \operatorname{sen} [\frac{t+\eta}{2} - \frac{t}{2}] = \operatorname{sen} [\frac{t+\eta}{2}] \cos \frac{t}{2} - \cos [\frac{t+\eta}{2}] \operatorname{sen} \frac{t}{2}$, obtenemos

$$\frac{1}{2 \tan [t/2]} - \frac{1}{2 \tan [(t+\eta)/2]} = \frac{\operatorname{sen} \eta/2}{2 \operatorname{sen} [t/2] \operatorname{sen} [(t+\eta)/2]} < \pi^2 \eta / 4t^2.$$

En la última desigualdad usamos que $\operatorname{sen} (\eta/2) < (\eta/2)$. Considerando todo lo anterior, junto a que $2 \tan (t/2) \geq t$ para todo $t \in (0, \pi)$, nos bastará estudiar la siguiente suma

$$\frac{1}{\pi} \int_{\eta}^{\pi} \frac{|\varphi(t) - \varphi(t+\eta)|}{t} dt + \eta \int_{\eta}^{\pi} \frac{|\varphi(t)|}{t^2} dt + \frac{2}{\eta} \int_0^{2\eta} |\varphi(t)| dt = J_1 + J_2 + J_3. \quad (3.11)$$

Observando que

$$|\varphi(t) - \varphi(t+\eta)| \leq \frac{1}{2} |f(x+t) - f(x+t+\eta)| + \frac{1}{2} |f(x-t) - f(x-t-\eta)| \leq \omega(\eta),$$

se deduce que

$$J_1 \leq \frac{1}{\pi} \int_{\eta}^{\pi} \frac{\omega(\eta)}{t} dt = \frac{1}{\pi} \omega(\eta) (\ln(\pi) - \ln(\eta)).$$

La hipótesis principal del teorema nos garantiza que esta última expresión será arbitrariamente pequeña para n suficientemente grande. Similarmente, como $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = 0$ uniformemente en x , dado $\epsilon > 0$, tomamos $\delta > 0$, tal que $|\varphi(t)| < \epsilon$ para todo $0 < t < \delta$. Entonces, para n suficientemente grande,

$$J_2 = \eta \int_{\eta}^{\delta} \frac{|\varphi(t)|}{t^2} dt + \eta \int_{\delta}^{\pi} \frac{|\varphi(t)|}{t^2} dt.$$

Como

$$\eta \int_{\eta}^{\delta} \frac{|\varphi(t)|}{t^2} dt < \eta \epsilon \left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{\delta} \right),$$

es claro que $\lim_{n \rightarrow \infty} J_2 < \epsilon$ uniformemente en x . Por último,

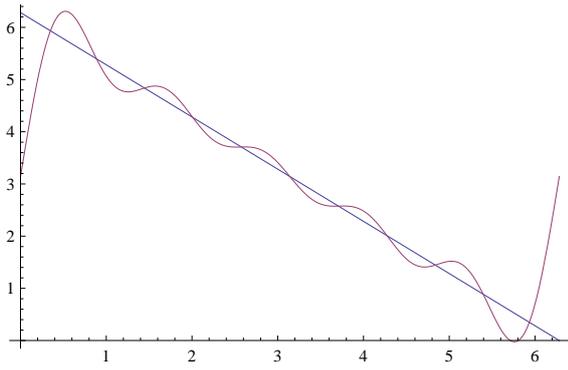
$$J_3 \leq 2\eta^{-1} \epsilon 2\eta = 4\epsilon,$$

con lo cual hemos terminado la demostración. □

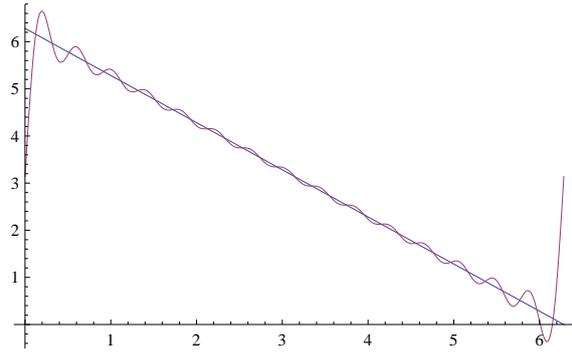
Ejemplo 3.36. Si tenemos una función $f \in \Lambda_{\alpha}$ (véase la Definición 2.32), con $0 \leq \alpha \leq 1$, podemos probar que $S_n[x, f] - f(x) = O(n^{-\alpha} \log n)$ uniformemente en x . En efecto, retomando el razonamiento del Teorema 3.35, en la suma (3.11), tendremos que $J_1 = O(n^{-\alpha} \log n)$, ya que de la hipótesis se deduce que $\varphi(t + \eta) - \varphi(t) = O(\eta^{\alpha})$. Teniendo en cuenta que $\varphi(t) = O(t^{\alpha})$, es sencillo verificar que $J_2 = O(\eta^{-\alpha})$ si $\alpha < 1$, y que $J_2 = O(n^{-1} \log n)$ cuando $\alpha = 1$. Además, es claro que $J_3 = O(n^{-\alpha})$. Por último, no podemos olvidarnos del término I_2 que aparece en la demostración. Si volvemos a (3.10), claramente $|I_2| \leq C \int_{\pi-\eta}^{\pi} t^{\alpha} dt \leq C\pi^{\alpha} \int_{\pi-\eta}^{\pi} 1 dt$, para alguna constante C . Y finalmente se obtiene que $|I_2| = O(\eta) = O(n^{-\alpha})$.

3.3. El fenómeno de Gibbs

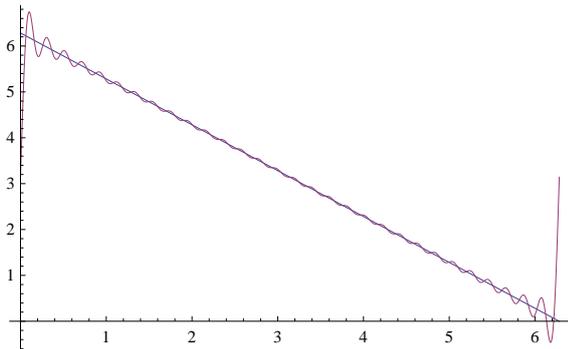
La referencia principal de esta sección será [4]. Cuando queremos aproximar una función f de variación acotada con las sumas parciales de su serie de Fourier asociada, se puede observar un comportamiento particular cerca de los puntos de discontinuidad aislados. Trataremos el caso en que f es discontinua en $x = a$ y $f(a - 0) < f(a + 0)$, siendo completamente análogo el caso $f(a - 0) > f(a + 0)$. Cuando dibujamos las sumas parciales $s_n(x)$ notamos que cerca del punto de discontinuidad la aproximación se aleja de la función. Es útil mirar este fenómeno en las siguientes ilustraciones para la función 2π -periódica definida en el intervalo $[0, 2\pi)$ por $f(x) = 2\pi - x$.



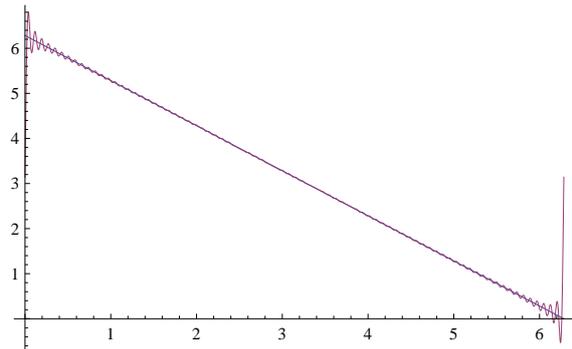
$s_n(x)$ para $n = 5$



$s_n(x)$ para $n = 15$



$s_n(x)$ para $n = 30$



$s_n(x)$ para $n = 80$

Se puede observar que el máximo de $s_n(x)$ parece conservar una distancia vertical fija respecto de la función original, y esta distancia no parece disminuir al hacer crecer n . Esta es la característica fundamental del fenómeno que queremos estudiar. Uno puede estimar numéricamente la siguiente integral, que será esencial en todo lo que sigue:

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{\text{sen } t}{t} dt \approx -0,2811.$$

Definición 3.37. Sea f una función de variación acotada, con discontinuidad aislada en $x = a$. Sean M_n y m_n el primer máximo local de s_n a la derecha de $x = a$ y el primer mínimo local de s_n a la izquierda de $x = a$ respectivamente, y sea $P := \int_{\pi}^{\infty} \frac{\text{sen } t}{t} dt$. Si escribimos $D := f(a+0) - f(a-0)$, diremos que una función exhibe el fenómeno de Gibbs siempre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = f(a+0) - DP/\pi, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} m_n = f(a-0) + DP/\pi.$$

Antes de probar el resultado fundamental de esta sección, el cual nos asegurará que el fenómeno de Gibbs ocurre en este tipo de funciones, estudiaremos el caso particular de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sen } (2k-1)x}{2k-1}.$$

Es sencillo verificar que ésta es la serie de Fourier para f cuando

$$f(x) = \begin{cases} -\pi/2, & -\pi < x < 0, \\ \pi/2, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x \in \{\pi, -\pi, 0\}. \end{cases}$$

Si ponemos $s_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\text{sen} [(2k-1)x]}{2k-1}$, es claro que

$$\frac{d}{dx} s_n(x) = 2 \sum_{k=1}^n \cos [(2k-1)x] = \frac{\text{sen } 2nx}{\text{sen } x}. \quad (3.12)$$

La última igualdad se prueba haciendo inducción, utilizando la identidad

$$\text{sen } 2nx = 2 \text{sen } x \cos [(2n-1)x] + \text{sen} [(2n-1)x],$$

en el paso inductivo. A su vez, esta última identidad puede verificarse restando las dos igualdades

$$\text{sen} [(2n-1)x] \cos x \pm \cos [(2n-1)x] \text{sen } x = \text{sen} [(2n-1)x \pm x].$$

De (3.12), deducimos que

$$s_n(x) = \int_0^x \frac{\text{sen } 2nt}{t} dt,$$

y también

$$s_n(x) - \int_0^x \frac{\text{sen } 2nt}{t} dt = \int_0^x \text{sen } 2nt \left(\frac{1}{\text{sen } t} - \frac{1}{t} \right) dt.$$

Ahora, como $t - \text{sen } t = t^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} t^{2k-3}}{(2k-1)!}$, obtenemos

$$s_n(x) - \int_0^{2nx} \frac{\text{sen } t}{t} dt = \int_0^x \text{sen } 2nt \frac{t}{\text{sen } t} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} t^{2k-3}}{(2k-1)!} \right) dt.$$

Pero $t \text{ cosec } t$ crece continuamente desde 1 hasta $\pi/2$, y $0 < \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} t^{2k-3}}{(2k-1)!} < t/3!$ cuando $0 < t \leq \pi/2$. De esta manera,

$$\left| s_n(x) - \int_0^{2nx} \frac{\text{sen } t}{t} dt \right| < \frac{\pi}{12} \int_0^x t dt < \frac{\pi}{24} x^2,$$

cuando $0 < x \leq \pi/2$. Podemos concluir entonces que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| s_n(x) - \int_0^{2nx} \frac{\text{sen } t}{t} dt \right| < \epsilon,$$

para todo $0 \leq x \leq \delta$, y para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Si además escogemos n tal que $\frac{\pi}{2n} < \delta$, tenemos

$$\left| s_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) - \int_0^{\pi} \frac{\text{sen } t}{t} dt \right| < \epsilon,$$

o lo que es lo mismo, recordando que $P = \int_{\pi}^{\infty} \frac{\text{sen } t}{t} dt \approx -0,2811 < 0$,

$$\left| s_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) - \left(\frac{\pi}{2} + \left| \int_{\pi}^{\infty} \frac{\text{sen } t}{t} dt \right| \right) \right| < \epsilon.$$

Esta última expresión nos dice que las aproximaciones $s_n(x)$, para n suficientemente grande y $x > 0$, exceden $\frac{\pi}{2} = f(x)$ por un valor cercano a $|P| \approx 0,2811$.

Teorema 3.38. *Sea f una función de variación acotada que presenta una discontinuidad aislada en $x = a$, y tal que $f(a + 0) > f(a - 0)$. Entonces, empleando las notaciones anteriores,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = f(a + 0) - DP/\pi, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} m_n = f(a - 0) + DP/\pi. \quad (3.13)$$

En otras palabras, f exhibe el fenómeno de Gibbs en $x = a$.

Demostración. Demostraremos sólo la primer parte de (3.13), siendo la otra completamente análoga. Comenzamos definiendo

$$\phi(x - a) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)} \operatorname{sen} [(2k-1)(x-a)].$$

Entonces,

$$\phi(x - a) = \begin{cases} \pi/2, & a < x < \pi + a, \\ -\pi/2, & -\pi + a < x < a, \end{cases}$$

y se tiene que $\phi(+0) = \pi/2$, $\phi(-0) = -\pi/2$, $\phi(0) = 0$ y $\phi(x) = \phi(x + 2\pi)$.

Sea

$$\gamma(x) = f(x) - \frac{1}{2}[f(a+0) - f(a-0)] - \frac{1}{\pi}[f(a+0) - f(a-0)]\phi(x-a), \quad (3.14)$$

y definamos $f(x)$, cuando $x = a$, como $\frac{1}{2}[f(a+0) + f(a-0)]$. Entonces se tiene que $\gamma(a+0) = \gamma(a-0) = \gamma(a) = 0$, y que $\gamma(x)$ es continua en $x = a$. Numeramos los siguientes argumentos de I a V para mayor claridad.

I. Como $\gamma(x)$ es continua en $x = a$, y $\gamma(a) = 0$, dado $\epsilon > 0$ existe $0 < \delta < \epsilon$ tal que $|\gamma(x)| < \epsilon/4$ siempre que $|x - a| \leq \delta$.

II. Al ser f de variación acotada, es evidente que ϕ también lo es. Por lo tanto, la serie de Fourier de $\gamma(x)$ será uniformemente convergente en un intervalo $[\alpha, \beta]$, el cual no contiene ninguna otra discontinuidad de $f(x)$ ni de $\phi(x)$ que $x = a$. Sean ahora $s_n(x)$, $\phi_n(x-a)$, $\gamma_n(x)$ las sumas parciales de las series de Fourier de $f(x)$, $\phi(x-a)$ y $\gamma(x)$, respectivamente. Sabemos entonces que existe $n_1 \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$|\gamma_n(x) - \gamma(x)| < \epsilon/4,$$

para todo $n \geq n_1$, y para todo $\alpha \leq x \leq \beta$. Además,

$$|\gamma_n(x)| \leq |\gamma_n(x) - \gamma(x)| + |\gamma(x)| < \epsilon/4 + \epsilon/4 = \epsilon/2$$

para todo $|x - a| \leq \delta$, con $\alpha < a - \delta < a < a + \delta < \beta$, y $n \geq n_1$.

III. Si n es par, el primer máximo de $\phi_n(x-a)$ a la derecha de $x = a$ se alcanza en $M = a + \pi/n$. Si n es impar, será en $M = a + \pi/(n+1)$. En cualquier caso, existe $n_2 \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$\left| \phi(M) - \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt \right| < \frac{\pi\epsilon}{2[f(a+0) - f(a-0)]},$$

para todo $n \geq n_2$.

3.4. CONSTANTES DE LEBESGUE

IV. Sea $n_3 \in \mathbb{N}_0$ tal que $\pi/n_3 < \delta$.

V. En el intervalo $[a + \delta, \beta]$, $s_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$. Sabemos entonces que existe $n_4 \in \mathbb{N}_0$ tal que $|f(x) - s_n(x)| < \epsilon$ para todo $n \geq n_4$, y para todo x en este intervalo.

De (3.14), se obtiene

$$s_n(x) = \frac{1}{2}(f(a+0) + f(a-0)) + \frac{f(a+0) - f(a-0)}{\pi} \phi_n(x-a) + \gamma_n(x).$$

Ahora, si $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3, n_4\}$, se sigue de I-V que la curva $s_n(x)$, cuando $n \geq n_0$, en el intervalo $[a, \beta]$, se comporta de la siguiente manera:

Cuando $x = a$, se tiene que $|s_n(a) - \frac{1}{2}[f(a+0) + f(a-0)]| < \epsilon/2$. Luego la curva asciende hasta algún punto x a distancia menor que ϵ de

$$\frac{1}{2}[f(a+0) + f(a-0)] + \frac{f(a+0) - f(a-0)}{\pi} \int_0^\pi \frac{\text{sen } t}{t} dt.$$

Podemos reescribir la última expresión como

$$f(a+0) - \frac{f(a+0) - f(a-0)}{\pi} \int_\pi^\infty \frac{\text{sen } t}{t} dt,$$

lo cual finaliza la demostración. Una vez alcanzada esta altura, la curva oscila alrededor de $f(x)$ hasta que x alcanza el valor $a + \delta$. Sobre el intervalo $[a + \delta, \beta]$, la curva permanece en la bola de radio $\epsilon/2$ alrededor de $f(x)$. \square

3.4. Constantes de Lebesgue

Definición 3.39. [16] *Denominamos constantes de Lebesgue a los números*

$$L_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left| \frac{\text{sen}[(n+1/2)t]}{2 \text{sen } t/2} \right| dt.$$

Es claro que si $|f| \leq 1$, entonces

$$|S_n(x; f)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)| |D_n(t)| dt \leq L_n,$$

para todo x . Si tomamos $f(t) = \text{sign}(D_n(t))$, tendremos $S_n(0; f) = L_n$. Si bien $D_n(t)$ es discontinua en un número finito de puntos, dado $\epsilon > 0$, podemos modificar esta función cerca de los puntos de discontinuidad y obtener una función f continua de manera que $S_n(0; f) > L_n - \epsilon$. Concluimos que L_n , para cada $n \in \mathbb{N}_0$, es:

- el máximo de $|S_n(x; f)|$ para todo x y para toda f tal que $|f| \leq 1$;
- el supremo de $|S_n(x; f)|$ para todo x y para toda f continua tal que $|f| \leq 1$.

Proposición 3.40. [16] *Las constantes de Lebesgue satisfacen*

$$L_n = 4\pi^{-2} \log n + O(1).$$

Demostración. Observemos que la función $\frac{1}{t} - \frac{1}{2} \cot t/2$ es acotada para $|t| < \pi$. Como $|D_n(t) - D_n^*(t)| \leq 1/2$, y,

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |D_n^*(t)| dt + O(1) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{|\operatorname{sen} nt|}{t} dt + O(1) \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} \frac{|\operatorname{sen} nt|}{t} dt + O(1) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/n} \operatorname{sen} nt \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{t + k\pi/n} \right) dt + O(1). \end{aligned}$$

En la última igualdad utilizamos que $|\operatorname{sen}[nt + k\pi]| = |\operatorname{sen} nt|$. También hemos incluido en $O(1)$ al caso $k = 0$ de la sumatoria de la última expresión. Si tenemos en cuenta que t se mueve en el intervalo $(0, \pi/n)$, deducimos que

$$n\pi^{-1} \sum_{j=1}^{n-1} 1/j \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{t + k\pi/n} \leq n\pi^{-1} \sum_{j=2}^n 1/j,$$

con lo cual

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{t + k\pi/n} = n\pi^{-1} [\log n + O(1)].$$

La demostración termina observando que $\int_0^{\pi/n} \operatorname{sen} nt dt = 2/n$. □

Capítulo 4

Métodos de sumabilidad

1. *Sumabilidad de series numéricas.* Matrices regulares.
2. *Sumabilidad (C,k) .* Medias aritméticas de Cesáro de orden k .
3. *Sumabilidad Abel.* Relación entre los diversos métodos de sumabilidad.
4. *Teoremas Tauberianos.* ¿Cuándo un método de sumabilidad implica sumabilidad usual? Teorema de Tauber. Teorema de Littlewood.
5. *Sumabilidad de $S[f]$ y de $\tilde{S}[f]$.* Núcleos de sumabilidad.
6. *Medias $(C,1)$ de $S[f]$ y de $\tilde{S}[f]$.* Núcleo de Fejér. Teorema de Fejér. Teorema de aproximación de Weierstrass.
7. *Sumabilidad Abel de $S[f]$ y de $\tilde{S}[f]$.* Núcleo de Poisson. Extensión armónica.
8. *Convergencia en norma.*
9. *Funciones trigonométricas especiales.*

En este capítulo generalizaremos la definición de convergencia de una serie, de manera que una serie que diverge en el sentido habitual, puede ser convergente en nuestro nuevo marco de trabajo. Haremos esto mediante matrices reales infinitas que cumplen ciertas condiciones. Luego de ver los teoremas y propiedades básicas de estos *métodos de sumabilidad*, veremos que las nuevas convergencias, y algunas hipótesis específicas, implicarán la convergencia usual. Esto último será de gran utilidad para aplicar todas estas ideas al estudio de la convergencia de la serie de Fourier de una función. Hacia el final del capítulo veremos algunas cuestiones sobre la convergencia en norma.

4.1. Sumabilidad de series numéricas

Consideremos una matriz real infinita $M = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}_0}$. A cada sucesión $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$, le asociamos otra sucesión $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ dada por:

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} s_k, \quad (4.1)$$

siempre suponiendo que (4.1) converge.

Definición 4.1. [16] Si existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = s$, diremos que la sucesión $\{s_k\}$ es sumable M con límite s . Decimos también que los elementos de $\{\sigma_n\}$ son las medias lineales de $\{s_k\}$, determinadas por M .

Supongamos también que los números $N_n := \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}|$ y $A_n := \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}$ existen y son finitos para todo n .

Definición 4.2. [16] Diremos que la matriz M es regular si se satisfacen las siguientes condiciones:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = 0$, para todo k ;
- (ii) $\{N_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ es un conjunto acotado;
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 1$.

Si $a_{ij} \geq 0$ para todo $i, j \in \mathbb{N}_0$, la condición (ii) es consecuencia de (iii), y diremos que M es una matriz positiva.

Teorema 4.3. [16] Si M es una matriz regular, y si $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = s$, con $s \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = s$.

Demostración. Supongamos que $s_k = s + \epsilon_k$, con $\epsilon_k \in \mathbb{R}$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_k = 0$, y sea $\sigma_n = \sigma'_n + \sigma''_n$, con

$$\sigma'_n = sA_n, \quad \sigma''_n = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k a_{nk}.$$

Por la condición (iii) es claro que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma'_n = s$. Sea $N = \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \{N_n\}$ y, si $\tau > 0$, sea $k_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $|\epsilon_k| < \tau/2N$, para todo $k \geq k_0$. Entonces

$$|\sigma''_n| \leq \sum_{k=0}^{k_0} |\epsilon_k| |a_{nk}| + \frac{\tau}{2N} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |a_{nk}|.$$

La primer suma de la derecha tiende a cero por la condición (i), y por tanto es menor que $\tau/2$ para $n \geq n_0$, para algún $n_0 \in \mathbb{N}_0$. El término de la derecha será también menor que $\tau/2$, y queda demostrado el teorema. \square

Teorema 4.4. [16] Sea M una matriz regular y positiva, entonces

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} s_k \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sigma_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma_n \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} s_k, \quad (4.2)$$

para cualquier sucesión $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ para la cual $\sigma_n \in \mathbb{R}$, para todo n .

Demostración. Para probar la desigualdad de la derecha podemos suponer que $\limsup_{k \rightarrow \infty} s_k = s^*$, con $s^* < +\infty$. Sea $\alpha > s^*$. Entonces existe k_0 tal que $s_k < \alpha$, para todo $k \geq k_0$ y, por (i),

$$\sigma_n \leq o(1) + \alpha \sum_{k=k_0+1}^{\infty} a_{nk} = o(1) + \alpha(A_n + o(1)). \quad (4.3)$$

No es difícil verificar (4.3) utilizando la definición de la o -pequeña. Se sigue entonces que, por (iii), $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma_n \leq \alpha$, y, por tanto, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma_n \leq s^*$. La primer igualdad de (4.2) se demuestra similarmente. \square

4.2. Sumabilidad (C, k)

Teorema 4.5. [16] Sean $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ y $\{q_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ dos sucesiones, con $q_j \geq 0$ para todo $j \in \mathbb{N}_0$. Sean

$$P_n := \sum_{i=0}^n p_i, \quad Q_n := \sum_{j=0}^n q_j,$$

con $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = \infty$. Entonces, si $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n/q_n = s$, se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n/Q_n = s$.

Demostración. Sean $s_k = p_k/q_k$, y $\sigma_n = P_n/Q_n$. Entonces las σ_n son medias lineales de $\{s_k\}$ respecto de la matriz M dada por los coeficientes

$$a_{nk} = \begin{cases} q_k/Q_n, & \text{si } k \leq n \\ 0, & \text{si } k > n. \end{cases}$$

Claramente la matriz es positiva, por lo cual bastará verificar las condiciones (i) y (iii) para comprobar que es regular. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = \infty$, (i) es claro. Para ver la condición (iii), observamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_{nk} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

Basta aplicar entonces el Teorema 4.4. Observar que en este caso s puede ser infinito. □

En particular, tomando $q_k = 1$ para todo k , obtenemos el resultado clásico de Cauchy: si $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = s$, entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k s_j = s$. Dada una sucesión $\{s_n\}$ utilizaremos de aquí en adelante las sucesiones asociadas siguientes, para cada $k \in \mathbb{N}_0$:

$$S_n^0 = s_n; \quad S_n^k = \sum_{j=0}^n S_j^{k-1},$$

$$A_n^0 = 1; \quad A_n^k = \sum_{j=0}^n A_j^{k-1}.$$

Definición 4.6. [16] Diremos que la sucesión $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ (o la sucesión cuyas sumas parciales son s_k) es (C, k) -sumable con límite (o suma) s si $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^k/A_n^k = s$.

La sumabilidad $(C, 0)$ es la convergencia ordinaria. La sumabilidad $(C, 1)$ es la convergencia de

$$c_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s_k.$$

Proposición 4.7. [16] Si una sucesión $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ es (C, k) -sumable, entonces también es $(C, k+1)$ -sumable al mismo límite.

Demostración. Basta aplicar el Teorema 4.5 con $p_n = S_n^k$ y $q_n = A_n^k$. □

Observemos que el recíproco no es cierto en general. Si tomamos, por ejemplo, la sucesión dada por $s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1}$, habrá sumabilidad $(C, 1)$ con límite $1/2$, pero evidentemente no tendremos la convergencia usual.

En los resultados subsiguientes utilizaremos el siguiente resultado sobre productos de series.

Definición 4.8. [1] Dadas dos series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, definimos

$$c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k},$$

para todo n . Diremos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ es el producto de Cauchy de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Teorema 4.9 (Mertens [1]). Supongamos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolutamente y tiene suma A , y que $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge con suma B . Entonces el producto de Cauchy de estas dos series converge y tiene suma AB .

Demostración. Sean

$$A_n := \sum_{k=0}^n a_k, \quad B_n := \sum_{k=0}^n b_k, \quad C_n := \sum_{k=0}^n c_k,$$

donde c_k es como en la Definición 4.8. Sean también $d_n := B - B_n$ y $e_n := \sum_{k=0}^n a_k d_{n-k}$. Entonces,

$$C_p = \sum_{n=0}^p \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{n=0}^p \sum_{k=0}^p f_n(k), \tag{4.4}$$

donde

$$f_n(k) = \begin{cases} a_k b_{n-k}, & \text{si } n \geq k \\ 0, & \text{si } n < k. \end{cases}$$

Entonces podemos reescribir (4.4) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} C_p &= \sum_{k=0}^p \sum_{n=0}^p f_n(k) = \sum_{k=0}^p \sum_{n=k}^p a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^p a_k \sum_{m=0}^{p-k} b_m = \sum_{k=0}^p a_k B_{p-k} \\ &= \sum_{k=0}^p a_k (B - d_{p-k}) = A_p B - e_p. \end{aligned}$$

4.2. SUMABILIDAD (C, K)

Para completar la demostración, será suficiente probar que $\lim_{p \rightarrow \infty} e_p = 0$. La sucesión $\{d_n\}$ converge a cero claramente, y podemos escoger $M > 0$ tal que $|d_n| < M$, para todo n . Sea $K = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$. Dado $\epsilon > 0$, sea N tal que $|d_n| < \epsilon/2K$, para todo $n > N$, y tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| < \epsilon/2M.$$

Entonces, para $p > 2N$, tenemos

$$\begin{aligned} |e_p| &\leq \sum_{k=0}^N |a_k d_{p-k}| + \sum_{k=N+1}^p |a_k d_{p-k}| \leq \frac{\epsilon}{2K} \sum_{k=0}^N |a_k| + M \sum_{k=N+1}^p |a_k| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2K} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| + M \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \end{aligned}$$

Deducimos entonces que $\lim_{p \rightarrow \infty} C_p = AB$. □

Definición 4.10. [12] Sea $\beta \in \mathbb{R}$, y $k \in \mathbb{N}_0$. Los coeficientes binomiales vienen dados por:

$$\binom{\beta}{k} = \begin{cases} \beta(\beta-1)\dots(\beta-k+1)/k!, & \text{si } k \neq 0 \\ 1, & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

Lema 4.11. [12] Si $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$.

Demostración. Es inmediato desarrollando la serie de Taylor de la función $f(x) = (1+x)^\alpha$. □

Proposición 4.12. [16] Si $C_n = \sum_{k=0}^n c_k$ para todo n y $|x| < 1$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n,$$

suponiendo que alguna de las dos series converge.

Demostración. Si la serie de la derecha converge, el resultado es inmediato efectuando la multiplicación. Si suponemos que $|x| < 1$ y que la serie de la izquierda converge, entonces

$$(1-x)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n.$$

En la última igualdad hemos aplicado el Teorema 4.9. □

Proposición 4.13. [16] Si A_n^k y S_n^k están definidos como en la sumabilidad Césaro de orden k , entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^k = (1-x)^{-k-1},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^k x^n = (1-x)^{-k-1} \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n,$$

donde cada s_k es la k -ésima suma parcial de la sucesión $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Demostración. Utilizando la proposición anterior se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^k x^n = (1-x)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{k-1} x^n = (1-x)^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{k-2} x^n = \dots = (1-x)^{-k-1}$$

y también

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^k x^n = (1-x)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{k-1} x^n = (1-x)^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{k-2} x^n = \dots = (1-x)^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} S_n^0 x^n.$$

□

La idea de la proposición anterior es generalizar nuestra definición de sumabilidad (C, k) para números reales, como veremos a continuación.

Definición 4.14. [16] Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Una sucesión $\{s_k\}$ (o una serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ cuyas sumas parciales son s_k) es (C, α) -sumable con límite (o suma) s , si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^\alpha / A_n^\alpha = s,$$

donde A_n^α y S_n^α vienen dados implícitamente por las fórmulas

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^\alpha x^n = (1-x)^{-\alpha-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^\alpha x^n = (1-x)^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = (1-x)^{-\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n.$$

Veamos que efectivamente estas fórmulas nos definen los A_n^α y S_n^α :

Proposición 4.15. [3] Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}_0$, se tiene que

$$A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n},$$

$$S_n^\alpha = \sum_{k=0}^n \binom{n-k+\alpha-1}{n-k} s_k.$$

Demostración. Como

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^\alpha x^n = (1-x)^{-\alpha-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1-\alpha}{n} x^n,$$

obtenemos que

$$A_n^\alpha = (-1)^n \binom{-1-\alpha}{n} = \binom{n+\alpha}{n}.$$

Esta última igualdad es inmediata a partir de la definición de coeficiente binomial. Similarmente,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} S_n^\alpha x^n &= (1-x)^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} S_n^0 x^n \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\alpha}{k} x^k \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha+k-1}{k} x^k \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{\alpha+n-k-1}{n-k} s_k x^n, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos aplicado el producto de Cauchy. Se deduce entonces que

$$S_n^\alpha = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha+n-k-1}{n-k} s_k.$$

□

Proposición 4.16. [16] Sean A_n^α y S_n^α como antes. Entonces se cumplen las siguientes identidades:

$$(i) \quad A_n^{\alpha+\beta+1} = \sum_{k=0}^n A_k^\alpha A_{n-k}^\beta;$$

$$(ii) \quad S_n^{\alpha+\beta+1} = \sum_{k=0}^n S_k^\alpha A_{n-k}^\beta;$$

$$(iii) \quad u_n = \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{-\alpha-2} S_k^\alpha.$$

Demostración. Para ver (i) observamos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{\alpha+\beta+1} x^n &= (1-x)^{-\alpha-1-\beta-1} = (1-x)^{-\alpha-1} (1-x)^{-\beta-1} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n^\alpha x^n \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k^\beta x^k \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n A_k^\alpha A_{n-k}^\alpha x^n, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos aplicado el producto de Cauchy. Las identidades restantes se demuestran de manera similar. □

Lema 4.17. [16] *Los coeficientes A_n^α satisfacen*

$$A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n} \simeq \frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Demostración. Tomamos la definición de Euler de la función Gamma sobre el plano complejo: $\Gamma(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}$. Es fácil verificar que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, y usando esto podemos reescribir el coeficiente binomial como $\binom{n+\alpha}{n} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)}$. Como de la definición de la función Gamma se desprende que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^\alpha}{\Gamma(n+\alpha+1)} = 1,$$

obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{\binom{n+\alpha}{n}\Gamma(\alpha+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha n! \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)} = 1,$$

que es lo que queríamos probar. □

Teorema 4.18. [16] *Si una serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ es (C, α) -sumable, con $\alpha > -1$ y suma s , entonces también es $(C, \alpha+h)$ -sumable a s , para todo $h > 0$.*

Demostración. Sean σ_n^α las medias de Césaro de la serie, es decir, $\sigma_n^\alpha = S_n^\alpha / A_n^\alpha$. Utilizando el segundo apartado de la Proposición 4.16, y que $S_k^\alpha = A_k^\alpha \sigma_k^\alpha$, tenemos

$$\sigma_n^{\alpha+h} = \frac{\sum_{k=0}^n A_{n-k}^{h-1} S_k^\alpha}{A_n^{\alpha+h}} = \frac{\sum_{k=0}^n A_{n-k}^{h-1} A_k^\alpha \sigma_k^\alpha}{A_n^{\alpha+h}}.$$

Observemos ahora que las $\sigma_n^{\alpha+h}$ son medias lineales de σ_n^α respecto a la matriz M cuyos coeficientes son

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{A_{n-k}^{h-1} A_k^\alpha}{A_n^{\alpha+h}}, & \text{si } k \leq n \\ 0, & \text{si } k > n. \end{cases}$$

Por el Teorema 4.3, nos bastará verificar que M es una matriz regular. La condición (i) es consecuencia del Lema 4.17 (teniendo en cuenta que $\alpha > -1$ y $h > 0$), mientras que (iii) se cumple pues

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = \sum_{k=0}^n \frac{A_{n-k}^{h-1} A_k^\alpha}{A_n^{\alpha+h}} \\ &= \frac{1}{A_n^{\alpha+h}} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{h-1} A_k^\alpha \\ &= \frac{A_n^{\alpha+h}}{A_n^{\alpha+h}} = 1, \end{aligned}$$

para todo n . Es sencillo verificar que M es una matriz positiva ya que $h > 0$ y $\alpha > -1$, y por tanto (ii) es consecuencia de (iii). □

Teorema 4.19. [16] *Supongamos que una serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ es (C, α) -sumable, con $\alpha > -1$ y suma finita. Entonces $u_n = o(n^\alpha)$.*

Demostración. Por el lema anterior, será suficiente demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n/A_n^\alpha = 0$. Para ello observamos que

$$\frac{u_n}{A_n^\alpha} = \frac{\sum_{k=0}^n A_{n-k}^{-\alpha-2} S_k^\alpha}{A_n^\alpha} = \frac{\sum_{k=0}^n A_{n-k}^{-\alpha-2} A_k^\alpha \sigma_k^\alpha}{A_n^\alpha},$$

de manera que, como en el teorema anterior, u_n/A_n^α son medias lineales de σ_k^α con respecto a la matriz M cuyos coeficientes vienen dados por

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{A_{n-k}^{-\alpha-2} A_k^\alpha}{A_n^\alpha}, & \text{si } k \leq n \\ 0, & \text{si } k > n. \end{cases}$$

Podemos suponer que $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k^\alpha = 0$ ya que restando una constante a u_0 , $\sum u_n$ es (C, α) -sumable con suma 0. Nos bastará entonces mostrar que M es una matriz regular. La condición (i) se verifica utilizando el Lema 4.17 junto con $\alpha > -1$. Para ver (ii), supongamos primero que $\alpha \geq 0$. Como $A_n^\alpha \geq A_k^\alpha > 0$, tenemos

$$N_n \leq \sum_{k=0}^n |A_{n-k}^{-\alpha-2}| = \sum_{k=0}^n |A_k^{-\alpha-2}| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |A_k^{-\alpha-2}| < \infty,$$

donde en la última desigualdad hemos hecho uso del Lema 4.17. Si $-1 < \alpha < 0$, tenemos que $A_0^{-\alpha-2} = 1$ y que $A_k^{-\alpha-2} < 0$ para $k \geq 1$. Por lo tanto

$$N_n = \sum_{k=0}^n \left| \frac{A_{n-k}^{-\alpha-2} A_k^\alpha}{A_n^\alpha} \right| = 2 - \sum_{k=0}^n \frac{A_{n-k}^{-\alpha-2} A_k^\alpha}{A_n^\alpha} = 2 - \frac{A_n^{-1}}{A_n^\alpha} = 2,$$

donde en la penúltima igualdad hemos utilizado la Proposición 4.16. Si miramos la demostración del Teorema 4.3, observamos que la condición (iii) es superflua al ser $s = 0$, con lo cual hemos terminado la demostración. \square

Teorema 4.20 (Hardy [16]). *Si una serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ es $(C, 1)$ -sumable, y si $u_k = O(1/k)$, entonces la serie es convergente.*

Demostración. Sea $\sigma_{n,k} := \frac{1}{k} \sum_{j=n}^{n+k-1} s_j$. Si ponemos $\sigma_n := \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n s_j$, se tiene la siguiente igualdad

$$\sigma_{n,k} = \frac{(n+k)\sigma_{n+k-1} - n\sigma_{n-1}}{k} = \left(1 + \frac{n}{k}\right) \sigma_{n+k-1} - \frac{n}{k} \sigma_{n-1}. \quad (4.5)$$

Por otro lado, no es difícil verificar que $\sigma_{n,k} = s_n + \sum_{j=n+1}^{n+k-1} \left(1 - \frac{j-n}{k}\right) u_j$, donde interpretamos que la suma de la derecha es nula si $k = 1$. De (4.5) se desprende que si $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, entonces

$\lim_{n,k \rightarrow \infty} \sigma_{n,k} = s$ siempre que n/k sea acotado. Como por hipótesis tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = s$ y que existe $A > 0$ tal que $|u_k| < A/n$ para todo k ,

$$|\sigma_{n,k} - s_n| \leq \sum_{j=n+1}^{n+k-1} |u_j| \leq A \sum_{j=n+1}^{n+k-1} \frac{1}{k} < A \frac{k-1}{n}. \quad (4.6)$$

Sea $\epsilon > 0$, y tomemos $k = [n\epsilon] + 1$. En (4.6) tenemos $A[n\epsilon]/n \leq A\epsilon$, y como $n/k < 1/\epsilon$, sabemos que $\lim_{n,k \rightarrow \infty} \sigma_{n,k} = s$. Se deduce entonces que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ □

4.3. Sumabilidad Abel

Definición 4.21. [16] Decimos que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ es sumable Abel con suma s si la serie $\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k$ converge para $|x| < 1$, y

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k = s,$$

donde x tiende a 1 por izquierda.

Por la Proposición 4.12, podemos definir, similarmente, la sumabilidad Abel para una sucesión $\{s_k\}$ como la existencia de

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k.$$

El siguiente teorema nos dice que la sumabilidad Abel es más débil que la sumabilidad (C, α) .

Teorema 4.22. [16] Si una serie $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ es (C, α) -sumable, con $\alpha > 1$ y suma s (finita o no), entonces es sumable Abel.

Demostración. Sea $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k$ y sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ una sucesión de números reales tales que $x_n < 1$ para todo n y $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$. Por la Proposición 4.13 tenemos

$$f(x_n) = (1-x_n)^{\alpha+1} \sum_{k=0}^{\infty} S_k^{\alpha} x_n^k = (1-x_n)^{\alpha+1} \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k^{\alpha} A_k^{\alpha} x_n^k. \quad (4.7)$$

La expresión de la derecha es una media lineal de $\{\sigma_k^{\alpha}\}$, y corresponde a la matriz M con coeficientes $a_{nk} = A_k^{\alpha} (1-x_n)^{\alpha+1} x_n^k$. Podemos suponer que $x_n > 0$ para todo n , y es fácil verificar que M es positiva y cumple con las condiciones (i) y (iii). Por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = s$ y el teorema queda demostrado. □

De aquí en adelante llamaremos *media de Abel* a la función f definida en (4.7).

4.4. Teoremas Tauberianos

A continuación estudiamos los denominados Teoremas Tauberianos. Estos teoremas nos dan condiciones suficientes para que una serie sumable por determinado método sea sumable en el sentido usual.

Teorema 4.23 (Tauber [16]). Sean $\{s_n\}$ y $f(x)$ las sumas parciales y la media de Abel de una serie $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$. Supongamos además que $u_n = o(1/n)$. Entonces, si $N := \left\lceil \frac{1}{1-x} \right\rceil$,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (f(x) - s_N) = 0. \quad (4.8)$$

En particular, la serie es sumable Abel si, y solo si, ésta converge.

Probaremos también que si reemplazamos la condición $u_n = o(1/n)$ por $\sum_{k=1}^n k u_k = o(n)$, el resultado sigue siendo cierto.

Demostración. Ponemos $\eta_n := n u_n$ y suponemos primero que $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = 0$. Tenemos entonces que

$$f(x) - s_N = \sum_{n=1}^N u_n (x^n - 1) + \sum_{N+1}^{\infty} u_n x^n = P + Q.$$

Observando que $N \leq 1/(1-x) < N+1$ y que $1-x^n \leq n(1-x)$, las siguientes desigualdades son claras:

$$|P| \leq (1-x) \sum_{n=1}^N |\eta_n| \leq N^{-1} \sum_{n=1}^N |\eta_n|, \quad (4.9)$$

$$|Q| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\eta_n}{n} x^n \leq (N+1)^{-1} \max_{n>N} |\eta_n| \sum_{n=N+1}^{\infty} x^n \leq \frac{1}{(N+1)(1-x)} \max_{n>N} |\eta_n|. \quad (4.10)$$

Es evidente que la última expresión en (4.10) se hace arbitrariamente pequeña cuando hacemos crecer N . En (4.9), tomamos, para cualquier $\epsilon > 0$, n_0 tal que $u_n < \epsilon/2n$, para todo $n \geq n_0$. Sea N_0 tal que $N^{-1} \sum_{n=1}^{n_0} n |u_n| < \epsilon/2$. Ahora,

$$N^{-1} \sum_{n=1}^N |\eta_n| = N^{-1} \sum_{n=1}^{n_0} n |u_n| + N^{-1} \sum_{n=n_0+1}^N n |u_n| \leq \frac{\epsilon}{2} + \sum_{n=n_0+1}^N \frac{\epsilon}{2N} \leq \epsilon$$

Podemos concluir que $\lim_{x \rightarrow 1^-} (P+Q) = 0$, y se deduce el resultado. Por otro lado, sea $v_0 := 0$ y

$v_n = \sum_{k=1}^n k u_k$. Supongamos entonces que $v(n) = o(n)$. Es fácil verificar que

$$\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + \sum_{k=1}^n \frac{v_k - v_{k-1}}{k} = u_0 + \sum_{k=1}^n \frac{v_k}{k(k+1)} + \frac{v_n}{n+1}.$$

Como $v_n = o(n)$, las series $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ y $u_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_k}{k(k+1)}$ son equiconvergentes, y por tanto, si t_N y $g(x)$ son las sumas parciales y la media de Abel de esta última serie, no es difícil ver que $\lim_{N \rightarrow \infty} (t_N - s_N) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 1^-} (f(x) - g(x)) = 0$. Como los términos de la segunda serie son $o(1/n)$, por el caso anterior, obtenemos que $\lim_{x \rightarrow 1^-} (g(x) - t_N) = 0$. Es inmediato deducir (4.8). \square

Teorema 4.24 (Littlewood [16]). *Si una serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ es sumable Abel y $u_n \in O(1/n)$, entonces la serie converge.*

Demostración. Podemos suponer que $|u_n| \leq 1/n$ y que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$, donde $f(x)$ es la media de Abel de la serie. Para cualquier polinomio $P(x)$ sin término constante, tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} u_n P(x^n) = 0,$$

ya que para cualquier $k > 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^{nk} = x^k \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$. Supongamos que dados dos números $0 < \nu_1 < \nu_2 < 1$, y $\delta > 0$, podemos encontrar un polinomio $P(x)$ tal que

- (a) $0 \leq P(x) \leq 1$ en $(0, 1)$,
- (b) $P(x) \leq \delta x$ en $(0, \nu_1)$,
- (c) $1 - P(x) \leq \delta(1 - x)$ en $(\nu_2, 1)$.

Veremos primero que esto implica la convergencia de la serie, y luego encontraremos un polinomio que cumple estas condiciones. Dado $0 < x < 1$, sea $N = N(x)$ el mayor entero positivo tal que $x^N \geq \nu_2$, y sea $N' = N'(x)$ el menor entero positivo tal que $x^{N'} \leq \nu_1$. Claramente N y N' son funciones que toman todos los valores enteros positivos de manera creciente para $x \in (0, 1)$. Además, $N < N'$ y es fácil ver que

$$N \simeq \frac{\log(1/\nu_2)}{\log(1/x)}, \quad N' \simeq \frac{\log(1/\nu_1)}{\log(1/x)}.$$

Para un polinomio P que satisface las condiciones anteriores, tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} u_n P(x^n) - s_N &= \sum_{n=1}^N u_n (P(x^n) - 1) + \sum_{n=N+1}^{N'} u_n P(x^n) + \sum_{n=N'+1}^{\infty} u_n P(x^n) \\ &= A(x) + B(x) + C(x). \end{aligned}$$

Utilizando las condiciones impuestas al polinomio P , es inmediato que

$$\begin{aligned} |A(x)| &\leq \delta \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} (1 - x^n) \leq \delta \sum_{n=1}^N (1 - x) = \delta N(1 - x), \\ |B(x)| &\leq \sum_{n=N+1}^{N'} \frac{1}{n} < \frac{N' - N}{N}, \\ |C(x)| &\leq \delta \sum_{n=N'+1}^{\infty} \frac{x^n}{n} < \frac{\delta}{N'(1 - x)}. \end{aligned}$$

4.5. SUMABILIDAD DE $S[F]$ Y DE $\tilde{S}[F]$

Por las expresiones asintóticas para N y N' , sabemos que si tomamos ν_1 y ν_2 suficientemente próximos y ambos lejos de 0 y 1 (podemos tomarlos simétricos respecto de $1/2$), entonces $\lim_{x \rightarrow 1} |B(x)| = 0$. Ahora, habiendo fijado ν_1 y ν_2 , y observando que $N(1-x)$ y $N'(1-x)$ tienden a valores distintos de cero, obtenemos que $\lim_{x \rightarrow 1} |A(x)| = \lim_{x \rightarrow 1} |C(x)| = 0$. Por lo tanto, como $\sum_{n=0}^{\infty} u_n P(x^n) = 0$, obtenemos que $\lim_{x \rightarrow 1} s_N = 0$. Proseguimos entonces a construir un polinomio P que satisfaga las condiciones. Como hemos visto, es suficiente suponer que $\nu_1 = \frac{1}{2} - \eta$ y $\nu_2 = \frac{1}{2} + \eta$. Sean entonces

$$R_k(x) = (4x(1-x))^k, \quad P(x) = \frac{\int_0^x R_k(t) dt}{\int_0^1 R_k(t) dt},$$

donde $k \in \mathbb{N}$. Claramente P satisface la condición (a). Además, como $R_k(x) \leq (1 - 4\eta^2)^k$ para $x \in (0, 1) \setminus (\nu_1, \nu_2)$, y

$$\int_0^1 R_k(t) dt \geq \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2k}} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)^k dt \simeq \frac{1}{k},$$

concluimos que

$$P(x) \leq x \frac{\text{máx}\{R_k(x) : 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \eta\}}{\int_0^1 R_k(t) dt} \leq \delta x,$$

para $x \in [0, \frac{1}{2} - \eta]$ y k suficientemente grande. Esto es la condición (b), y la (c) se demuestra de manera similar. \square

4.5. Sumabilidad de $S[f]$ y de $\tilde{S}[f]$

Dada una sucesión $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, consideramos las medias lineales $\sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} s_k$ generadas por una matriz M que satisface las condiciones de regularidad de la Definición 4.2. Si los s_k son las sumas parciales de una serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ y ponemos $s_k = \sum_{n=1}^k u_n$ podemos obtener, bajo ciertas condiciones, que $\sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} u_k$, donde $\alpha_{nk} = \sum_{i=0}^{\infty} a_{n(k+i)}$. Estas son medias lineales que corresponden a la matriz de coeficientes α_{nk} . De aquí en adelante trabajaremos directamente con estas medias lineales y supondremos como hipótesis que $\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_{nk}| < \infty$, para todo n .

Denotaremos a las medias lineales de $1/2 + \sum_{k=1}^{\infty} \cos kt$ y de $\sum_{k=1}^{\infty} \sin kt$ por

$$K_n(t) = \frac{1}{2} \alpha_{n0} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} \cos kt,$$

$$\tilde{K}_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} \sin kt,$$

respectivamente. Ambas son continuas y es claro que K es una función par, y \tilde{K} es una función impar. Observemos que si trabajamos con la matriz M , es fácil verificar que:

$$K_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} D_k(t) = \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \operatorname{sen} \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) t \right),$$

$$\tilde{K}_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \tilde{D}_k(t) = A_n \frac{1}{2} \cot \frac{t}{2} - \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} \cos \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) t \right),$$

donde $A_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}$, y D_k y \tilde{D}_k son el núcleo de Dirichlet y el núcleo de Dirichlet conjugado, respectivamente.

Definición 4.25. [16] Sean a_k, b_k coeficientes de Fourier de una función f . Las medias lineales de $S[f]$ y $\tilde{S}[f]$ vienen dadas por

$$\sigma_n(x) = \sigma_n(x; f) = \frac{1}{2} a_0 \alpha_{n0} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx) \alpha_{nk},$$

$$\tilde{\sigma}_n(x) = \tilde{\sigma}_n(x; f) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \operatorname{sen} kx - b_k \cos kx) \alpha_{nk},$$

respectivamente.

Proposición 4.26. [16] Podemos representar las medias lineales de la serie de Fourier de una función f de la siguiente manera:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) K_n(t) dt,$$

$$\tilde{\sigma}_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \tilde{K}_n(t) dt.$$

Demostración. Utilizaremos la hipótesis que hemos mencionado anteriormente: $\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_{nk}| < \infty$, para todo n . Haremos uso de ella para intercambiar el orden de la serie y la integral en lo siguiente:

$$\begin{aligned} \alpha_{n0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos k(t-x) dt &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} \alpha_{n0} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} \cos k(t-x) \right] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n(t-x) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) K_n(t) dt. \end{aligned}$$

El caso conjugado se demuestra de manera similar. □

De aquí en adelante supondremos siempre que $\alpha_{n0} = 1$, para todo n , y diremos que esta es la condición (A). También podemos expresar esta condición de la manera siguiente:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt = 1. \tag{A}$$

Proposición 4.27. [16] *Si la condición (A) es cierta, tenemos que*

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi_x(t) K_n(t) dt.$$

Demostración. Haciendo uso, en la última igualdad, de la paridad de $K_n(t)$,

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x+t) K_n(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) K_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \{f(x+t) - f(x)\} K_n(t) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi_x(t) K_n(t) dt. \end{aligned}$$

□

Definición 4.28. [16] *Si $\{K_n\}$ satisface la condición (A) y la condición*

$$K_n \geq 0, \tag{B}$$

para todo n , diremos que $\{K_n\}$ es un núcleo positivo. Si, por otro lado, en lugar de (B) se satisface

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi |K_n(t)| dt \leq C, \tag{B'}$$

con C independiente de n , diremos que $\{K_n\}$ es un núcleo cuasipositivo.

Observación 4.29. *Todo núcleo positivo es cuasipositivo.*

Teorema 4.30. [16] *Supongamos que $\{K_n\}$ es un núcleo positivo, entonces para toda función f que satisface $m \leq f \leq M$, tenemos*

$$m \leq \sigma_n(x; f) \leq M.$$

Si K_n es cuasipositivo, entonces $|f| \leq M$ implica que

$$|\sigma_n(x; f)| \leq CM,$$

donde C es la misma que en la condición (B').

Demostración. Es consecuencia inmediata de la Proposición 4.26. □

Por último incluimos la condición (C) a continuación.

Definición 4.31. [16] *Sea $\mu_n(\delta) := \max_{\delta \leq t \leq \pi} |K_n(t)|$, con $0 < \delta \leq \pi$. Decimos que un núcleo $\{K_n\}$ satisface la condición (C) si $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\delta) = 0$, para cada $\delta \in (0, \pi]$.*

Si esta condición se satisface, el comportamiento de $\sigma_n(x)$ en el punto x depende solamente de los valores que toma f en un entorno arbitrariamente pequeño de x ya que, haciendo uso de la Proposición 4.26,

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^\delta f(x+t) K_n(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} f(x+t) K_n(t) dt, \tag{4.11}$$

y el último término de esta expresión es mayorado por

$$\mu_n(\delta) \frac{1}{\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |f(x+t)| dt \leq \mu_n(\delta) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi |f(t)| dt.$$

Esta última expresión tiende uniformemente a cero, siempre que $f \in L^1$.

Definición 4.32. [11] Si un núcleo satisface las condiciones (A), (B') y (C), diremos que es un núcleo de sumabilidad.

Teorema 4.33. [16] Supongamos que un núcleo $\{K_n\}$ satisface las condiciones (A), (B) y (C), y sea f una función integrable tal que $f(x_0 \pm 0)$ existen y son finitos. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)].$$

El resultado también es cierto si reemplazamos (B) por (B'). En particular, si f es continua en x_0 , tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x_0) = f(x_0)$. Además, si f es continua en todo punto de un intervalo cerrado $I = [\alpha, \beta]$, esto último se cumple uniformemente en I .

Demostración. Supongamos en primer lugar que $\{K_n\}$ es positivo. Cambiando el valor de $f(x_0)$ si hace falta, podemos suponer que $f(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)]$, de manera que $|\varphi_{x_0}(t)| < \epsilon/4$ para $0 \leq t \leq \delta = \delta(\epsilon)$. Haciendo uso de la Proposición 4.27, tenemos que

$$\begin{aligned} |\sigma_n(x_0; f) - f(x_0)| &\leq \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |\varphi(t)| K_n(t) dt = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^\delta |\varphi(t)| K_n(t) dt + \int_\delta^\pi |\varphi(t)| K_n(t) dt \right) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^\delta K_n(t) dt + \frac{2\mu_n(\delta)}{\pi} \int_\delta^\pi |\varphi(t)| dt \\ &< \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^\pi K_n(t) dt + \frac{2\mu_n(\delta)}{\pi} \int_0^\pi |\varphi(t)| dt = P + Q. \end{aligned}$$

Por la condición (A) tenemos que $P = \epsilon/2$, y por la condición (C) sabemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} Q = 0$, de manera que existe n_0 tal que $P + Q < \epsilon$, para todo $n > n_0$. Hemos demostrado la primera parte del teorema. Ahora supongamos que f es continua en todo punto de un intervalo $I = [\alpha, \beta]$. Podemos encontrar entonces un $\delta > 0$, que no depende de x_0 , tal que $|\varphi_{x_0}(t)| < \epsilon/4$, para $0 \leq t \leq \delta = \delta(\epsilon)$ y para todo $x_0 \in I$. Como antes, $P = \epsilon/2$, y

$$|Q| \leq \frac{2\mu_n(\delta)}{\pi} \int_0^\pi (|f(x_0 + t)| + |f(x_0 - t)| + 2|f(x_0)|) dt = \frac{2\mu_n(\delta)}{\pi} \left(\int_{-\pi}^\pi |f(t)| dt + 2\pi|f(x_0)| \right),$$

por lo cual $\lim_{n \rightarrow \infty} Q = 0$ uniformemente en I , y se deduce el resultado. Sólo se necesitan modificaciones menores al razonamiento anterior para el caso en que $\{K_n\}$ es cuasipositivo. En la desigualdad de $|\sigma_n - f|$ debemos reemplazar K_n por $|K_n|$, lo cual nos da, utilizando la notación anterior, $P \leq C\epsilon/2$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} Q = 0$, y se deduce el resultado como antes. \square

Teorema 4.34. [16] Sea K_n un núcleo positivo que satisface la condición (C), y que $m \leq f \leq M$, para todo $x \in I = (a, b)$. Entonces para todo $\epsilon > 0$ y $0 < \delta < (b - a)/2$, existe n_0 tal que $m - \epsilon \leq \sigma_n(x) \leq M + \epsilon$, para todo $n \geq n_0$ y $x \in I_\delta = (a + \delta, b - \delta)$.

Demostración. Demostraremos sólo la segunda desigualdad, el otro caso es análogo. Utilizando la expresión (4.11), tenemos que

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^\delta f(x+t) K_n(t) dt + o(1),$$

donde $o(1)$ es uniforme sobre x . Supongamos que $x \in I_\delta$. Entonces $x + t \in I$ para $|t| < \delta$, y esta última integral estará mayorada por

$$M \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^\delta K_n(t) dt \leq M \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi K_n(t) dt = M,$$

de lo cual se deduce el resultado. \square

Definición 4.35. [16] Dada una función $f(x)$, denotaremos por $M(a, b)$ y $m(a, b)$ al supremo e ínfimo respectivamente de f en el intervalo (a, b) . Para todo x en este intervalo ponemos

$$M(x) := \lim_{h \rightarrow 0^+} M(x-h, x+h), \quad m(x) := \lim_{h \rightarrow 0^-} m(x-h, x+h).$$

Estos límites existen, ya que $M(x-h, x+h)$ y $m(x-h, x+h)$ son funciones monótonas respecto de h . Diremos que $M(x)$ y $m(x)$ son el máximo y el mínimo de f en el punto x .

Teorema 4.36. [16] Sea $\{K_n\}$ un núcleo positivo que satisface la condición (C) . Entonces para cada sucesión $\{x_n\}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ tenemos

$$m(x_0) \leq \liminf \sigma_n(x_n) \leq \limsup \sigma_n(x_n) \leq M(x_0).$$

En particular, $\{\sigma_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ converge uniformemente en todo punto de continuidad de f .

Demostración. Si tomamos h suficientemente pequeño, $f(x) \in (m(x_0) - \epsilon, M(x_0) + \epsilon)$ para todo $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$. Por lo tanto, existe n_0 tal que, $\sigma_n(x_n) \in (m(x_0) - 2\epsilon, M(x_0) + 2\epsilon)$, para todo $n \geq n_0$, por el Teorema 4.34. \square

4.6. Medias $(C, 1)$ de $S[f]$ y de $\tilde{S}[f]$

El núcleo correspondiente al método $(C, 1)$ para la serie $1/2 + \sum_{k=1}^{\infty} \cos kt$ es

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{\sin((k + \frac{1}{2})t)}{2 \sin \frac{t}{2}}. \quad (4.12)$$

Multiplicando el numerador y el denominador de la expresión de la derecha por $2 \sin \frac{t}{2}$, y reemplazando el producto de senos en el numerador por diferencias de cosenos, obtenemos:

$$K_n(t) = \frac{1}{(n+1)} \frac{1 - \cos((n+1)t)}{(2 \sin \frac{t}{2})^2} = \frac{2}{n+1} \left(\frac{\sin(\frac{1}{2}(n+1)t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \right)^2. \quad (4.13)$$

En este último razonamiento hemos utilizado las identidades

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \}, \\ 1 - \cos \theta &= 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

Evidentemente el núcleo es positivo. De aquí en adelante utilizaremos el símbolo $K_n(t)$ para los elementos de este núcleo y lo denominaremos *Núcleo de Fejér*. Veamos algunas propiedades.

Proposición 4.37. [16] El núcleo de Fejér satisface las condiciones (A) , (B) y (C) .

Demostración. La condición (A) se sigue de la correspondiente propiedad del núcleo de Dirichlet, la condición (B) viene de (4.13), y (C) se deduce de la desigualdad

$$\mu_n(\delta) \leq \frac{1}{2(n+1) \sin^2 \frac{\delta}{2}}.$$

\square

En el siguiente teorema utilizaremos la siguiente notación, y la seguiremos utilizando de aquí en adelante, para denotar a la media $(C, 1)$ de $S[f]$:

$$\sigma_n(x) = \sigma_n(x; f) = \frac{2}{\pi(n+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left(\frac{\sin(\frac{1}{2}(n+1)t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt.$$

Teorema 4.38 (Fejér [16]). *En todo punto x_0 en el cual los límites $f(x_0 \pm 0)$ existen (y si ambos son infinitos, del mismo signo), entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)).$$

En particular, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x_0) = f(x_0)$ para todo punto x_0 de continuidad de f . La convergencia de σ_n es uniforme sobre todo intervalo cerrado de puntos de continuidad.

Demostración. El caso infinito es consecuencia del Teorema 4.30 y el caso finito se deduce del Teorema 4.33. □

El teorema de Fejér tiene un número importante de aplicaciones, algunas de las cuales damos a continuación:

Teorema 4.39. [16] *Si $S[f]$ converge en un punto x_0 de continuidad de f , entonces su suma ha de ser necesariamente $f(x_0)$. En general, si $S[f]$ converge en un punto de discontinuidad simple x_0 , entonces su suma será $s = \{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)\}/2$.*

Demostración. Como $S[f](x_0)$ es evidentemente sumable $(C, 1)$ a s por el Teorema de Fejér, en caso de convergencia su suma ha de ser s . □

Teorema 4.40 (Weierstrass [16]). *Si f es una función periódica y continua, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe un polinomio trigonométrico $T(x)$ tal que $|f(x) - T(x)| < \epsilon$, para todo x .*

Demostración. Se deduce del Teorema de Fejér, tomando $T(x) = \sigma_n(x; f)$ con n suficientemente grande. □

Teorema 4.41. [16] *El sistema trigonométrico es completo.*

Demostración. Simplificamos de manera considerable la demostración que habíamos dado en el Capítulo 2, ya que si todos los coeficientes de Fourier de una función continua son iguales a cero, entonces $\sigma_n(x; f) = 0$, para todo n (véase (3.1)), y por tanto $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x; f) = 0$. □

Teorema 4.42. [16] *Si $f(x)$ es acotada y sus coeficientes de Fourier son $O(1/n)$, entonces las sumas parciales de $S[f]$ están uniformemente acotadas.*

Demostración. El resultado se desprende del hecho de que los σ_n son uniformemente acotados (ver Teorema 4.30), y que, debido a la hipótesis sobre los coeficientes de Fourier, $s_n - \sigma_n$ es uniformemente acotado. □

Podemos aplicar estas ideas para demostrar de manera más sencilla un teorema que ya hemos visto en el capítulo anterior.

Teorema 4.43 (Dirichlet-Jordan [16]). *Supongamos que $f(x)$ es una función de variación acotada sobre $(0, 2\pi)$. Entonces*

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(x_0) = \{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)\}/2, \text{ para todo } x_0;$$

(ii) *si además f es continua en todo punto de un intervalo cerrado I , entonces $S[f](x)$ converge uniformemente en I .*

Demostración. Utilizando el Teorema 4.20 y que los coeficientes de una función de variación acotada son $O(1/n)$ (lo demostraremos en el teorema siguiente), el resultado es consecuencia inmediata del Teorema 4.38. \square

Teorema 4.44. [15] *Si f es una función de variación acotada sobre $[0, 2\pi]$ y $S[f](x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$, entonces $c_n = O(1/n)$.*

Demostración. Podemos suponer que $n \neq 0$. Fijado un $n \in \mathbb{Z}$, y ponemos $a_k := 2k\pi/|n|$, para $1 \leq k \leq |n|$. Sea g la función escalonada con valor $f(a_k)$ en el intervalo $[a_{k-1}, a_k)$, para $1 \leq k \leq |n|$.

Utilizando que $\int_{\frac{2k\pi}{|n|}}^{\frac{2(k+1)\pi}{|n|}} e^{-inx} dx = 0$, deducimos que $\int_0^{2\pi} g(x)e^{-inx} dx = 0$. Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} |c_n| &= \left| \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx} dx \right| = \left| \int_0^{2\pi} (f(x) - g(x))e^{-inx} dx \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{|n|} \int_{a_{k-1}}^{a_k} |f(x) - f(a_k)| dx \\ &\leq \sum_{k=1}^{|n|} \int_0^{2\pi} \frac{V(f, [a_{k-1}, a_k])2\pi}{|n|} dx \\ &= \frac{V(f, [0, 2\pi])2\pi}{|n|}. \end{aligned}$$

\square

En el teorema siguiente utilizaremos la notación $\Phi(h) = \Phi_x(h) := \int_0^h |\varphi_x(t)| dt$.

Teorema 4.45 (Lebesgue [16]). *Para cualquier función f tenemos que $S[f]$ es sumable $(C, 1)$ a $f(x)$ en todo punto x para el cual $\Phi(h) = o(h)$.*

Demostración. Primero observamos que existe una constante A tal que

$$K_n(t) < n + 1, \quad K_n(t) \leq \frac{A}{(n+1)t^2}, \tag{4.14}$$

para $0 < t \leq \pi$. La primera desigualdad se sigue de (4.12) y de la estimación $|D_n| \leq n+1/2 < n+1$, y la segunda de (4.13). Aplicando esto a la fórmula

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi_x(t) K_n(t) dt,$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} |\sigma_n(x) - f(x)| &\leq \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |\varphi_x(t)| K_n(t) dt \leq \frac{2(n+1)}{\pi} \int_0^{1/n} |\varphi_x(t)| dt + \frac{2A}{\pi} \int_{1/n}^\pi \frac{|\varphi_x(t)|}{(n+1)t^2} dt \\ &= P + Q. \end{aligned}$$

Claramente

$$P \leq (n+1)\Phi\left(\frac{1}{n}\right) \leq 2n\Phi\left(\frac{1}{n}\right) = o(1).$$

Integrando por partes es fácil ver que

$$\begin{aligned} Q &\leq \frac{2A}{\pi(n+1)} \left[\Phi(t)t^{-2} \right]_{1/n}^\pi + \frac{4A}{\pi(n+1)} \int_{1/n}^\pi \frac{\Phi(t)}{t^3} dt \\ &\leq \frac{2A}{\pi^3(n+1)} \Phi(\pi) + o(1) + \frac{1}{n} \int_{1/n}^\pi o\left(\frac{1}{t^2}\right) dt = o(1). \end{aligned}$$

Por lo tanto $P + Q = o(1)$ y el teorema queda demostrado. □

4.7. Sumabilidad Abel de $S[f]$ y de $\tilde{S}[f]$

Definición 4.46. [16] Sean a_k, b_k coeficientes de Fourier de una función f . Definimos las medias de Abel de $S[f]$ y $\tilde{S}[f]$ con las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} f(r, x) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sen kx)r^k, \\ \tilde{f}(r, x) &= \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sen kx - b_k \cos kx)r^k, \end{aligned}$$

para $0 \leq r < 1$.

Queremos investigar ahora los límites de estas funciones cuando r tiende a 1 por izquierda. Por el Teorema de Riemann-Lebesgue los coeficientes se hacen pequeños y por lo tanto las series convergen absoluta y uniformemente para $0 \leq r \leq p < 1$. Por lo tanto f y \tilde{f} son funciones continuas de los puntos re^{ix} , con $r < 1$.

Definición 4.47. [16] Las medias de Abel de las series $1/2 + \sum_{k=1}^{\infty} \cos kt$ y $\sum_{k=1}^{\infty} \sen kt$, que llamaremos núcleo de Poisson y núcleo conjugado de Poisson respectivamente, vienen dados por:

$$P(r, t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos kt = \frac{1}{2} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2}, \quad (4.15)$$

$$Q(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} r^k \sen kt = \frac{r \sen t}{1 - 2r \cos t + r^2}. \quad (4.16)$$

Proposición 4.48. [16] Las medias de Abel pueden representarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f(r, x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)P(r, t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)P(r, t-x) dt, \\ \tilde{f}(r, x) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)Q(r, t) dt = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)Q(r, t-x) dt. \end{aligned}$$

Las expresiones de la derecha que aparecen en esta última propiedad suelen llamarse *integral de Poisson* e *integral conjugada de Poisson*, y por tanto las expresiones “Media de Abel de $S[f]$ ” e “Integral de Poisson de f ” son sinónimas. A continuación demostramos el teorema análogo al de Fejér, esta vez para núcleos de Poisson.

Teorema 4.49. [16] *En todo punto x_0 en el cual los límites $f(x_0 \pm 0)$ existen (y si ambos son infinitos, del mismo signo), entonces*

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} f(r, x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)).$$

En particular, $\lim_{r \rightarrow 1^-} f(r, x_0)$ para todo punto de continuidad de f . La convergencia de $f(r, x)$ es uniforme sobre todo intervalo cerrado de puntos de continuidad.

Demostración. Demostraremos que el núcleo de Poisson cumple condiciones análogas a (A), (B) y (C) de las secciones anteriores (en lugar de que una variable n se haga arbitrariamente grande, en lo que sigue utilizaremos la variable r cerca de $x = 1$). De esta manera obtenemos un resultado similar al Teorema 4.33 para núcleos de Poisson, y se deduce entonces nuestro teorema.

En primer lugar, el núcleo de Poisson satisface la condición (A), es decir,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, t) dt = 1,$$

integrando término a término la expresión (4.15). Por otro lado, se tiene que el denominador de P , $\Delta(r, t) = 1 - 2r \cos t + r^2$, con $0 \leq r < 1$, es positivo para todo t . Por lo tanto $P(r, t) > 0$, para todo t , y P es un núcleo positivo. Fijado r , el máximo y el mínimo se alcanzan en $t = 0$ y $t = \pi$ respectivamente. Por lo tanto,

$$\frac{1(1-r)}{2(1+r)} \leq P(r, t) \leq \frac{1(1+r)}{2(1-r)}. \quad (4.17)$$

Será útil disponer de la siguiente desigualdad:

$$P(r, t) \leq A \frac{\delta}{\delta^2 + t^2} \quad (4.18)$$

donde A es una constante positiva, $\delta = 1 - r$ y $|t| \leq \pi$. Para $0 \leq r \leq 1/2$ es inmediato, ya que entonces $P(r, t)$ (ver (4.17)) y $\delta/(\delta^2 + t^2)$ están contenidos entre dos constantes positivas. Para $1/2 \leq r < 1$, utilizando la identidad $2 \sin^2 t = 1 - \cos 2t$ en la primer igualdad,

$$P(r, t) = \frac{1}{2} \frac{(1+r)(1-r)}{(1-r)^2 + 4r \sin^2 \frac{t}{2}} < \frac{\delta}{\delta^2 + 4\frac{1}{2}(\pi^{-1}t)^2} < \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta^2 + t^2} \pi^2,$$

y la desigualdad (4.18) se satisface. En particular, de (4.17) y (4.18) se obtiene

$$P(r, t) \leq \frac{1}{\delta}, \quad P(r, t) \leq \frac{A\delta}{t^2},$$

para $0 < t \leq \pi$ y $0 \leq r < 1$. De esta última desigualdad se deduce que P satisface la condición (C). \square

Enunciamos sin demostración el siguiente teorema para la función conjugada.

Teorema 4.50. [16] *La sumabilidad Abel de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \text{sen } kx$ es equivalente a la existencia de la función conjugada.*

A continuación estudiamos un resultado sobre la sumabilidad Abel de una serie de Fourier formalmente diferenciada.

Definición 4.51. [16] *Si*

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0 - h)}{2h} = D_1 F(x_0)$$

existe, lo denominaremos la primera derivada simétrica de F en x_0 . Los límites superior e inferior de esta última expresión serán denotados por $\overline{D}_1 F(x_0)$ y $\underline{D}_1 F(x_0)$ respectivamente.

Observación 4.52. *Si $F'(x_0)$ existe (y es finito), también existe $D_1 F(x_0)$ y son iguales, ya que*

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0 - h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{2h} + \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x_0) - F(x_0 - h)}{2h}.$$

Tomando $F(x) = 1/x^2$, podemos ver que el recíproco no es cierto. La continuidad de F y la existencia de la derivada simétrica tampoco implican la existencia de $F'(x)$, como podemos observar con $F(x) = |x|$.

En lo que sigue, cuando decimos *límites de indeterminación* nos referimos a los límites superior e inferior.

Teorema 4.53 (Fatou [16]). *Supongamos que $F(x) \sim A_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kx + B_k \text{sen } kx)$, y que $D_1 F(x_0)$ existe (finito o infinito). Entonces $S'[F]$ es sumable Abel en x_0 con suma $D_1 F(x_0)$, es decir,*

$$\lim_{r \rightarrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} k(B_k \cos kx_0 - A_k \text{sen } kx_0)r^k = D_1 F(x_0).$$

En general, los límites de indeterminación de $T(r, x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} k(B_k \cos kx_0 - A_k \text{sen } kx_0)r^k$ cuando r tiende a 1 están contenidos entre $\overline{D}_1 F(x_0)$ y $\underline{D}_1 F(x_0)$.

Demostración. Será suficiente demostrar el teorema para los límites de indeterminación. Si $F(r, x)$

es la integral de Poisson de F entonces $T(r, x_0) = \left\{ \frac{\partial F(r, x)}{\partial x} \right\}_{x=x_0}$. Veámoslo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} F(r, x) &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) P(r, t-x) dt \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} r^k \cos k(t-x) \right) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} F(t) k \operatorname{sen} k(t-x) r^k dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} F(t) k (\cos kt \operatorname{sen} kx - \cos kx \operatorname{sen} kt) r^k dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k (B_k \operatorname{sen} kx - \cos kx A_k) r^k. \end{aligned}$$

De

$$F(r, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) P(r, t-x) dt,$$

obtenemos

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial F(r, x)}{\partial x} \right)_{x=x_0} = -\frac{1}{\pi r} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) P'(r, t-x_0) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) K(r, t) dt, \quad (4.19)$$

donde $P'(r, t-x_0) = \left(\frac{\partial P(r, t-x_0)}{\partial t} \right)$, y

$$g(t) = \{F(x_0+t) - F(x_0-t)\} / (2 \operatorname{sen} t), \quad (4.20)$$

$$K(r, t) = -r^{-1} P'(r, t) \operatorname{sen} t = (1-r^2) \operatorname{sen}^2 t / \Delta^2(r, t). \quad (4.21)$$

La última igualdad en (4.19) es fácil de verificar utilizando (4.15), y hemos considerado la paridad de $P'(r, t)$ para construir la función $g(t)$. Observamos que $K(r, t)$ cumple con las condiciones (A), (B) y (C). La condición (B) es inmediata, y la (C) también lo es tanto para $K(r, t)$ como para $P'(r, t)$. Para ver que

$$(A) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(r, t) dt = 1,$$

tomamos $F(x) = \operatorname{sen} x$ y $x_0 = 0$. Entonces $F(r, x) = r \operatorname{sen} x$ se verifica utilizando 4.15, y las relaciones de ortogonalidad entre senos y cosenos. Además, $g(t) = 1$, y utilizando (4.19) deducimos que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(r, t) dt = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial F(r, x)}{\partial x} \right)_{x=0} = \frac{1}{r} r \cos 0 = 1.$$

Es inmediato verificar que el máximo y el mínimo de $g(t)$ en $t = 0$ (ver Definición 4.35) son $\overline{D}_1 F(x_0)$ y $\underline{D}_1 F(x_0)$. Supongamos ahora que $0 < \delta < \pi$. Como $K(r, t)$ satisface la condición (C),

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) K(r, t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} g(t) K(r, t) dt + o(1).$$

Además, es claro que

$$\inf_{x \in (-\delta, \delta)} g(x) \int_{-\delta}^{\delta} K(r, t) dt \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} g(t) K(r, t) dt \leq \sup_{x \in (-\delta, \delta)} g(x) \int_{-\delta}^{\delta} K(r, t) dt.$$

Como $\lim_{r \rightarrow 1} \int_{-\delta}^{\delta} K(r, t) dt = 1$, se obtiene

$$\inf_{x \in (-\delta, \delta)} g(x) \leq \liminf_{r \rightarrow 1} T(r, x_0) \leq \limsup_{r \rightarrow 1} T(r, x_0) \leq \sup_{x \in (-\delta, \delta)} g(x),$$

y por lo tanto, tomando δ suficientemente pequeño, podemos reemplazar estas cotas por $\underline{D}_1 F(x_0)$ y $\overline{D}_1 F(x_0)$, y el teorema queda demostrado. \square

4.8. Convergencia en norma

Definición 4.54. [11] *Un espacio homogéneo de Banach sobre \mathbb{T} es un subespacio vectorial B de $L^1(\mathbb{T})$ dotado de una norma $\|\cdot\|_B \geq \|\cdot\|_{L^1}$, bajo la cual es un espacio de Banach y satisface las siguientes propiedades:*

(H-1) *Si $f \in B$ y $\tau \in \mathbb{T}$, entonces $f_\tau \in B$ y $\|f_\tau\|_B = \|f\|_B$,*

(H-2) *para toda $f \in B$ y $\tau, \tau_0 \in \mathbb{T}$, $\lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_B = 0$.*

Ejemplo 4.55. [11] *El espacio $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ de todas las funciones continuas 2π -periódicas con la norma*

$$\|f\|_\infty = \max_{t \in \mathbb{T}} |f(t)|,$$

es un espacio homogéneo de Banach. La segunda condición es obvia, mientras que (H-1) se deduce del hecho de que las funciones continuas en \mathbb{T} son uniformemente continuas.

Ejemplo 4.56. [11] *También son espacios homogéneos de Banach los subespacios $L^p(\mathbb{T})$ de $L^1(\mathbb{T})$, con $1 \leq p < \infty$, de las funciones f para las cuales $\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^p dt < \infty$, con la norma*

$$\|f\|_{L^p} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

La condición (H-1) es evidente, y (H-2) se deduce utilizando la densidad de las funciones continuas en $L^p(\mathbb{T})$, ya que el resultado es claro para funciones continuas.

Ejemplo 4.57. *Observemos que $L^\infty(\mathbb{T})$ no es un espacio homogéneo de Banach, ya que no se cumple la condición (H-2).*

En lo que sigue tendremos en cuenta la siguiente observación: dada una función f , podemos interpretar $\tau \rightarrow f_\tau$ como una aplicación que toma valores en un espacio de Banach de funciones. Uno puede trabajar con la norma del espacio de llegada para, por ejemplo, definir la integral de Riemann $\int f_\tau d\tau$. La construcción para definir esta integral es completamente análoga al caso de funciones numéricas, a continuación lo vemos con más detalle.

Consideremos un espacio de Banach B , y sea $F : [a, b] \rightarrow B$ una función continua que toma valores en B . En el caso -usual- en que B sea un espacio de funciones, tenemos que para cada $x_0 \in [a, b]$, $F(x_0)$ es una función que pertenece a B . Queremos definir la integral de Riemann de F sobre el intervalo $[a, b]$. Esta integral -usualmente- no será más que una función perteneciente

a B , como veremos a continuación. Definimos $\int_a^b F(x) dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (x_{k+1} - x_k)F(x_k)$, donde $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} = b$, y el límite se toma (utilizando la norma del espacio B) de manera que la partición $\{x_k\}_{k=0}^n$ se vuelve más fina cuando crece n , es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq k \leq n} (x_{k+1} - x_k) = 0.$$

Para ver la existencia del límite de las sumas, mostramos que si $\{x_j\}$ y $\{y_i\}$ son subdivisiones de $[a, b]$ de manera que $\|F(\alpha) - F(\beta)\|_B < \epsilon$, siempre que α y β pertenezcan al mismo intervalo $[x_j, x_{j+1}]$ (ó $[y_k, y_{k+1}]$), entonces

$$\left\| \sum_{j=0}^n (x_{j+1} - x_j)F(x_j) - \sum_{i=0}^m (y_{i+1} - y_i)F(y_i) \right\|_B < 2(b-a)\epsilon.$$

Esto último es fácil de ver utilizando la suma correspondiente a un refinamiento común de las particiones $\{x_j\}$ y $\{y_i\}$, y aplicando la desigualdad triangular. Observemos que el límite de estas sumas es el límite de una sucesión de funciones en B , y convergerá a una función que denominamos la integral de Riemann de F . Las propiedades básicas son fáciles de verificar y enumeramos algunas a continuación:

(i) $\int_a^b (c_1 F(x) + c_2 G(x)) dx = c_1 \int_a^b F(x) dx + c_2 \int_a^b G(x) dx;$

(ii) si $a < c < b$, $\int_a^b F(x) dx = \int_a^c F(x) dx + \int_c^b F(x) dx;$

(iii) $\left\| \int_a^b F(x) dx \right\|_B \leq \int_a^b \|F(x)\|_B dx.$

Lema 4.58. [11] *Sea B un espacio de Banach, $\{k_n\}$ un núcleo de sumabilidad, y sea $\varphi : \mathbb{T} \rightarrow B$ una función continua que toma valores en B . Entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} k_n(\tau) \varphi(\tau) d\tau = \varphi(0).$$

Demostración. Como $\{k_n\}$ es un núcleo de sumabilidad, tenemos que para $0 < \delta < \pi$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k_n(\tau) \varphi(\tau) d\tau - \varphi(0) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k_n(\tau) (\varphi(\tau) - \varphi(0)) d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} k_n(\tau) (\varphi(\tau) - \varphi(0)) d\tau + \frac{1}{\pi} \int_{\delta \leq |\tau| \leq \pi} k_n(\tau) (\varphi(\tau) - \varphi(0)) d\tau. \end{aligned}$$

Ahora, por un lado

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} k_n(\tau) (\varphi(\tau) - \varphi(0)) d\tau \right\|_B &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \|k_n(\tau) (\varphi(\tau) - \varphi(0))\|_B d\tau \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |k_n(\tau)| \|(\varphi(\tau) - \varphi(0))\|_B d\tau \\ &\leq \max_{|\tau| \leq \delta} \|\varphi(\tau) - \varphi(0)\|_B \int_{-\delta}^{\delta} |k_n(\tau)| d\tau \\ &\leq \max_{|\tau| \leq \delta} \|\varphi(\tau) - \varphi(0)\|_B \|k_n(\tau)\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Dado un $\epsilon > 0$, fijamos entonces un $\delta > 0$ tal que, por continuidad de φ , esta última expresión sea menor que $\epsilon/2$. Para este δ tenemos que

$$\left\| \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |\tau| \leq \pi} k_n(\tau)(\varphi(\tau) - \varphi(0)) d\tau \right\|_B \leq \max_{\delta \leq |\tau| \leq \pi} \|\varphi(\tau) - \varphi(0)\|_B \int_{\delta \leq |\tau| \leq \pi} |k_n(\tau)| d\tau.$$

Como estamos trabajando con un núcleo de sumabilidad, esta última expresión será menor que $\epsilon/2$ para n suficientemente grande, y el lema queda demostrado. \square

Lema 4.59. [11] *Sea k una función continua sobre \mathbb{T} , y sea $f \in L^1(\mathbb{T})$. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} k(\tau) f_{\tau} d\tau = k * f,$$

donde la integral de la izquierda es la integral de Riemann con respecto a la norma de $L^1(\mathbb{T})$, y la de la derecha es una integral ordinaria.

Demostración. Supongamos primero que f es una función continua. Tenemos entonces que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k(\tau) f_{\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n (\tau_{j+1} - \tau_j) k(\tau_j) f_{\tau_j},$$

donde el límite se toma en la norma L^1 a medida que la partición $\{\tau_j\}$ se hace más fina. Por otro lado,

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n (\tau_{j+1} - \tau_j) k(\tau_j) f(t - \tau_j) = (k * f)(t)$$

uniformemente, ya que las sumas forman una familia uniformemente equicontinua que converge puntualmente a $(k * f)(t)$. Se deduce entonces que las sumas convergen en la norma L^1 al mismo valor, y el lema queda demostrado para funciones continuas. En el caso general, sea $f \in L^1(\mathbb{T})$, $\epsilon > 0$, y sea g una función continua tal que $\|f - g\|_{L^1} < \epsilon$. Como el resultado es cierto para funciones continuas tenemos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k(\tau) f_{\tau} d\tau - k * f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k(\tau) (f - g)_{\tau} d\tau + k * (g - f),$$

y por lo tanto,

$$\left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k(\tau) f_{\tau} d\tau - k * f \right\|_{L^1} \leq 2\epsilon \|k\|_{L^1}.$$

\square

Teorema 4.60. [11] *Sea B un espacio homogéneo de Banach sobre \mathbb{T} , $f \in B$, y $\{k_n\}$ un núcleo de sumabilidad (véase la Definición 4.32). Entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|2(k_n * f) - f\|_B = 0.$$

Demostración. Como $\|\cdot\|_B \geq \|\cdot\|_{L^1}$, la integral $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} k_n(\tau) f_{\tau} d\tau$ que toma valores en B es la misma que la que toma valores en $L^1(\mathbb{T})$. Esta última, por el Lema 4.59, es igual a $k_n * f$. Aplicando ahora el Lema 4.58, el resultado es inmediato. \square

Teorema 4.61. [11] *Sea B un espacio homogéneo de Banach sobre \mathbb{T} . Entonces los polinomios trigonométricos en B forman un subconjunto denso de B .*

Demostración. Usando el núcleo de Fejér, y el Teorema 4.60, tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(f) = f$ en la norma de B , y se deduce el resultado. \square

Corolario 4.62. [11] *Toda función continua y 2π -periódica puede ser aproximada uniformemente por polinomios trigonométricos.*

Demostración. Basta aplicar el teorema al caso citado en el Ejemplo 4.55. \square

En lo que resta de la sección utilizaremos la expresión $S_n(f) = \sum_{j=-n}^n \hat{f}(j)e^{ijt}$, vista en el primer capítulo, para trabajar con las sumas parciales de la serie de Fourier.

Definición 4.63. [11] *Sea B un espacio homogéneo de Banach sobre \mathbb{T} . Decimos que B admite convergencia en norma si para toda $f \in B$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(f) - f\|_B = 0.$$

En el teorema siguiente trabajaremos con un espacio B de Banach y el operador de sumas parciales $S_n : B \rightarrow B$. Claramente este es un operador lineal entre espacios de Banach.

Teorema 4.64. [11] *Un espacio homogéneo de Banach B admite convergencia en norma si, y solo si, existe una constante α tal que*

$$\|S_n(f)\|_B \leq \alpha \|f\|_B,$$

para toda $f \in B$ y $n \geq 0$.

Demostración. Si $S_n(f)$ converge a f para todo $f \in B$, entonces $S_n(f)$ es acotado para toda $f \in B$. Aplicando el Principio de Acotación Uniforme (véase [6]), obtenemos la primera implicación. Por otro lado, suponiendo que $\alpha > 1$, sean $f \in B$, $\epsilon > 0$, y sea P un polinomio trigonométrico tal que $\|f - P\|_B \leq \epsilon/2\alpha$. Para $n \geq gr(P)$, es fácil ver que la ortogonalidad del sistema trigonométrico implica que $S_n(P) = P$, y por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|S_n(f) - f\|_B &= \|S_n(f) - S_n(P) + P - f\|_B \\ &\leq \|S_n(f - P)\|_B + \|P - f\|_B \leq \alpha \frac{\epsilon}{2\alpha} + \frac{\epsilon}{2\alpha} \leq \epsilon. \end{aligned}$$

\square

4.9. Funciones trigonométricas especiales

Lema 4.65. [2] *Si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ es una serie convergente de términos positivos, y tal que $\{u_n\}$ es una sucesión monótona decreciente, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = 0$.*

Demostración. Como la serie es convergente, tenemos que para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 > 0$ tal que $\left| \sum_{j=1}^p u_{m+j} \right| < \epsilon/2$, para todo p natural y $m \geq n_0$. Como la sucesión es monótona decreciente,

es fácil ver que $pu_{m+p} < \sum_{j=1}^p u_{m+j} < \epsilon/2$, para todo p natural y $m \geq n_0$. Si ponemos $p = m$, obtenemos $2mu_{2m} < \epsilon$. Esto último es $nu_n < \epsilon$, si $n = 2m$ es par. Si n es impar observamos que

$$nu_n < nu_{n-1} = \frac{n}{n-1}(n-1)u_{n-1},$$

y como $n-1$ es par, obtenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = 0$ como queríamos ver. □

Teorema 4.66. [11] *Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ una sucesión par (es decir, $a_n = a_{-n}$) de números reales positivos tales que $\lim_{|n| \rightarrow \infty} a_n = 0$. Supongamos también que para todo $n > 0$,*

$$a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n \geq 0, \tag{4.22}$$

entonces existe una función positiva $f \in L^1(\mathbb{T})$ tal que $\hat{f}(n) = a_n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Primero observamos que la condición (4.22) implica que $\{(a_n - a_{n+1})\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ es monótona decreciente. Por la naturaleza telescópica de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$, podemos aplicar el Lema 4.65, para obtener

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - a_{n+1}) = 0. \tag{4.23}$$

Es fácil probar por inducción la igualdad

$$A_N := \sum_{n=1}^N n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) = a_0 - a_N - N(a_N - a_{N+1}),$$

y es claro que (4.23) implica que $\lim_{N \rightarrow \infty} A_N = a_0$. Tomemos ahora

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) K_{n-1}(t), \tag{4.24}$$

donde $\{K_n\}$ es el núcleo de Fejér. De $\|K_n\|_{L^1} = 1$, se desprende que la serie (4.24) converge en $L^1(\mathbb{T})$, y como todos sus términos son positivos, el límite f es positivo. Además, como

$$\hat{K}_n(j) = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n \hat{D}_k(j) = \begin{cases} 2 \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right), & |j| \leq n, \\ 0, & |j| > n. \end{cases}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \hat{f}(j) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) \hat{K}_{n-1}(j) \\ &= \sum_{n=|j|+1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) \left(1 - \frac{|j|}{n}\right) = a_{|j|}. \end{aligned}$$

□

4.9. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS ESPECIALES

Teorema 4.67. [11] Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ y supongamos que $\hat{f}(|n|) = -\hat{f}(-|n|) \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Entonces $\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \hat{f}(n) < \infty$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\hat{f}(0) = 0$. Pongamos $F(t) = \int_0^t f(x) dx$. Entonces $F \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ y, por el Teorema 2.28 tenemos que

$$\hat{F}(n) = \frac{1}{in} \hat{f}(n),$$

para $n \neq 0$. Como F es continua, podemos aplicar el Teorema 4.38, con $x_0 = 0$, y teniendo en cuenta que $\hat{f}(n)/n \geq 0$, no es difícil verificar que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} 2 \sum_{n=1}^N \left(1 - \frac{n}{N+1}\right) \frac{\hat{f}(n)}{n} = i(F(0) - \hat{F}(0)),$$

de lo cual se sigue el resultado. □

Corolario 4.68. [11] Si $a_n > 0$, y $\sum_{n \neq 0} \frac{a_n}{n} = \infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nt$ no es una serie de Fourier.

Por lo tanto existen series trigonométricas cuyos coeficientes tienden a cero, y que no son series de Fourier.

Concluimos el capítulo con la observación siguiente: la serie conjugada a una serie de Fourier no es, en general, una serie de Fourier. Por el Teorema 4.66, la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nt}{\log n} = \sum_{|n| \geq 2} \frac{e^{int}}{2 \log n}$$

es una serie de Fourier. Por otro lado, por el Teorema 4.67, la serie conjugada

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nt}{\log n} = -i \sum_{|n| \geq 2} \frac{\operatorname{sgn} n}{2 \log |n|} e^{int}$$

no es una serie de Fourier.

Capítulo 5

Transformada de Fourier

1. *Teoría básica en $L^1(\mathbb{R}^n)$.* Definición. Teorema de Riemann-Lebesgue. Propiedades relacionadas con la traslación, dilatación, convolución y diferenciación. Ejemplos: núcleos de Poisson y Gauss-Weierstrass.
2. *Problema de inversión.* Aproximaciones de la identidad y métodos de sumabilidad. Igualdad de Parseval. Fórmula de inversión.
3. *Teoría en $L^2(\mathbb{R}^n)$.* Definición. Extensión unitaria. Definición para los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq 2$.

5.1. Teoría básica en $L^1(\mathbb{R}^n)$

Definición 5.1. [14] Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Definimos la Transformada de Fourier de f como la función \hat{f} dada por

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-2\pi i x \cdot t} dt,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, y donde $x \cdot t = \sum_{k=1}^n x_k t_k$.

A menudo consideraremos la Transformada de Fourier como el operador $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$, de manera que $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$.

Teorema 5.2. [14] Utilizando las notaciones anteriores, se tiene que:

- (i) \mathcal{F} es un operador lineal y acotado que cumple $\|\mathcal{F}(f)\|_\infty \leq \|f\|_1$;
- (ii) para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F}(f)$ es uniformemente continua.

Demostración. La linealidad de \mathcal{F} es inmediata. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}\| &= \sup_{\|f\|_1=1} \|\mathcal{F}(f)\|_\infty = \sup_{\|f\|_1=1} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-2\pi i x \cdot t} dt \right| \right) \\ &\leq \sup_{\|f\|_1=1} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(t) e^{-2\pi i x \cdot t}| dt \right) \\ &= \sup_{\|f\|_1=1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)| dt = 1, \end{aligned}$$

de lo cual se deduce que $\|\mathcal{F}(f)\|_\infty \leq \|f\|_1$. Para ver que \hat{f} es uniformemente continua, utilizaremos el Lema 2.36, el cual nos asegura que, dado $\epsilon > 0$ existe una función $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f - g\|_1 < \epsilon/3$. Sea $R > 0$ tal que $g(x) = 0$ para todo $|x| > R$, y sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Utilizando que $|e^{i\theta}| = 1$, para todo $\theta \in \mathbb{R}$, tenemos que para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} |\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x)| &\leq |\hat{f}(x+h) - \hat{g}(x+h)| + |\hat{g}(x+h) - \hat{g}(x)| + |\hat{f}(x) - \hat{g}(x)| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f-g)(t) e^{-2\pi i(x+h) \cdot t} dt \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^n} g(t) (e^{-2\pi i(x+h) \cdot t} - e^{-2\pi i x \cdot t}) dt \right| \\ &\quad + \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f-g)(t) e^{-2\pi i x \cdot t} dt \right| \\ &\leq \|f-g\|_1 + \int_{\mathbb{R}^n} |g(t)| |e^{-2\pi i h \cdot t} - 1| dt + \|f-g\|_1 \\ &\leq 2\|f-g\|_1 + \int_{|x| \leq R} \|g\|_\infty |e^{-2\pi i h \cdot t} - 1| dt. \end{aligned}$$

Tomando h suficientemente pequeño se concluye la continuidad uniforme de \hat{f} . □

Teorema 5.3 (Riemann-Lebesgue [14]). *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \hat{f}(x) = 0.$$

Demostración. El teorema es claro cuando f es una función característica sobre un intervalo n -dimensional, y también lo es para combinaciones lineales de funciones características. El resultado para el caso general en que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ se demuestra utilizando la expresión $f = g + (f - g)$ y una sencilla desigualdad triangular, donde g es una aproximación por combinaciones lineales. Alternativamente, podemos utilizar el Lema 2.36 de manera análoga. □

Definición 5.4. [14] Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Definimos la convolución de f y g , como

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy.$$

Veremos a continuación que la convolución está bien definida, pero antes necesitamos un lema preliminar.

Lema 5.5 (Desigualdad de Minkowski para integrales [16]). *Sea $h(x, y)$ una función medible y $1 \leq p < \infty$. Entonces se satisface la siguiente desigualdad:*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} h(x, y) dy \right|^p dx \right)^{1/p} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |h(x, y)|^p dx \right)^{1/p} dy.$$

Demostración. El caso $p = 1$ se sigue del Teorema de Fubini. Supongamos entonces que $p > 1$, y observemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} h(x, y) dy \right|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} h(x, y) dy \right|^{p-1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} h(x, y) dy \right| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} h(x, t) dt \right|^{p-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |h(x, y)| dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} h(x, t) dt \right|^{p-1} |h(x, y)| dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} h(x, t) dt \right|^{p-1} |h(x, y)| dx \right) dy, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos utilizado nuevamente Fubini. Sea $q = p/(p - 1)$. Aplicando la desigualdad de Hölder a la expresión de adentro de esta última integral, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} h(x, t) dt \right|^{p-1} |h(x, y)| dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} h(x, t) dt \right|^{q(p-1)} dx \right)^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |h(x, y)|^p dx \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} h(x, t) dt \right|^p dx \right)^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |h(x, y)|^p dx \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Por lo tanto concluimos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} h(x, y) dy \right|^p dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} h(x, t) dt \right|^p dx \right)^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |h(x, y)|^p dx \right)^{1/p} \right) dy \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} h(x, t) dt \right|^p dx \right)^{1/q} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |h(x, y)|^p dx \right)^{1/p} dy. \end{aligned}$$

Si dividimos por $\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} h(x, t) dt \right|^p dx \right)^{1/q}$, y recordamos que $1 - (1/q) = 1/p$, obtenemos la desigualdad buscada. \square

Teorema 5.6. [14] Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces la convolución está bien definida y $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Además,

$$\|h\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1.$$

Demostración. Claramente $|(f * g)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)| |g(y)| dy$, y aplicando el Lema 5.5:

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x)|^p dx \right)^{1/p} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)|^p dx \right)^{1/p} |g(y)| dy \\ &= \|f\|_p \|g\|_1. \end{aligned}$$

\square

Teorema 5.7. [14] Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $\widehat{(f * g)} = \hat{f} \hat{g}$.

Demostración. El resultado es consecuencia de

$$\begin{aligned} (\widehat{f * g})(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy \right) e^{-2\pi i t \cdot x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)e^{-2\pi i t \cdot x} dx \right) g(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i t \cdot y} dx \right) g(y)e^{-2\pi i t \cdot y} dy \\ &= \hat{f}(t)\hat{g}(t), \end{aligned}$$

donde hemos aplicado el Teorema de Fubini en la segunda igualdad, y un sencillo cambio de variables en la tercera. \square

Definición 5.8. [14] Definimos el operador de translación τ_h de manera que $\tau_h(f)(x) := f(x-h)$. Similarmente, definimos la dilatación $\delta_a(f)(x) := f(ax)$.

Proposición 5.9. [14] Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, se tiene que

- (i) $(\widehat{\tau_h f})(x) = e^{-2\pi i h \cdot x} \hat{f}(x)$;
- (ii) $(\widehat{e^{2\pi i t \cdot h} f(t)})(x) = (\tau_h \hat{f})(x)$;
- (iii) $a^n (\widehat{\delta_a f})(x) = \hat{f}(a^{-1}x)$.

Demostración. Para ver el primer apartado hacemos un sencillo cambio de variable en la segunda igualdad de lo que sigue:

$$\begin{aligned} (\widehat{\tau_h f})(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(t-h)e^{-2\pi i x \cdot t} dt = e^{-2\pi i x \cdot h} \int_{\mathbb{R}^n} f(t)e^{-2\pi i x \cdot t} dt \\ &= e^{-2\pi i x \cdot h} \hat{f}(x). \end{aligned}$$

El apartado (ii) es inmediato, y el (iii) se desprende de

$$\begin{aligned} (\widehat{\delta_a f})(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(at)e^{-2\pi i x \cdot t} dt = \frac{1}{a^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(t)e^{-2\pi i x \cdot \frac{t}{a}} dt \\ &= \frac{1}{a^n} \hat{f}\left(\frac{x}{a}\right), \end{aligned}$$

donde hemos hecho un sencillo cambio de variables en la segunda igualdad. \square

Teorema 5.10. [14] Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, y $x_k f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces \hat{f} es diferenciable con respecto a x_k y

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_k}(x) = \mathcal{F}(-2\pi i t_k f(t))(x).$$

Demostración. Sea $h = (0, \dots, 0, h_k, 0, \dots, 0)$ un vector no nulo a lo largo del k -ésimo eje cartesiano. Aplicando el segundo apartado de la Proposición 5.9 es fácil ver que

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_k}(x) = \lim_{h_k \rightarrow 0} \frac{\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x)}{h_k} = \lim_{h_k \rightarrow 0} \mathcal{F}\left(\left(\frac{e^{-2\pi i t \cdot h} - 1}{h_k}\right)f(t)\right)(x).$$

5.2. PROBLEMA DE INVERSIÓN

Por otro lado, aplicando el Teorema de la Convergencia Dominada en la primer igualdad y la regla de L'Hopital para calcular el límite, es claro que

$$\begin{aligned} \lim_{h_k \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{e^{-2\pi i t \cdot h} - 1}{h_k} \right) f(t) e^{-2\pi i x \cdot t} dt &= \int_{\mathbb{R}^n} -2\pi i t_k f(t) e^{-2\pi i x \cdot t} dt \\ &= \mathcal{F}(-2\pi i t_k f(t))(x). \end{aligned}$$

□

Definición 5.11. [14] Decimos que una función f es diferenciable en la norma L^p con respecto a x_k si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, y existe una función $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\lim_{h_k \rightarrow 0} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h_k} - g(x) \right|^p dx \right)^{1/p} = 0.$$

Teorema 5.12. [14] Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, y g es la derivada parcial de f con respecto a x_k en la norma L^1 , entonces $\hat{g}(x) = 2\pi i x_k \hat{f}(x)$.

Demostración. Observamos que, por el Teorema 5.2,

$$\left\| \hat{g}(x) - \frac{\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x)}{h_k} \right\|_{\infty} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h_k} - g(x) \right| dx.$$

Esta última expresión tiende a cero por hipótesis, y por lo tanto, haciendo uso del primer apartado de la Proposición 5.9,

$$0 = \lim_{h_k \rightarrow 0} \left\| \hat{g}(x) - \hat{f}(x) \left(\frac{e^{-2\pi i x \cdot h} - 1}{h_k} \right) \right\|_{\infty} = \|\hat{g}(x) - \hat{f}(x) 2\pi i x_k\|_{\infty}.$$

Esto último implica que $\hat{g}(x) = \hat{f}(x) 2\pi i x_k$, como queríamos ver. □

5.2. Problema de inversión

En esta sección nos centramos en el problema de invertir la Transformada de Fourier. Es decir, dada la Transformada de Fourier \hat{f} de una función integrable f , queremos recuperar esta última a partir de la primera. Para ello tendremos que desarrollar ciertos métodos de sumabilidad para integrales.

Definición 5.13. [14] Para cada $\epsilon > 0$, definimos la media de Abel $A_{\epsilon} = A_{\epsilon}(f)$ como la integral

$$A_{\epsilon} = A_{\epsilon}(f) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-\epsilon|x|} dx.$$

Es claro que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} A_{\epsilon}(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$. Por otro lado, si f no es integrable, este límite puede existir de todas maneras, como en el caso $f(x) = \text{sen } x/x$, para $n = 1$.

Definición 5.14. [14] Cuando $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} A_{\epsilon}(f)$ existe y es finito, decimos que $\int_{\mathbb{R}^n} f$ es Abel sumable a este límite.

Vemos a continuación otro método de sumabilidad importante.

Definición 5.15. [14] Para cada $\epsilon > 0$, definimos la media de Gauss $G_\epsilon = G_\epsilon(f)$ como la integral

$$G_\epsilon = G_\epsilon(f) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-\epsilon|x|^2} dx.$$

Definición 5.16. [14] Decimos que $\int_{\mathbb{R}^n} f$ es sumable Gauss, con suma l , siempre que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} G_\epsilon(f) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-\epsilon|x|^2} dx = l.$$

Observemos que tanto A_ϵ como G_ϵ pueden escribirse en la forma

$$M_{\epsilon, \Phi}(f) = M_\epsilon(f) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\epsilon x) f(x) dx,$$

donde $\Phi(0) = 1$ y $\Phi \in \mathcal{C}_0$.

Definición 5.17. [14] Decimos que $\int_{\mathbb{R}^n} f$ es sumable, con suma l , si $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} M_\epsilon(f) = l$. También decimos que $M_\epsilon(f)$ son las Φ -medias de esta integral.

Teorema 5.18. [14] Para todo $\alpha > 0$, tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\alpha|y|^2} e^{-2\pi i t \cdot y} dy = \alpha^{-n/2} e^{-\pi|t|^2/\alpha}.$$

Demostración. En primer lugar, necesitaremos probar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(2\pi x + it/2)^2} dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}. \quad (5.1)$$

Teniendo en cuenta que t es arbitrario, y haciendo un cambio de variables en la integral de la izquierda, bastará verificar que $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+iy)^2} dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$. Para ello consideramos la función $f(z) = e^{-z^2}$. Como f es holomorfa en \mathbb{C} podemos aplicar el Teorema de Cauchy, de manera que, fijados $t, R \in \mathbb{R}$, tenemos que $\int_A f(z) dz = 0$, donde $A = [-R, R] \times [0, t]$. Sean entonces

$$\begin{aligned} \gamma_1(s) &= -s + it, & s \in [-R, R]; \\ \gamma_2(s) &= -R - is, & s \in [0, t]; \\ \gamma_3(s) &= R + is, & s \in [0, t]; \\ \gamma_4(s) &= s, & s \in [-R, R]. \end{aligned}$$

Es fácil ver que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\gamma_2} f(z) dz \right| = \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\gamma_3} f(z) dz \right| = 0,$$

ya que $\left| \int_{\gamma_i} f(z) dz \right| \leq e^{-t^2} \int_0^t e^{-R^2} ds$, para $i = 2, 3$. Para $\gamma_1(s)$ tenemos

$$\int_{\gamma_1} f(s) ds = \int_{-R}^R \gamma_1'(s) f(\gamma_1(s)) ds = \int_{-R}^R e^{-s^2} ds.$$

5.2. PROBLEMA DE INVERSIÓN

Por lo tanto, $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_1} f(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds$. Similarmente,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_4} f(s) ds = - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(s+it)^2} ds.$$

Ahora bien, como $\int_A f(z) dz = \sum_{k=1}^4 \int_{\gamma_k} f(s) ds$, por lo anterior es claro que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(s+it)^2} ds = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds,$$

y como la integral Gaussiana es iguala a $\sqrt{\pi}$, hemos demostrado (5.1). Para verificar la igualdad del enunciado observamos en primer lugar que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2|x|^2} e^{-2\pi i x \cdot t} dx &= \prod_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2 x_k^2} e^{-2\pi i x_k t_k} dx_k \\ &= \prod_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2 x_k^2 - 2\pi i x_k t_k + t_k^2/4} e^{-t_k^2/4} dx_k \\ &= \prod_{k=1}^n e^{-t_k^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(2\pi x_k + it_k/2)^2} dx_k \\ &= \prod_{k=1}^n \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-t_k^2/4} \\ &= \frac{1}{2^n} \pi^{-n/2} e^{-|t|^2/4}. \end{aligned}$$

Si hacemos el cambio de variable $x = y \frac{\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\pi}}$, es fácil verificar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\alpha|y|^2} e^{-2\pi i t \cdot y} dy = \alpha^{-n/2} e^{-\pi|t|^2/\alpha},$$

como queríamos ver. □

Notemos que en este teorema hemos calculado la Transformada de Fourier de la función $e^{-\epsilon|x|^2}$. En particular, hemos obtenido que $e^{-\pi|x|^2}$ es su propia Transformada de Fourier. A continuación estudiamos el caso $e^{-\epsilon|x|}$, y para ello necesitaremos de unos lemas preliminares.

Lema 5.19. [14] *Para todo $\beta > 0$, se satisface*

$$e^{-\beta} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \beta x}{1+x^2} dx.$$

Demostración. Sean $f(z) = \frac{e^{i\beta z}}{1+z^2}$, $R \in \mathbb{R}$, y $A \subseteq \mathbb{C}$ la región en el plano complejo delimitado por las curvas

$$\begin{aligned} \gamma_1(s) &= s, & s &\in [-R, R]; \\ \gamma_2(s) &= R e^{i\pi s}, & s &\in [0, 1]. \end{aligned}$$

Notamos que, en esta región, f tiene un polo simple en $z = i$, y por lo tanto, calculando el residuo como cociente de funciones,

$$\int_A f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) = \pi e^{-\beta}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f(z) dz &= \int_{-R}^R \frac{e^{i\beta s}}{1+s^2} ds = \int_{-R}^R \frac{\cos \beta s}{1+s^2} ds + \int_{-R}^R \frac{\operatorname{sen} \beta s}{1+s^2} ds \\ &= \int_{-R}^R \frac{\cos \beta s}{1+s^2} ds + 0, \end{aligned}$$

y es fácil verificar que

$$\left| \int_{\gamma_2} f(z) dz \right| \leq \frac{CR}{|R^2 - 1|},$$

donde C es constante. Utilizando entonces que $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \beta s}{1+s^2} ds$, y también que

$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} f(z) dz = 0$, observamos que

$$\int_A f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz,$$

y por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \beta s}{1+s^2} ds = \pi e^{-\beta}.$$

Para obtener la igualdad del enunciado basta considerar la paridad de la función dentro de esta última integral. □

Lema 5.20. *Para todo $\beta > 0$ se satisface*

$$e^{-\beta} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-\beta/4u} du.$$

Demostración. En lo que sigue tendremos en cuenta que

$$\frac{1}{1+x^2} = \int_0^{\infty} e^{-(1+x^2)u} du,$$

lo cual no es difícil de verificar. Utilizando también el Lema 5.19 y el teorema de Fubini, tenemos

$$\begin{aligned} e^{-\beta} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \beta x}{1+x^2} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \beta x \left(\int_0^{\infty} e^{-u} e^{-ux^2} du \right) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-u} \left(\int_0^{\infty} e^{-ux^2} \cos \beta x dx \right) du \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-u} \left(\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ux^2} e^{i\beta x} dx \right) du \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-u} \left(\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2 uy^2} e^{-2\pi i \beta y} dy \right) du \end{aligned}$$

5.2. PROBLEMA DE INVERSIÓN

donde, en la cuarta igualdad, hemos utilizado la paridad de las funciones $e^{-ux^2} \cos \beta x$ y $e^{-ux^2} \sin \beta x$, y en la quinta hemos hecho el cambio de variables $x = 2\pi y$. Además, utilizando el Teorema 5.18, con $\alpha = 4\pi u$ tenemos que la última expresión es igual a

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{u}} e^{-\beta^2/4u} \right) du,$$

de lo cual se concluye la igualdad buscada. \square

Teorema 5.21. [14] *Para todo $\alpha > 0$, tenemos que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi|y|^\alpha} e^{-2\pi it \cdot y} dy = c_n \frac{\alpha}{(\alpha^2 + |t|^2)^{(n+1)/2}},$$

donde $c_n = \Gamma[(n+1)/2]/(\pi^{(n+1)/2})$.

Demostración. Primero estudiaremos el caso $\alpha = 1$. En el siguiente razonamiento utilizaremos el Teorema 5.18 en la tercera igualdad (con $\alpha = \pi/u$), el Teorema de Fubini para el cambio de orden de integración, y en la quinta igualdad haremos el cambio de variables $s = (1 + |t|^2)u$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi|y|} e^{-2\pi it \cdot y} dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-4\pi^2|y|^2/4u} du \right) e^{-2\pi it \cdot y} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2|y|^2/4u} e^{-2\pi it \cdot y} dy \right) du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \left(\left(\sqrt{\frac{u}{\pi}} \right)^{n/2} e^{-u|t|^2} \right) du \\ &= \frac{1}{\pi^{(n+1)/2}} \int_0^\infty e^{-u} u^{(n-1)/2} e^{-u|t|^2} du \\ &= \frac{1}{\pi^{(n+1)/2}} \frac{1}{(1 + |t|^2)^{(n+1)/2}} \int_0^\infty e^{-s} s^{(n-1)/2} ds \\ &= \frac{\Gamma[\frac{1}{2}(n+1)]}{\pi^{(n+1)/2}} \frac{1}{(1 + |t|^2)^{(n+1)/2}}. \end{aligned}$$

Para el caso general $\alpha > 0$, nos bastará hacer el cambio de variables $y = x/\alpha$ y aplicar el caso $\alpha = 1$ en lo que sigue:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi|y|^\alpha} e^{-2\pi it \cdot y} dy &= \frac{1}{\alpha^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi|x|} e^{-2\pi it \cdot x/\alpha} dx \\ &= \frac{c_n}{\alpha^n (1 + |\frac{t}{\alpha}|^2)^{(n+1)/2}} \\ &= c_n \frac{\alpha}{(\alpha^2 + |t|^2)^{(n+1)/2}}. \end{aligned}$$

\square

Definición 5.22. [14] *Definimos el núcleo de Weierstrass y el núcleo de Poisson como las transformadas de Fourier de las funciones $e^{-4\pi^2\alpha|y|^2}$ y $e^{-2\pi\alpha|y|}$, respectivamente. Les denotaremos por W y P , respectivamente, y por lo tanto tenemos*

$$\begin{aligned} W(t, \alpha) &= \alpha^{n/2} e^{-\pi|t|^2/\alpha}, \\ P(t, \alpha) &= c_n \frac{\alpha}{(\alpha^2 + |t|^2)^{(n+1)/2}}. \end{aligned}$$

Teorema 5.23 (Fórmula de multiplicación [14]). Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x) dx.$$

Demostración. Haciendo uso del Teorema de Fubini, es fácil ver que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(t)e^{-2\pi it \cdot x} dt \right) g(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)e^{-2\pi it \cdot x} dx \right) f(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\hat{g}(t) dt. \end{aligned}$$

□

Definición 5.24. [14] La expresión $\omega(h) = \omega_{p,f}(h) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-h) - f(x)|^p dx \right)^{1/p}$ se conoce como el L^p -módulo de continuidad de f .

Es claro que $\omega(h)$ es acotado como función de h , ya que $\omega(h) \leq 2\|f\|_p$. Además, $\lim_{|h| \rightarrow 0} \omega(h) = 0$ claramente cuando f es continua con soporte compacto. Esto también es cierto para el caso general. Para verlo, como ya hemos hecho en diversas ocasiones, empleamos el argumento de aproximaciones haciendo uso del Lema 2.36.

Teorema 5.25. [14] Si $f, \Phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\varphi = \hat{\Phi}$, y $\varphi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\varphi(x/\epsilon)$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)e^{2\pi it \cdot x}\Phi(\epsilon x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_\epsilon(x-t) dx,$$

para todo $\epsilon > 0$

Demostración. Aplicando la fórmula de multiplicación, y la Proposición 5.9,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)e^{2\pi it \cdot x}\Phi(\epsilon x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)e^{2\pi it \cdot x}(\delta_\epsilon \Phi)(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathcal{F}(e^{2\pi it \cdot x}(\delta_\epsilon \Phi))(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\tau_t(\widehat{\delta_\epsilon \Phi})(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\frac{1}{\epsilon^n}\tau_t\varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_\epsilon(x-t) dx. \end{aligned}$$

□

Teorema 5.26. [14] Sea $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, con $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$, y para todo $\epsilon > 0$ sea $\varphi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\varphi(x/\epsilon)$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, entonces $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|f * \varphi_\epsilon - f\|_p = 0$.

5.2. PROBLEMA DE INVERSIÓN

Demostración. Observamos que haciendo un sencillo cambio de variables,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\epsilon(t) dt = \int_{\mathbb{R}^n} \epsilon^{-n} \varphi\left(\frac{t}{\epsilon}\right) dt = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t) dt = 1.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} (f * \varphi_\epsilon)(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t) \varphi_\epsilon(t) dt - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi_\epsilon(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-t) - f(x)) \varphi_\epsilon(t) dt. \end{aligned}$$

Aplicando la Desigualdad de Minkowski para Integrales es inmediato verificar que

$$\begin{aligned} \|f * \varphi_\epsilon - f\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-t) - f(x)) \varphi_\epsilon(t) dt \right|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t) - f(x)|^p \varphi_\epsilon(t) dx \right)^{1/p} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} \epsilon^{-n} \left| \varphi\left(\frac{t}{\epsilon}\right) \right| dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-\epsilon t) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} |\varphi(t)| dt. \end{aligned}$$

Utilizando el L^p -módulo de continuidad, lo que hemos probado es que

$$\|f * \varphi_\epsilon - f\|_p \leq \int_{\mathbb{R}^n} \omega(-\epsilon t) |\varphi(t)| dt.$$

Como $\omega(-\epsilon t) |\varphi(t)| \leq 2\|f\|_p |\varphi(t)|$, podemos aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada, y concluimos que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|f * \varphi_\epsilon - f\|_p = 0,$$

como queríamos ver. □

Teorema 5.27. [14] Si $\Phi, \hat{\Phi} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$, donde $\varphi = \hat{\Phi}$, entonces la Φ -media de la integral $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(t) e^{2\pi i t \cdot x} dt$ converge a $f(x)$ en la norma L^1 . En particular, las medias de Abel y Gauss de esta integral convergen a $f(x)$ en la norma L^1 .

Demostración. En definitiva, lo que queremos probar es que $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\epsilon x) \hat{f}(x) e^{2\pi i t \cdot x} dx$ converge a $f(t)$ en la norma L^1 . Utilizaremos el Teorema 5.25 para observar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\epsilon x) \hat{f}(x) e^{2\pi i t \cdot x} dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi_\epsilon(x-t) dx = (\varphi_\epsilon * f)(t),$$

y, por lo tanto, nuestro resultado se sigue del Teorema 5.26. □

Corolario 5.28. [14] Si tanto f como \hat{f} son integrables, entonces

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(t) e^{2\pi i x \cdot t} dt,$$

para casi todo x .

Observemos que como f es la transformada de Fourier de una función de L^1 , coincide con una función continua (de hecho, de C_0).

Demostración. Como $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, es claro que las Φ -medias de $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)e^{2\pi it \cdot x} dx$ son acotadas. Por lo tanto, aplicando el Teorema de la Convergencia Dominada, obtenemos

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \hat{f}(t)e^{2\pi ix \cdot t} \Phi(\epsilon t) dt = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(t)e^{2\pi ix \cdot t} dt.$$

□

Corolario 5.29. [14] *Si f_1 y f_2 pertenecen a $L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\hat{f}_1(x) = \hat{f}_2(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces $f_1(t) = f_2(t)$, para casi todo $t \in \mathbb{R}^n$.*

Demostración. Del Teorema 5.27 se deduce que si $\hat{f}(x) = 0$ para todo x , entonces $f(t) = 0$ (c.p.t). Aplicando esto a $f_1 - f_2$, y teniendo en cuenta la linealidad de la Transformada de Fourier, concluimos el corolario. □

Todo lo que viene a continuación nos servirá para probar una condición que nos asegure que $\hat{f} \in L^1$, y nos será de gran utilidad para la teoría en L^2 .

Lema 5.30. [14] *Para todo $\alpha > 0$ se satisfacen las siguientes igualdades:*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} W(x, \alpha) dx &= 1; \\ \int_{\mathbb{R}^n} P(x, \alpha) dx &= 1. \end{aligned}$$

Demostración. Con un sencillo cambio de variables es fácil ver que $\int_{\mathbb{R}^n} W(x, \alpha) dx = \int_{\mathbb{R}^n} W(x, 1) dx$, y que $\int_{\mathbb{R}^n} P(x, \alpha) dx = \int_{\mathbb{R}^n} P(x, 1) dx$. La primer igualdad es consecuencia de $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/4} dx = 2\sqrt{\pi}$. Aplicando el Corolario 5.28 a $f(x) = e^{-2\pi\alpha|x|}$ (a continuación probaremos que f y P son integrables) y utilizando el Teorema 5.21, obtenemos $\int_{\mathbb{R}^n} P(t, \alpha)e^{-2\pi\alpha|x|} = e^{-2\pi\alpha|x|}$. Poniendo $x = 0$ es claro que $\int_{\mathbb{R}^n} P(t, \alpha) dt = 1$. La integrabilidad de f es fácil de verificar, mientras que la de $P(x, 1)$ se sigue de aplicar la fórmula de integración en coordenadas esféricas:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |t|^2)^{(n+1)/2}} dt = |S^{n-1}| \int_0^{\infty} \frac{s^{n-1}}{(1 + s^2)^{(n+1)/2}} ds,$$

donde $|S^{n-1}|$ denota el área de la superficie de la esfera unitaria. Ahora, la integrabilidad de esta última función no es difícil de verificar separando la región de integración en los intervalos $(0, 1)$ y $(1, \infty)$, y el lema queda probado. □

Definición 5.31. [5] *Decimos que una función f es localmente integrable si $f\chi_K \in L^1(\mathbb{R}^n)$, para todo compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$.*

Definición 5.32. [5] Denominamos conjunto de Lebesgue al subconjunto de \mathbb{R}^n dado por

$$\mathcal{L}(f) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^n} \int_{|t| < r} |f(x-t) - f(x)| dt = 0 \right\}.$$

Teorema 5.33. [5] Si f es localmente integrable, entonces

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^n} \int_{|t| < r} (f(x-t) - f(x)) dt = 0,$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Es claro que para toda $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, se tiene $\mathcal{L}(g) = \mathbb{R}^n$, ya que $|g(t) - g(x)| < \epsilon$ si $|t - x| < \delta$ con $\delta = \delta(\epsilon)$ adecuado. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Si denotamos

$$E_\epsilon := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{0 < r < 1/m} \frac{1}{r^n} \int_{B(x,r)} |f(t) - f(x)| dt > \epsilon \right\},$$

bastará demostrar que $|E_\epsilon| = 0$ para todo $\epsilon > 0$, ya que de ello se obtiene que $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{L}(f) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} E_{1/m}$

es de medida nula. Tomamos $g_k \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ tales que $\|f - g_k\|_1 < 1/k$. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se cumple

$$\frac{1}{r^n} \int_{B(x,r)} |f(t) - f(x)| dt \leq \frac{1}{r^n} \int_{B(x,r)} |g_k(t) - g_k(x)| dt + \frac{1}{r^n} \int_{B(x,r)} |(f - g_k)(t) - (f - g_k)(x)| dt.$$

Como $x \in \mathcal{L}(g)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 < r < 1/n} \frac{1}{r^n} \int_{B(x,r)} |f(t) - f(x)| dt \leq M(f - g_k)(x) + |f(x) - g_k(x)|,$$

de lo cual se deduce que

$$E_\epsilon \subseteq \left\{ M(f - g_k) > \epsilon/2 \right\} \cup \left\{ |f - g_k| > \epsilon/2 \right\}.$$

Utilizando la desigualdad maximal y la de Tchebychev (véase la referencia bibliográfica) obtenemos

$$|E_\epsilon| \leq \frac{3^n}{\epsilon/2} \|f - g_k\|_1 + \frac{2}{\epsilon} \|f - g_k\|_1,$$

y esto último tiende a cero cuando hacemos crecer k . Para f localmente integrable, basta observar que se cumple

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} \mathcal{L}(f \chi_{B(0,k)}) \subseteq \mathcal{L}(f),$$

y que

$$\mathcal{L}(f)^c \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \mathcal{L}(f \chi_{B(0,k)})^c,$$

que es de medida nula. □

Teorema 5.34. [14] Si f es localmente integrable, entonces

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^n} \int_{|t| < r} |f(x-t) - f(x)| dt = 0,$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Si $\alpha \in \mathbb{R}^n$, claramente $|f(t) - \alpha|$ es localmente integrable y, por el Teorema 5.33, el conjunto $F_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ dado por

$$F_\alpha = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^n} \int_{|t| < r} (|f(x-t) - \alpha| + |f(x) - \alpha|) dt \neq 0 \right\},$$

es de medida nula. Si ponemos $F = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Q}^n} F_\alpha$, entonces F es de medida nula. Veamos ahora que

si $x \in \mathbb{R}^n \setminus F$, entonces la igualdad del enunciado es cierta. Fijamos x en este conjunto y, dado $\epsilon > 0$, sea $\alpha \in \mathbb{Q}^n$ tal que $|f(x) - \alpha| < \epsilon$. Si Ω_n es el volumen de la bola unitaria n -dimensional, recordamos que $r^n \Omega_n$ es el volumen de la bola de radio r . Observemos que

$$\frac{1}{\Omega_n r^n} \int_{|t| < r} |f(x-t) - f(x)| dt \leq \frac{1}{\Omega_n r^n} \int_{|t| < r} |f(x-t) - \alpha| dt + \frac{1}{\Omega_n r^n} \int_{|t| < r} |\alpha - f(x)| dt.$$

Como $x \notin F_\alpha$, es fácil verificar que $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega_n r^n} \int_{|t| < r} |f(x-t) - \alpha| dt = |f(x) - \alpha| < \epsilon$. Además

$$\frac{1}{\Omega_n r^n} \int_{|t| < r} |\alpha - f(x)| dt = |f(x) - \alpha| < \epsilon, \text{ de lo cual se deduce el resultado. } \quad \square$$

En el siguiente teorema, cuando hablamos de supremo nos referiremos al supremo esencial.

Teorema 5.35. [14] *Supongamos que $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Sea $\psi(x) = \sup_{|t| \geq |x|} |\varphi(t)|$ y, para cada $\epsilon > 0$, sea $\varphi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \varphi(x/\epsilon)$. Si $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, entonces*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (f * \varphi_\epsilon)(x) = f(x) \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t) dt,$$

para todo $x \in \mathcal{L}(f)$.

Demostración. Sea $x \in \mathcal{L}(f)$, y sea $\delta > 0$. Como $\|f\|_q \leq |K|^{(1/q-1/p)} \|f\|_p$ (en donde la norma se toma sobre el espacio K), para todo K compacto y $q \leq p$, f es localmente integrable y podemos aplicar el teorema anterior para encontrar $\eta > 0$ tal que

$$\frac{1}{r^n} \int_{|t| < r} |f(x-t) - f(x)| dt < \delta, \tag{5.2}$$

para todo $r \leq \eta$. Por lo tanto, como $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\epsilon(t) dt = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t) dt = a$, para todo $\epsilon > 0$, se tiene

$$\begin{aligned} |(f * \varphi_\epsilon)(x) - af(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-t) - f(x)) \varphi_\epsilon(t) dt \right| \\ &\leq \left| \int_{|t| \leq \eta} (f(x-t) - f(x)) \varphi_\epsilon(t) dt \right| + \left| \int_{|t| \geq \eta} (f(x-t) - f(x)) \varphi_\epsilon(t) dt \right| \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Para estimar I_1 , observamos que ψ es *radial*, es decir, $\psi(x_1) = \psi(x_2)$ si $|x_1| = |x_2|$. Si ponemos $\psi_0(r) = \psi(x)$ cuando $|x| = r$, entonces ψ_0 es una función decreciente con respecto a r . Utilizando la notación del teorema anterior, es inmediato verificar que

$$\frac{\Omega_n(2^n - 1)}{2^n} r^n \psi_0(r) \leq \int_{r/2 \leq |x| \leq r} \psi(x) dx.$$

5.2. PROBLEMA DE INVERSIÓN

Como $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, esta última expresión tiende a cero, y concluimos que $\lim_{r \rightarrow \infty} r^n \psi_0(r) = 0$. En particular, existe una constante A tal que $r^n \psi_0(r) \leq A$, para todo $0 < r < \infty$. Por lo tanto, aplicando la fórmula de integración en coordenadas esféricas, la condición (5.2) es equivalente a

$$G(r) = \int_0^r s^{n-1} g(s) ds \leq \delta r^n,$$

para $r \leq \eta$. Utilizando estas observaciones y una integración por partes en la segunda igualdad,

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \int_{|t| < \eta} |f(x-t) - f(x)| \epsilon^{-n} \psi\left(\frac{t}{\epsilon}\right) dt = \int_0^\eta r^{n-1} g(r) \epsilon^{-n} \psi_0\left(\frac{r}{\epsilon}\right) dr \\ &= G(r) \epsilon^{-n} \psi_0\left(\frac{r}{\epsilon}\right) \Big|_0^\eta - \int_0^\eta G(r) \epsilon^{-n} \psi_0'\left(\frac{r}{\epsilon}\right) dr \\ &\leq \delta r^n \epsilon^{-n} \psi_0\left(\frac{r}{\epsilon}\right) \Big|_0^\eta - \int_0^{\eta/\epsilon} G(\epsilon s) \epsilon^{-n} \psi_0'(s) ds \\ &\leq \delta A - \int_0^{\eta/\epsilon} \delta s^n \psi_0'(s) ds \\ &\leq \delta \left(A - \int_0^\infty s^n \psi_0'(s) ds \right). \end{aligned}$$

Otra integración por partes nos muestra que esta última integral es acotada:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty s^n \psi_0'(s) ds &= s^n \psi_0(s) \Big|_0^\infty + n \int_0^\infty s^{n-1} \psi_0(s) ds \\ &= 0 + \frac{n}{\omega_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx, \end{aligned}$$

donde ω_{n-1} es el área de la superficie de la esfera.

Como $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, nos queda que $\lim_{\delta \rightarrow 0} I_1 = 0$. Para estimar I_2 , ponemos $\psi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \psi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$, y denotamos por χ_η a la función indicadora de la región $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| > \eta\}$. Entonces, si $1/p + 1/p' = 1$, tenemos

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t) \varphi_\epsilon(t) \chi_\eta(t) dt \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi_\epsilon(t) \chi_\eta(t) dt \right| \\ &\leq \|f\|_p \|\chi_\eta \psi_\epsilon\|_{p'} + \|f(x)\| \|\chi_\eta \psi_\epsilon\|_1, \end{aligned}$$

haciendo uso de la desigualdad de Hölder. Como

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|\chi_\eta \psi_\epsilon\|_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \eta} \psi_\epsilon(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \eta/\epsilon} \psi(x) dx = 0,$$

el segundo sumando será arbitrariamente pequeño al variar ϵ . Por otro lado, considerando que $p' = 1 + (p/p')$, y aplicando la desigualdad de Hölder, es fácil verificar que

$$\begin{aligned} \|\chi_\eta \psi_\epsilon\|_{p'} &= \left(\int_{|x| > \eta} (\psi_\epsilon(x))^{p'} dx \right)^{1/p'} = \left(\int_{|x| > \eta} \psi_\epsilon(x) (\psi_\epsilon(x))^{p'/p} dx \right)^{1/p'} \\ &\leq \|\chi_\eta \psi_\epsilon\|_\infty^{1/p} \|\chi_\eta \psi_\epsilon\|_1^{1/p'}. \end{aligned}$$

Recordando que ψ_0 es decreciente y que $\lim_{r \rightarrow \infty} r^n \psi_0(r) = 0$, obtenemos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|\chi_\eta \psi_\epsilon\|_\infty = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{|x| > \eta} \psi_\epsilon(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \eta^{-n} \left(\frac{\eta}{\epsilon}\right)^{-n} \psi_0\left(\frac{\eta}{\epsilon}\right) = 0.$$

Hemos concluido por tanto que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_2 = 0$, lo cual implica que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} |(f * \varphi_\epsilon)(x) - af(x)| = 0,$$

como se quería ver. □

Corolario 5.36. [14] *Supongamos que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\hat{f} \geq 0$. Si f es continua en $x = 0$, entonces $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y*

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) e^{2\pi i t \cdot x} dx.$$

Demostración. Si f es continua en un punto, entonces claramente este punto pertenece a $\mathcal{L}(f)$. Utilizando los Teoremas 5.25 y 5.35, con $t = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) e^{-2\pi\epsilon|x|} dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi_\epsilon(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (f * \varphi_\epsilon)(0) \\ &= f(0) \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = f(0) \int_{\mathbb{R}^n} P(x, \epsilon) dx = f(0), \end{aligned}$$

donde, en este caso, $\Phi(t) = e^{-2\pi\epsilon|x|}$. Ahora, como $\hat{f} \geq 0$, observamos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \hat{f}(x) e^{-2\pi\epsilon|x|} dx \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) e^{-2\pi\epsilon|x|} dx = f(0),$$

donde hemos aplicado el Lema de Fatou en la desigualdad. Por lo tanto es inmediato verificar que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y, aplicando el Corolario 5.28, concluimos que

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) e^{2\pi i t \cdot x} dx.$$

□

5.3. Teoría en $L^2(\mathbb{R}^n)$

La integral que hemos utilizado para la Transformada de Fourier no está bien definida para funciones en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Sin embargo existe una definición natural para la Transformada de Fourier en este espacio. Será fundamental el siguiente teorema para verlo.

Teorema 5.37. [14] *Si $f \in L^1 \cap L^2$, entonces $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$.*

Demostración. Sea $g(x) = \overline{f(-x)}$. Por el Teorema 5.6, $h = f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, y por el Teorema 5.23, $\hat{h} = \hat{f}\hat{g}$. Como $\hat{g} = \hat{f}$, tenemos que $\hat{h} = |\hat{f}|^2$. Ahora, por el Corolario 5.36, es claro que $\hat{h} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y que $h(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{h}(x) dx$. Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{h}(x) dx = h(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(0-x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{f(-x)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

□

Este teorema nos dice que la transformada de Fourier en L^1 es un operador lineal acotado definido sobre un subespacio denso de $L^2(\mathbb{R}^n)$, a saber, $L^1 \cap L^2$. De hecho, es una isometría. Por lo tanto, existe una única extensión acotada, que denominaremos \mathcal{T} , de este operador en todo L^2 , y diremos que es la *Transformada de Fourier* en L^2 . Utilizaremos la notación $\hat{f} = \mathcal{T}(f)$ cuando $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. En general, si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, esta definición de Transformada de Fourier nos proporciona \hat{f} como el límite (en norma L^2) de una sucesión $\{\hat{h}_k\}$, donde h_k pertenece a $L^1 \cap L^2$, para todo k . A menudo será conveniente tomar $h_k = f\chi_k$, donde χ_k es la función indicadora sobre la región $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < k\}$. Los siguientes dos teoremas son conocidos como *Teorema de Plancherel*.

Teorema 5.38. [14] *La transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^n)$ es un operador unitario.*

Demostración. Debemos probar que $\mathcal{T} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ es una isometría exhaustiva. La isometría es consecuencia inmediata del teorema anterior. Para ver la exhaustividad, primero observamos que, al ser \mathcal{T} una isometría, el rango de \mathcal{T} ha de ser un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Si el rango no fuera todo $L^2(\mathbb{R}^n)$, podríamos encontrar una función g , con $\|g\|_2 \neq 0$, tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x) dx = 0$, para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ (véase [6]). Utilizando la Fórmula de Multiplicación, que se extiende de manera natural a $L^2(\mathbb{R}^n)$, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x) dx = 0,$$

para todo $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Esto implica que $\hat{g}(x) = 0$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$, lo cual contradice que $\|\hat{g}\|_2 = \|g\|_2 \neq 0$. \square

Teorema 5.39. [14] *La inversa de la Transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^n)$, \mathcal{T}^{-1} , puede expresarse mediante $(\mathcal{T}^{-1}g)(x) = (\mathcal{T}g)(-x)$, para toda $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. En lo que sigue, utilizaremos el hecho de que $L^2(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Hilbert, y por lo tanto, como \mathcal{T} es unitario, $\mathcal{T}^{-1} = \mathcal{T}^*$. Probaremos que $\mathcal{T}^{-1}(\hat{f})$ puede expresarse como el límite (en norma L^2) de la sucesión definida por

$$f_k(t) = \int_{|x| \leq k} \hat{f}(x)e^{2\pi i t \cdot x} dx. \tag{5.3}$$

Primero lo vemos para $\hat{f} \in L^2 \cap L^1$, un subconjunto denso del rango de \mathcal{T} . Bastará verificar que el límite de la expresión (5.3) es igual a $\mathcal{T}^*\hat{f}$. Pero esto es inmediato, ya que si ponemos $\tilde{f}(t) := \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)e^{2\pi i t \cdot x} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(t)$, es fácil verificar que

$$\begin{aligned} \langle g, \tilde{f} \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} g(t) \overline{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)e^{2\pi i t \cdot x} dx \right)} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(t)e^{-2\pi i x \cdot t} dt \right) \overline{\hat{f}(x)} dx = \langle \mathcal{T}g, \hat{f} \rangle, \end{aligned}$$

para todo $g \in L^1 \cap L^2$. Esto nos dice que $\langle g, \tilde{f} \rangle = \langle \mathcal{T}g, \mathcal{T}\hat{f} \rangle = \langle g, \hat{f} \rangle$, para todo $g \in L^1 \cap L^2$, y por lo tanto, $\tilde{f} = \hat{f}$. Podemos extender el resultado a todo $L^2(\mathbb{R}^n)$ mediante un argumento de aproximación. \square

Bibliografia

- [1] T. M. Apostol, *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley Publishing Company, 1957.
- [2] S. Bandyopadhyay, *Mathematical Analysis*, Academic Publishers, 2004.
- [3] J. Boos, *Classical and Modern Methods in Summability*, Oxford University Press, 2000.
- [4] H. S. Carslaw, *An introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals*, Dover Publications, 1950.
- [5] J.L. Cerdà, *Anàlisi Real*, Edicions Universitat de Barcelona, 1996.
- [6] J.L. Cerdà, *Introducció a l'anàlisi funcional*, Edicions Universitat de Barcelona, 2004.
- [7] M. Giaquinta, G. Modica, *Mathematical Analysis, Linear and Metric Structures and Continuity*, Birkhäuser, 2007.
- [8] N. Grady, *Functions of Bounded Variation*, Whitman College Senior Project, 2009, <http://www.whitman.edu/mathematics/SeniorProjectArchive/2009/grady.pdf>.
- [9] S. Gul Shah, *Real Analysis*, University of Sargodha Lecture Notes, 2009, http://www.mathcity.org/msc/real_analysis_notes_by_syed_gul_shahs.
- [10] J. K. Hunter, *Measure Theory*, UC Davis Lecture Notes, 2011, http://www.math.ucdavis.edu/~hunter/measure_theory/measure_notes.pdf.
- [11] Y. Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis*, Dover Publications, 1976.
- [12] P. Laval, *Binomial Series*, Kennesaw State University Lecture Notes, 2012, <http://science.kennesaw.edu/~plaval/math2202/binomial.pdf>.
- [13] A. N. Sengupta, *Introductory real analysis*, Louisiana State University Notes, 2008, <https://www.math.lsu.edu/~sengupta/4031f06/IntroRealAnalysNotes.pdf>
- [14] E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, 1971
- [15] M. Taibleson, *Fourier coefficients of functions of bounded variation*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol 18 (1967), 766-767.
- [16] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Cambridge University Press, volúmenes I, II, 1959.