El problema de la vaca

Álex García Eduard Fugarolas

Resumen

El planteamiento común trata de solucionar el problema por integración. Se puede encontrar en http://www.mat.ub.es/~soria/Vaca.html, junto con el enunciado del problema. Aquí presentamos una solución completamente diferente: con geometría!

Problema

Una vaca está atada con una cuerda a una estaca, que está clavada en el borde de un campo de hierba de forma circular, que tiene un metro de radio. ¿Cuál ha de ser la longitud de la cuerda para que sólo se pueda comer la mitad de la hierba?

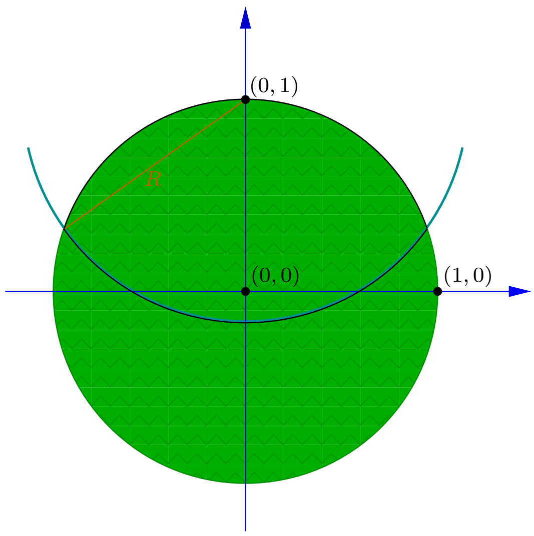
Solución

Solución por integración

La dificultad de este método está en el cálculo de la integral.

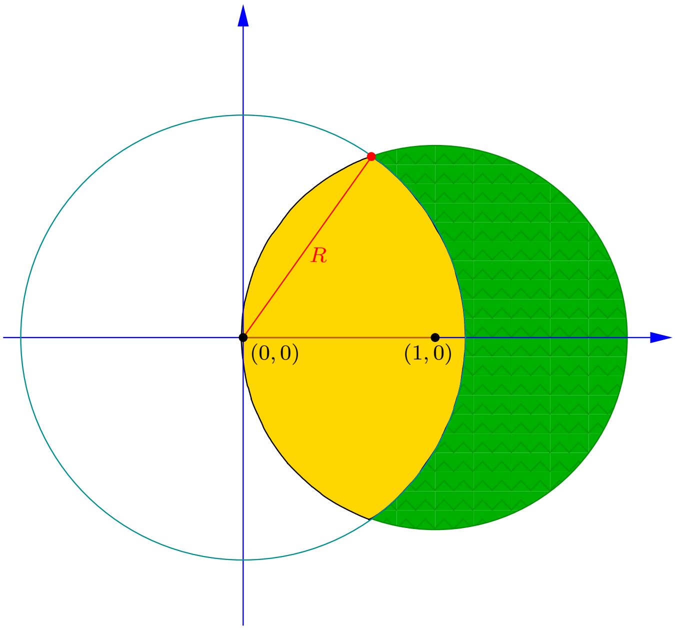
$$\frac{\pi}{2} = \int_{-\frac{R}{2}\sqrt{4-R^2}}^{\frac{R}{2}\sqrt{4-R^2}} \sqrt{1-x^2} - 1 + \sqrt{R^2-x^2}dx$$

La representación gráfica del problema acostumbra a ser parecida a la figura siguiente:



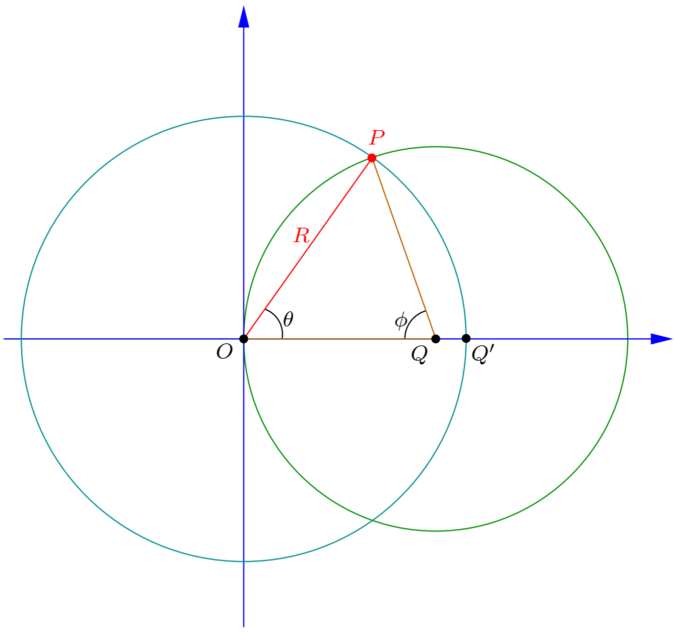
Solución por métodos geométricos

Nuestro planteamiento del problema es el siguiente:



La cantidad de hierba que se puede comer la vaca es la superfície amarilla, con un área de $\pi/2$. Por simetria, trabajaremos solo con la mitad superior de ésta, de área $\pi/4$, naturalmente.

Ahora empezamos a trabajar con la figura, lo que viene es muy visual y no precisa de muchos comentarios.



El área del sector circular OPQ' de radio R es

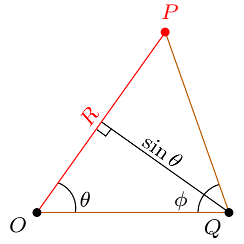
$$\frac{R^2\theta}{2}$$

El área del sector circular QOP de radio 1 es

$$\frac{\phi}{2}$$

El área del triángulo QOP, de base R y altura $\sin\theta$, es

$$\frac{1}{2}R\sin\theta$$

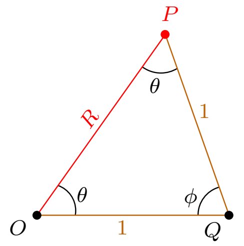


Para obtener el área total tenemos que sumar los dos sectores circulares con el triangulo. La idea de esto es añadir al sector circular de radio R el *trocito* que le falta, que es la diferencia entre el sector circular de radio 1 y el triangulo isósceles.

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}R^2\theta + \frac{1}{2}\phi - \frac{1}{2}R\sin\theta$$

Con esto tenemos una ecuación y tres incógnitas (R, θ, ϕ), nos faltan dos ecuaciones para poder resolver el sistema. Se ve claramente que el triángulo es isosceles (tiene dos lados de radio 1), por lo que

$$\phi = \pi - 2\theta$$



Ahora nos falta una última relación, que podemos obtener (por ejemplo) de aplicar la ley de los senos sobre este mismo triángulo.

$$\frac{R}{\sin\phi} = \frac{1}{\sin\theta}$$

Ahora ya tenemos nuestro sistema. Es este:

$$\begin{cases} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}R^2\theta + \frac{1}{2}\phi - \frac{1}{2}R\sin\theta \\ \phi = \pi - 2\theta \\ R = \frac{\sin\phi}{\sin\theta} \end{cases}$$

Con las dos últimas ecuaciones tenemos

$$R = \frac{\sin\phi}{\sin\theta} = \frac{\sin(\pi - 2\theta)}{\sin\theta}$$

Sustituimos R en la primera ecuación

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(\pi-2\theta)}{\sin\theta}\right]^2\theta + \frac{1}{2}(\pi - 2\theta) - \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\pi-2\theta)}{\cancel{\sin\theta}}\right)\cancel{\sin\theta}$$

Finalmente tenemos el área en función, únicamente, de θ. Esto no tiene mucho aspecto de tener solución analítica y lo resolvemos por métodos numéricos (i.e. cojemos una calculadora que nos lo haga). Nos da

$$\theta = 0{,}952847864653\ldots$$

Sustituimos θ a $R(\theta)$ y obtenemos R.

$$R = 1{,}15872847302\ldots$$

Y ya tenemos el problema resuelto!