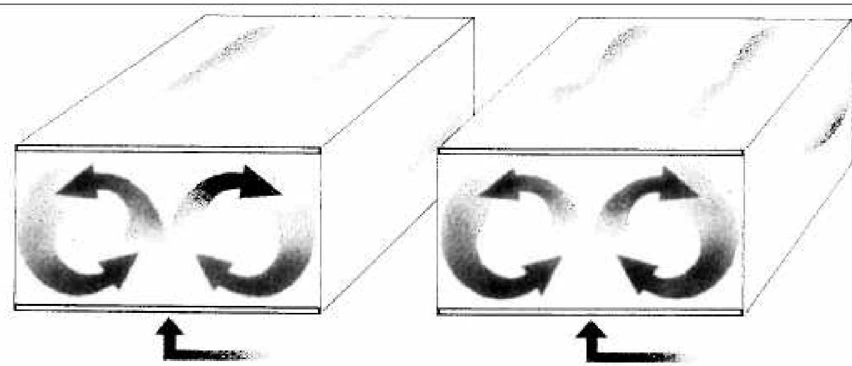
El sistema de Lorenz

Arturo Vieiro

Problema

Consideramos un fluido (o gas) en una sección 2D ($-\infty < x < \infty$, $0 \leq y \leq \pi$) y suponemos que tenemos una diferencia de temperatura T entre la parte de abajo y arriba (de hecho en un fluido 3D se producen flujos 2D).

Se produce un proceso de convección



UN FLUIDO GIRATORIO. Si se calienta por debajo, el líquido o gas tiende a organizarse en giros cilíndricos *(izquierda)*. El fluido caliente se eleva por un lado, pierde temperatura y desciende por el lado opuesto. Es el proceso de la convección. Si se intensifica el calor *(derecha)*, aparece la inestabilidad, y los giros exhiben un temblor que recorre adelante y atrás la longitud de los cilindros. A temperaturas aún más elevadas, la corriente se desordena y se hace turbulenta.

$\rightarrow$ Queremos deducir las ecuaciones de movimiento del fluido.

Ecuaciones (1)

El fluido viene descrito por un campo de velocidades

$$v(x, y, t) = (v_x(x, y, t), v_y(x, y, t))$$

La ecuación del momento del fluido nos la da la 2a ley de Newton:

$$F = ma$$

La aceleración es:

$$a = \frac{dv}{dt} = (\partial_t + \partial_v)v,$$

donde $\partial_t = \partial/\partial t$ y $\partial_v = v_x\partial/\partial x + v_y\partial/\partial y$.

$\rightarrow$ Falta determinar la fuerza F por unidad de volumen del fluido (suponemos densidad $m/V = 1$ “en promedio”).

Ecuaciones (2)

La fuerza $F = F_{\mathtt{int}} + F_{\mathtt{ext}}$ a la que está sometido el fluido es la suma de 3 contribuciones:

- La presión $P = P(x, y)$ crea una fuerza (conservativa) que viene dada por

$$-\nabla P = (-\partial_x P, -\partial_y P)$$

- Viscosidad del fluido (fuerza disipativa) que viene dada por

$$\nu \Delta v$$

  donde ν es el coeficiente de viscosidad y $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}$ es el operador Laplaciano.

- Una fuerza exterior F_{ext} que, en nuestro caso, vendrá producida por la diferencia de temperatura (el fluido caliente es menos denso que el frío y tiende a subir).

Ecuaciones (3): Navier-Stokes

Por lo tanto, la ley de Newton $F = ma$ nos da la ecuación del momento del fluido

$$\partial_t v = -\partial_v v - \nabla P + \nu \Delta v + F_{ext}$$

que se conoce con el nombre de **EDP de Navier-Stokes** (de un fluido incompresible de densidad constante).

$\rightarrow$ Fluido incompresible $\Leftrightarrow$ div$(v(x, y, t)) = 0$

i.e.

la densidad permanece constante (es una idealización que supone que no puedo apretar el fluido, p.ej. el agua es “más incomprensible” que el aire).

Ecuaciones (4)

$\rightarrow$ Un campo vectorial 2D con div $= 0$ tiene asociada una función de corriente Ψ (constante sobre las líneas de corriente), de manera que

$$v_x = -\partial_y \Psi, \;\; v_y = \partial_x \Psi$$

$\rightarrow$ Pedimos que el fluido esté en $0 < y < \pi$, luego la función de corriente ha de ser constante sobre las fronteras $y = 0$ y $y = \pi$ (de manera que el flujo se mueva tangencialmente a las fronteras).

Si escribimos Navier-Stokes en términos de la función ψ se obtiene

$$\partial_t \Delta\psi = -\partial_v \Delta\psi + \nu\Delta^2\psi + \text{rot}\, F_{ext}$$

donde rot $F = \partial_x F_y - \partial_y F_x$.

Se denomina EDP Navier-Stokes en forma de vorticidad (rot $v = \Delta\psi$).

Influencia de la diferencia de temperatura

Sea T la temperatura en $y = 0$ (abajo) y suponemos que arriba es 0.

Distribución estacionaria de temperatura: $\tau_{stat}(x, y) = T - yT/\pi$.

Distribución (real) de temperatura: $\tau(x, y, t)$

Diferencia: $\Theta(x, y, t) = \tau(x, y, t) - \tau_{stat}(x, y)$

Si se tiene conducción de calor en el fluido, se puede ver que

$$\partial_t \Theta = -\partial_v \Theta - \partial_v(-yT/\pi) + k\,\Delta\Theta \tag{1}$$

donde k es el coeficiente de expansión térmica.

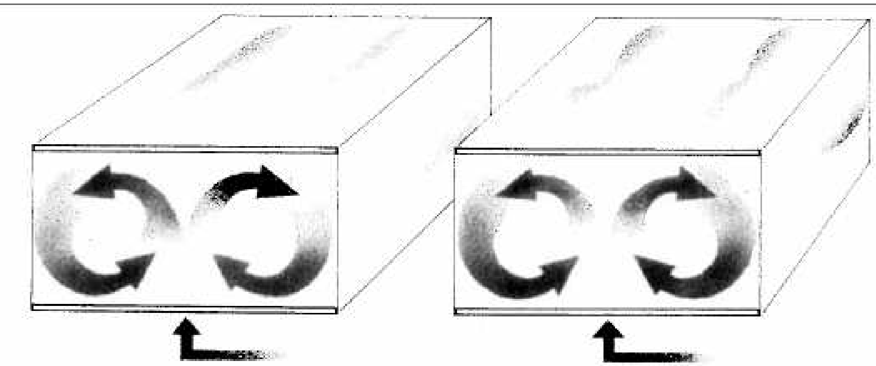
Por otro lado, se puede ver que se crea una fuerza $F_{ext} = (0, c\tau(x, y, t))$ (donde c es una constante) que da un término en Navier-Stokes

$$\partial_t \Delta\psi = -\partial_v \Delta\psi + \nu \Delta^2 \psi + c\,\partial_x \Theta \tag{2}$$

Ecuaciones definitivas

Las ecuaciones (1) y (2) describen la dinamica del fluido en $0 \leq y \leq \pi$

$$\begin{aligned} \partial_t \Delta\psi &= -\partial_v \Delta\psi + \nu \Delta^2 \psi + c\,\partial_x \Theta \\ \partial_t \Theta &= -\partial_v \Theta - \partial_v(-yT/\pi) + k\,\Delta\Theta \end{aligned}$$



UN FLUIDO GIRATORIO. Si se calienta por debajo, el líquido o gas tiende a organizarse en giros cilíndricos *(izquierda)*. El fluido caliente se eleva por un lado, pierde temperatura y desciende por el lado opuesto. Es el proceso de la convección. Si se intensifica el calor *(derecha)*, aparece la inestabilidad, y los giros exhiben un temblor que recorre adelante y atrás la longitud de los cilindros. A temperaturas aún más elevadas, la corriente se desordena y se hace turbulenta.

Son el punto de partida (p.134) de Lorenz.

Reducción al sistema de ecuaciones 3D

Se buscan soluciones en forma de serie de Fourier (adaptada, se han de cumplir condiciones en la frontera), en concreto, como combinación de la base

$$\{\psi_{n,a}, \theta_{n,a}\} = (\sin(ax)\sin(ny), \cos(ax)\sin(ny))$$

Igualando (formalmente) orden a orden el desarrollo que se obtiene al introducir la combinación en las ecuaciones anteriores se encuentra a ordena mas bajo un término en $\psi_{1,a}$, otro en $\theta_{1,a}$ y uno extra en $-\sin(2y)$ (los términos són funciones de t). Las ecuaciones que cumplen esos tres términos, salvo escalados de las variables, son las ecuaciones de Lorenz

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y-x)\\ \dot{y} &= \rho x - y - xz\\ \dot{z} &= -\beta z + xy\end{aligned}$$

Ecuaciones de Lorenz

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \sigma\,(y - x) \\
\dot{y} &= \rho x - y - xz \\
\dot{z} &= -\beta z + xy
\end{aligned}
$$

Parámetros: $\sigma, \rho, \beta > 0$

- σ– coeficiente de Prandtl
- ρ– coeficiente de Rayleigh
- β– coeficiente de ratio de aspecto

Se tiene div $= -(\sigma + 1 + \beta) < 0$

Valores de Lorenz clásicos: $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = 8/3$.